NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
12 P
1

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
55
3 D
25
ROMA

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

14 23 H 28

55.
a
9.

55. 6. 9.

DIOPHANTVS

GEOMETRA

SIVE

OPVS CONTEXTVM

EX ARITHMETICA ET GEOMETRIA ſimul; in quo Quæſtiones omnes Diophanti, quæ geometricè ſolui poſſunt, enodantur tum Algebricis, tum Geometricis rationibus.

ADIECTVS EST

DIOPHANTVS GEOMETRA PROMOTVS, in quo ſubtiles Propoſitiones non abſimili methodo pertractantur, & via noua ad eiuſmodi praxes inueniendas aperitur.

Authore P. IACOBO DE BILLY, Societatis IESV Sacerdote.

Bibl. Soc. Coll. Rom. Soc. J.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

PARISIIS,
Apud MICHAELEM SOLY, viâ Iacobeâ ſub Signo Phœnicis.
M. DC. LX.

ILLVSTRISSIMO DOMINO,

D. PETRO ODEBERT

IN SVPREMA BVRGVNDIÆ CVRIA PRÆSIDI.

TIBI hoc opus de numeris debetur (Vir Illuſtriſſime) vel ex eo nomine, quod es numeris omnibus abſolutus: de te illud omnia perſonant & Roſtra, & Templa, & Xenodochia, & Collegia, & Monaſteria, & hoc ipſum quod es vt mirum ſit non agnoſci à te ipſo, quod omnes agnoſcunt. Verùm & iſtud non ignorantiæ ſupinæ, ſed virtutis eſt ſingularis, vt pote quæ oculos omnium illuſtret, & excæcet tuos. Solem in hoc imitatus es, qui cum ſuam lucem non videat, ſpectari eam facit ab omnibus, hoc duntaxat contentus quod omnes ex radiis ſuis, quanta ſit lux diuina, colligant, & omnia in pſum refundant, à quo omnia profluxerunt. Vix eſt quiſquam qui melius quàm tu Arithmeticam calleat, & numeroſos nummos exquiſitiori cum ordine collocet: etenim minorem partem tibi, & maiorem pauperibus ſeruas, veneratus in illis omnium donorum Authorem Deum. Non potuiſti rectius probare, quàm parum tuis commodis ſtudeas: ſi enim dares hominibus vt redderent, debueras Principes tibi deuincire, non pauperes: Nunc autem cum è contrario agas, ſatis oſtendis quàm

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

tibi ſit cordi donum gratuitum & refuſionis expers. Humilem locum tibi quæſiſti, non thronos: ſordes, non purpuram: tenebras, non lucem: & quod homines horrent, illud auidè complexus, demonſtraſti te vnum Chriſtum ſequi, qui & pauperes amauit, & propter nos egenus factus eſt, vt nos inopia ſua locupletaret. Audiſti procul dubio pauperes diuitum eſſe patronos: & quos non potuiſti habere Sophiſtas & argutos, habuiſti Oratores, qui pro te Diuinum Numen aſſiduè deprecarentur, & cauſas tuas apud ipſum orarent. Didiciſti illud Cypriani: Patrimonium Deo creditum non Res publica eripit, nec Fiſcus inuadit, nec calumnia aliqua forenſis euertit: in tuto ponitur, quod Deô cuſtode ſeruatur. Voluiſti diuitias tuas non fluere, ſed ſtare: idcirco illas apud immobilem depoſuiſti, vt cùm defeceris, recipiant te in æterna tabernacula. Clamabit poſt ſæcula Xenodochium Beatæ Annæ, clamabunt parietes ipſius, clamabunt cubicula, clamabunt lecti, clamabunt tegulæ te omnia in pondere, in menſura, & in numero diſpoſuiſſe, eum in terris feciſti opus cælorum, & cælo ipſo dignum. Adieciſti liberalitati tuæ Religionem, neque enim vnicam virtutem exercere ſuffecit tibi, qui omnes habuiſti: veritus es ne forent in otio cæleſtes illæ dotes, quæ in praxi conſiſtunt, & ne vel vna vacaret, vacasti omnibus. Solitarius ſemper existens cum Deo, ſolitariis monasteria construxisti, vt ſolitudinem arctius obſeruarent, & abdicata ſæculi pompa, Diuino Numini pompaticè inſeruirent.

Conſiderasti diuitias tuas, non tam tuas eſſe, quàm Dei, ac veluti fidelis œconomus ratione͂ ei ſubinde reddidiſti: ne ſi hanc ad mortem vſque differres, difficilior foret calculus, aut ex nimia rerum numerandarum multitudine, aut ex deſuetudine numerandi. Vide quot pauperes ditaris, quot nudos, veſtieris, quot frigidos & gelu confectos calefeceris, quot languidos roboraris

raris, quot triſtes recrearis, quot famelicos ſaturaris, quot puſillanimes animaris, & quot deficientibus ex via fueris aſylus, refugium, & portus: non poteſt non fore in numero ſanctorum qui pecunias ſuas tàm ſanctè numerauit. Neque verò hic ſtetit liberalitas tua, & numeri, Deique amor, numeraſti enim Societati noſtræ vnde Theologiam ſterneret & Theologos crearet. profitebatur Collegium Diuiogodimum humaniores literas, tu diuinas addidiſti florebant; in illo altiſſima ſapientiæ Ariſtotelicæ arcana, tu profundiſſima Theologiæ Sacræ myſteria contuliſti, ore humano loquebatur Academia, nunc Diuina Oracula fundit; Et quod mirum eſt dictu, liberalitas eadem tua teipſum in eadem Academia Primarium creauit & Profeſſorem & Doctorem; Non ſi (vt communi fertur axiomate) qui per alios aliquid facit, hoc per ſe ipſum facere videtur, Quot in Burgundia Theologos doces? quot myſteria fidei enucleas? quot Chriſtianos ædificas? quot hæreticos aut ad ſaniorem mentem reuocas, aut cum pertinacia ſua confundis? ſumma patria tua gloria, manifeſto ciuitatis profectu, incredibili Chriſtiani & Odebertini Nominis incremento. Numera profeſſores & quod mirum dictu eſt eadem liberalitas tua te ipſum in eadem Academia primarium creauit & profeſſorem & doctorem: nam ſi, qui per alios aliquid facit, per ſe ipſum facere videtur quot in Burgundia Theologos doces? quot myſteria fidei enucleas? quot hæreticos confundis? quot Chriſtianos ædificas? patria ſumma gloria, Ciuitatis manifeſto profectu, & Collegium mediocri in cremento effeciſti.

Numera Profeſſores qui eloquium tuum hactenus condiderunt, & poſt hac condituri ſunt: numera Scholaſticos qui tuo beneficio in viros doctos euaſerunt: numera Diuini Verbi præcones, qui tuis præſidiis inſtructi, Dei laudes & virtutum encomia propalarunt: numera Sacerdotes qui dignè ac laudabilter rem Diui-

nam fecerunt & ſacramenta prè adminiſtrarunt; omnes iſti numeri è tuis numeris prodiere, mna tua facit decem mnas, è tuo vnico Theologiæ fonte manarunt tot flumina Paradiſi. tu Eccleſiam fluentis tuis irrigaſti, tu mentes fœcundas feciſti, tu flores & fructus non tantùm ad delicias, verum etiam ad totius reipublicæ Chriſtianæ vtilitatem produxiſti, tibi vni tam multiplicis operis debetur gloria & merces. En quò aſſurgat Arithmetica tua. Nemo igitur eſt, vt ego quidem exiſtimo, qui non videat quo iure tractatum hunc de Numeris tuo numeroſo calculo vendicaris tibi: oportuit enim Societatem noſtram debitum ſuum profiteri, & ſingula recenſere, quæ debet: hoc ego illius nomine perago, & te creditorem omnium noſtrûm agnoſco, & quò maior in debitores gloria refundatur, nos ſummè tibi obſtrictos fateor, & pro acceptis beneficiis quam maximè poſſum, gratias ago: tantumque abeſt vt iſtis gratiarum actionibus putem exoluere debitum, vt potius nouum contrahere exiſtimem, ſi eas acceptare non dedigneris.

Tuæ Dominationi,

Deuotiſſimus in Chriſto ſeruus,
IACOBVS DE BILLY
Societatis IESV.

LECTORI BENEVOLO.

QVISQVIS Diophantum non nouit, is profectò ne Mathematici, quidem meretur nomen: quod enim eſt inter Oratores Cicero, inter Poëtas Virgilius, inter Philoſophos Ariſtoteles, inter Theologos Sanctus Thomas, inter Medicos Hippocrates, inter Iuris peritos Iuſtinianus, inter Aſtronomos Ptolemæus, inter Geometras Euclides, illud ipſum eſt inter Arithmeticos Diophantus, vtpote qui reliquos omnes longo interuallo ſuperet, eorumque ſit Coriphæus, ac facilè Princeps.

Scripſit ille primarij ſui operis libros ſex, qui à diuerſis fuerunt illuſtrati, inter quos ſingulari laude dignus eſt Claudius Gaſpar Bachetus à Meziriaco: hic enim non ſolum hiantes in textu græco lacunas incredibili labore impleuit, & apices numeroſque tùm integros, tùm fractos, vel imperitia authorum, vel incuria typographorum omiſſos reſarciuit, verum etiam doctiſſimos commentarios edidit tanta ingenij ſubtilitate, vt intricatiſſimas quæſtiones facilè ſoluat, dilucidè explicet, feliciter promoueat, ac pene ſolus videatur mentem authoris ſui, quem interpretandum ſuſcepit, attigiſſe.

Cæterum ſtetit Diophantus intrà limites Arithmeticæ, non quidem vulgaris illius, quæ à pueris ediſcitur, & paſſim apud mercatores eſt in vſu: ſed alterius ſubtilioris, quam Algebram vocant, & eſt ſcientia numeri ex ſuppoſitione incogniti. Mirificum ſane eſt illud inuentum, ſiquidem ex aſſumpta magnitudine tanquam vera conſtituitur æquatio inter eam ignotam, & alias notas, & poſt æquationem reductio, & poſt reductionem diuiſio, ac tandem extractio radicis quæſitam exhibet quantitatem, non quidem temerè, & quaſi tentando, ſed certis & apodicticis argumentis. Duplicem illam eſſe ſciunt vel ipſi tyrones: aliam ſpecioſam, aliam numericam. Specioſa eſt ea, quæ per ſpecies & rerum formas literis deſignatas, logiſticam ſuam exercet, & quantitatem ignotam reperit. Numerica verò eſt illa quæ numeris ad finem propoſitum vtitur.

Et hac quidem poſteriori duntaxat vſus eſt Diophantus : nõ quod priorem ignorarit, (vtriuſque enim ſimilis eſt methodus, & idem fundamentum) ſed quia voluit omnibus etiam imperitis ſatiſfacere. Immò, quod mireris, & ſi numerus in rationalem & ſurdum diuidatur, ne vnam quidem quæſtionem exhibet Diophantus, in qua occurrant numeri ſurdi & irrationales : neque tantùm hoc, ſed etiam videtur eos data opera declinare & quaſi fictitium quid reſpuere. Hinc ſubtiles & arte conquiſitæ poſitiones ipſius; hinc fictitia latera quadratorum, hinc duplicatæ æquationes, quæ ſane eò tendũt tantũ, vt irrationales numeri euitentur: illi enim ſi admitterentur in eiuſmodi problematibus, facillima euaderet ſolutio. Hoc innumeris exemplis poteſt demonſtrari, vnum pro omnibus ſatis erit: Libro ſecundo, quæſtione vigeſima nona, quærit duos numeros quadratos, quorum productus adſcito alterutro, faciat quadratum. Nemo non videt, admiſſis ſurdis, ſumi poſſe quoſlibet quadratos, puta 4 & 9. eorum enim productus 36 adſcito primo facit 40, & adſcito ſecundo facit 45, qui quadrati quidem non ſunt, neque enim reperiri poſſunt duo numeri qui in ſe ducti illos producant, tamen admiſſis ſurdis, erit ℞ 40 latus prioris, & ℞ 45 latus poſterioris. Siquidem radix ſurda prior in ſe ducta facit 40: & radix poſterior facit 45. Quoniam igitur illæ radices ſurdæ ſunt, alias poſitiones arte conquirit Diophantus, nempe 1 Q & $\frac{9}{16}$, ita enim productus illorum aſſumpto primo facit quadratum $\frac{25Q}{16}$ quare ſupereſt vt aſſumpto ſecundo, faciat rurſus quadratum, facit autem $\frac{9Q}{16}$ † $\frac{9}{16}$. igitur ſumma hæc eſt æquanda quadrato. Poſſet hic iterum ſumi quilibet numerus pro valore radicis, ſi ſurdi admitterentur, ſed vt id vitet Diophantus, fingit ſubtiliter latus illius numeri æquandi quadrato. Et quoniam denominator eſt quadratus, accipit tantum numeratores 9Q † 9 cuius latus fingit 3R -- 4. ergo eius quadratum 9Q † 16 -- 24R æquatur 9Q † 9. & fit 1R numerus rationalis $\frac{7}{24}$ quare

duo

duo quadrati quæſiti ſunt 49 & 9.

179 19

Vides totum Diophantum Arithmeticum eſſe: vnde non immerito quiſpiam mirari poteſt, cur ego ipſi cognomen Geometræ indiderim. Hic tandem aperiendus eſt huius operis ſcopus, qui eò tendit, vt quod Diophantus in numeris perficit, id in Geometria efficiatur. Nolim tamen tibi perſuadeas illud à me vniuerſim adeò promitti, vt nulla prorſus quæſtio excipiatur, ſi enim attentè hunc Authorem legiſti, aduerteris procul dubio duplicis generis quæſtiones ab ipſo proponi: aliæ enim Geometricis legibus expediri poſſunt, aliæ nullomodo, nè à peritiſſimo quidem Geometra, non quod ars ipſa manca ſit & deficiens, ſed quia ipſum obiectum inuoluit contradictionem. Talis eſt quæſtio quarta libri tertij qua imperatur inueniri tres quantitates tales, vt quælibet quadrato ſummæ illarum multata, faciat quadratum: quis enim poſſit tollere quadratum à linea? deinde & ſi illud fieri poſſet, quonam modo remaneret & quadratum?

Simili ratione deprehendes repugnare in Geometria, quæſtionem quintam Libri ſecundi, qua iubetur quæri duos numeros, tales vt interuallum quadratorum ad ſummam numerorum, datam habeat rationem: hoc in quam inuoluit contradictionem, quia in Geometria, interuallum quadratorum eſt ſuperficies, ſumma verò linearum eſt linea, repugnat autem ſuperficiam ad lineam habere proportionem, quia linea qnantumuis multiplicata ſuperficiem æquare aut ſuperare non poteſt.

Non aliter deprehendetur quæſtionem decimam quartam libri primi inuoluere contradictionem in Geometria, ſiquidem illic quæruntur duo numeri tales, vt productus ex eorum multiplicatione ad eorum ſummam datam habeat rationem: cæcutit plane, qui non videt repugnantiam ſecundum, leges Geometricas: nam vel quantitates quæſitæ erunt lineæ, vel plana, vel ſolida: vel partim lineæ, & partim plana aut ſolida. Si ſint lineæ, productus illarum erit ſuperficies, ſumma autem erit linea, implicat verò ſuperficiem ad lineam habere proportionem: ſi ſint plana, productus erit quantitas, imaginaria, & ſumma erit planum: fieri autem nequit, vt quantitas imaginaria ad planum reale proportionem habeat: idem dicendum

de ſolidis à fortiori, quia ſcanderetur ad ſextum vſque gradum per multiplicationem, & ſiſteretur in tertio gradu, per additionem. Quod ſi quantitates quæſitæ ſint linea & planum, producetur ſolidum, nulla autem fiet additio, quia non poteſt addi linea cum plano. idemque aſſerendum de plano reſpectu ſolidi. Ergo hæc quæſtio Diophanti repugnat in Geometrica.

Quod de tribus illis quæſtionibus dictum eſt, poteſt dici de centum & nouemdecim per totum opus prædicti Authoris ſparſis, quæ licet in Arithmetica ſoluantur, Geometricè tamen ſunt inſolubiles. Cuius quidem differentiæ ratio eſt, quia nullus eſt numerus ſiue linearis, ſiue planus, ſiue ſolidus, qui per alium numerum multiplicari non poſſit tali ratione, vt productus ex ea multiplicatione ortus ſit realis: vnde in Arithmetica ſcandi poteſt ad quotlibet gradus per multiplicationem: at verò ſunt aliquæ quantitates in Geometria quæ per aliam multiplicatæ, non niſi imaginarium quid producunt: vt ſi ducas ſolidum in lineam, aut ſuperficiem in ſolidum, cùm enim ſint tantùm tres dimentiones, nempe longitudo, latitudo & profunditas, fit vt in Geometrià vltra Corpus, quod tribus illis dimenſionibus conſtat, nihil reale deprehendatur.

Deinde in Arithmetica, numerus ſimplex addi poteſt aut detrahi plano, ſicuti etiam planus ſolido, quia & ſi formaliter ſint diuerſi generis, tamen ſecundùm realitatem ſiſtunt intra idem genus, atque ideo faciunt maius aut minus quid piam, prout adduntur vel ſub trahuntur. At vero linea ne detrahi quidem plano poteſt ſecundum rem, aut addi, quia quod planum non eſt ſecundum rem, planum maius aut minus facere nequit. Idem dic de plano reſpectu ſolidi, ob eamdem rationem.

Præterea, in numeris ſolidum ad planum habet proportionem, ſiquidem planus numerus aliquoties multiplicatus, poteſt æquare & ſuperare ſolidum: vt experientia conſtat, licet enim 4 ſit quadratus, & 8 cubus, tamen ſi 4 ſexies replicentur, fient 24, qui numerus ſecundum rem maior eſt 8. ergo 4 ad 8 habet rationem. At vero in Geometricis, linea etiam in infinitum replicata, numquam adequabit planam ſuperficiem; igitur per definitionem quintam Libri quinti Euclidis, inter eas quantitates nulla eſt ratio.

Reſtat itaque vt non omnes Diophanti Quæſtiones Geometricè perfici poſſint, ſed tantum aliquæ: nimirum illæ, quæ proportionem

duo quadrati quæſiti ſunt 49 & 9.

579 19

Vides totum Diophantum Arithmeticum eſſe: vnde non immerito quiſpiam mirari poteſt, cur ego ipſi cognomen Geometræ indiderim. Hic tandem aperiendus eſt huius operis ſcopus, qui eò tendit, vt quod Diophantus in numeris perficit, id in Geometria efficiatur, Nolim tamen tibi perſuadeas illud à me vniuerſim adeò promitti, vt nulla prorſus quæſtio excipiatur, ſi enim attentè hunc Authorem legiſti, aduerteris procul dubio duplicis generis quæſtiones ab ipſo proponi: aliæ enim Geometricis legibus expediri poſſunt, aliæ nullomodo, nè à peritiſſimo quidem Geometra, non quod ars ipſa manca ſit & deficiens, ſed quia ipſum obiectum inuoluit contradictionem. Talis eſt quæſtio quarta libri tertij qua imperatur inueniri tres quantitates tales, vt quælibet quadrato ſummæ illarum multata, faciat quadratum: quis enim poſſit tollere quadratum à linea? deinde & ſi illud fieri poſſet, quonam modo remaneret & quadratum?

Simili ratione deprehendes repugnare in Geometria, quæſtionem quintam Libri ſecundi, qua iubetur quæri duos numeros, tales vt interuallum quadratarum ad ſummam numerorum, datam habeat rationem: hoc in quam inuoluit contradictionem, quia in Geometria, interuallum quadratorum eſt ſuperficies, ſumma verò linearum eſt linea, repugnat autem ſuperficiam ad lineam habere proportionem, quia linea qnantumuis multiplicata ſuperficiem æquare aut ſuperare non poteſt.

Non aliter deprehendetur quæſtionem decimam quartam libri primi inuoluere contradictionem in Geometria, ſiquidem illic quæruntur duo numeri tales, vt productus ex eorum multiplicatione ad eorum ſummam datam habeat rationem: cæcutit plane, qui non videt repugnantiam ſecundum, leges Geometricas: nam vel quantitates quæſitæ erunt lineæ, vel plana, vel ſolida: vel partim lineæ, & partim plana aut ſolida. Si ſint lineæ, productus illarum erit ſuperficies, ſumma autem erit linea, implicat verò ſuperficiem ad lineam habere proportionem: ſi ſint plana, productus erit quantitas, imaginaria, & ſumma erit planum: fieri autem nequit, vt quantitas imaginarià ad planum reale proportionem habeat: idem dicendum

deſolidis à fortiori, quia ſcanderetur ad ſextum vſque gradum për multiplicationem,& ſiſteretur in tertio gradu,per additionem. Quod ſi quantitates quæſitæ ſint linea & planum, producetur ſolidum, nulla autem fiet additio, quia non poteſt addi linea cum plano, idemque aſſerendum de plano reſpectu ſolidi. Ergo hæc quæſtio Diophanti repugnat in Geometrica.

Quod de tribus illis quæſtionibus dictum ëſt, poteſt dici de centum & nouemdecim per totum opus prædicti Authoris ſparſis, quæ licet in Arithmetica ſoluantur, Geometricè tamen ſunt inſolubiles. Cuius quidem differentiæ ratio eſt, quia nullus eſt numerus ſiue linearis, ſiue planus, ſiue ſolidus, qui per alium numerum multiplicari non poſſit tali ratione, vt productus ex ea multiplicatione ortus ſit realis: vnde in Arithmetica ſcandi poteſt ad quotlibet gradus per multiplicationem: at verò ſunt aliquæ quantitates in Geometria quæ per aliam multiplicatæ, non niſi imaginarium quid producunt: vt ſi ducas ſolidum in lineam, aut ſuperficiem in ſolidum, cum enim ſint tantùm tres dimentiones, nempe longitudo, latitudo & profunditas, fit vt in Geometrià vltra Corpus, quod tribus illis dimenſionibus conſtat, nihil reale deprehendatur.

Deinde in Arithmetica, numerus ſimplex addi poteſt aut detrahi plano, ſicuti etiam planus ſolido, quia & ſi formaliter ſint diuerſi generis, tamen ſecundum realitatem ſiſtunt intra idem genus, atque ideo faciunt maius aut minus quid piam, prout adduntur vel ſub trahuntur. At vero linea ne detrahi quidem plano poteſt ſecundum rem, aut addi, quia quod planum non eſt ſecundum rem, planum maius aut minus facere nequit. Idem dic de plano reſpectu ſolidi, ob eamdem rationem.

Præterea, in numeris ſolidum ad planum habet proportionem, ſiquidem planus numerus aliquoties multiplicatus, poteſt æquare & ſuperare ſolidum: vt experientia conſtat, licet enim 4 ſit quadratus, & 8 cubus, tamen ſi 4 ſexies replicentur, fient 24, qui numerus ſecundum rem maior eſt 8. ergo 4 ad 8 habet rationem. At vero in Geometricis, linea etiam in infinitum replicata, numquam adequabit planam ſuperficiem; igitur per definitionem quintam Libri quinti Euclidis, inter eas quantitates nulla eſt ratio.

Reſtat itaque vt non omnes Diophanti Quæſtiones Geometricè perfici poſſint, ſed tantum aliquæ: nimirum illæ, quæ proportionem

duntaxat requirunt inter quantitates eiuſdem generis, ſicut & additionem aut ſubtractionem, & quarum productus vltra tertium gradum non progreditur. Quare nunc nihil incumbit, vt ea tantùm problemata aggrediar quæ iſtius modi ſunt: & quoniam ex illis problematibus aliqua ſunt facilima, quæ vel ab eo perfici poſſunt abſque moleſtia, qui mediocriter in Geometrià verſatus erit, ea reiecimus in appendicem Libri primi, nobiſque ſatis eſſe iudicauimus, indicare qua methodo effici poſſent: alia vero Omnia quæ ſunt grauioris momenti aut quibus ſubeſt aliqua diffidultas, in ipſo libro primo abſoluimus.

Adiecimus Librum ſecundum, quem Diophantum Geometram Promotum appellauimus, ſicut olim Marinus Ghetaldus opuſculum ſuum nominauit Archimedem Promotum: & in eo plurima inſerimus, quæ ad Geometriæ faciunt incrementum, neque enim illud duntaxat nobis eo in negotio propoſitum fuit, vt quæſtiones nouas prioribus difficiliores ſolueremus, ſed etiam vt cæteris viam aperiremus, qua vlterius, cum ipſis libuerit, progredi poſſint. Praxibus adnectimus demonſtrationes ex Euclidianis petitas fontibus, quos proinde ſupponimus, vt Geometriæ Elementa. Iudicaueram ſatis eſſe, ſi vel per Algebram ſpecioſam, vel per Numericam problemata ſoluerentur: verum placuit nonnullis, vt vtramque adhiberemus: quod ego illorum iudicio detuli. vt cuilibet pro guſtu ſuo ſatiſfiat. Et quoniam nulla eſt quæſtio apud Diophantum, in qua non occurrat aliqua æquatio, lubet paulo altius ex ipſa origine doctrinam de æquationibus repetere, vt nihil ſit quod Algebræ ſtudioſum remorari poſſit.

Doctrina de Æquationibus Diophantais.

VEl igitur occurrit æquatio inter numeros ſimplices, vel inter cõpoſitos: ſi inter ſimplices, vel illi ſunt collaterales. Si inter compoſitos, vel compoſitio ſe tenet ex vtraque parte æquationis vel ex vna tantum. Si compoſitio ſe tenet ex vna duntaxat parte, vel numerorum exponentes ſeruant proportionem arithmeticam, vel non. Si compoſitio reperitur in vtraque parte æquationes, vel ſunt numeri abſoluti cum radicibus, vel cum quadratis. De his omnibus caſibus diſcurrendum in præſenti, & oſtendendum quomodo æqua-

tio ſi reſolubilis eſt, reſolui poſſit, ſiſtendo tamen intra limites Diophantæos.

Æquatio inter numeros ſimplices collaterales.

HÆc æquatio reſoluitur diuidendo numerum minoris gradus, per numerum gradus maioris: quotiens enim ex hibet valorem radicis. Vt ſi 8 A æquentur numero abſoluto 56, diuide 56 per 8, & fit quotiens 7 pro valore A. Ratio huius rei petitur ex regula trium nam ſi 8 A dant 56, ſequitur quod 1 A dat 7. Non aliter, ſi 10 A A A æquentur 30 A A. diuidendo 30 per 10, fiet quotiens 3 pro valore A. Enimuerò ſi duo æqualia diuidantur per communem aliquem diuiſorẽ orientur duo quotientes æquales. Igitur ſi diuidas vtramque æquationis partem per 10 A A, fient A & 3 æquales, quod eſt propoſitum.

Æquatio inter numeros ſimplices non collaterales.

VOco numeros non collaterales, eos qui ſeſe ſuperant pluribus gradibus: tales ſunt numeri abſoluti & quadrata; vel cubi. Item cubi & radices. Item quadrata & quadrato --- cubi. & ſic de cæteris. Tunc autem reſoluitur æquatio per hypobibaſmum, & per diuiſionem: ſi enim deprimas characteres more conſueto, & quem olim tradidimus in Epitome Præceptorum Algebricorum, & præterea diuidas numerum minori affectum gradu per numerum maiori gradu affectum, habebis valorem radicis. vel in quotiente, vel in quotientis radice Vt ſi 3 A A A æquentur 27 A: per hypobibaſmum fiunt 3 A A æqualia 27. deinde per diuiſionem 27 per 3 fiunt 9 æquales 1 A A. Igitur extrahendo radicem quadratam ex 9, fient 3 æquales A. Rurſus ſi 20 æquentur 4 A A. diuide 20 per 4, erit quotiens 5. ergo propter characterem quadrati, fiet A æqualis ℞ 5.

Æquatio inter numerum ſimplicem, & numerum compoſitum.

HViuſmodi æquatio reſoluitur per reductionem, diuiſionem, & & extractionem radicis. Hæc autem extractio non eſt vulgaris illa quæ ab Arithmeticis traditur, ſed ſubtilior quædam præcepto

duntaxat requirunt inter quantitates eiuſdem generis, ſicut & additionem aut ſubtractionem, & quarum productus vltra tertium gradum non progreditur. Quare nunc nihil incumbit, vt ea tantùm problemata aggrediar quæ iſtius modi ſunt: & quoniam ex illis problematibus aliqua ſunt facilima, quæ vel ab eo perfici poſſunt abſque moleſtia, qui mediocriter in Geometrià verſatus erit, ea reiecimus in appendicem Libri primi, nobiſque ſatis eſſe iudicauimus, indicare qua methodo effici poſſent: alia vero Omnia quæ ſunt grauioris momenti aut quibus ſubeſt aliqua diffidultas, in ipſo libro primo abſoluimus.

Adiecimus Librum ſecundum, quem Diophantum Geometram Promotum appellauimus, ſicut olim Marinus Ghetaldus opuſculum ſuum nominauit Archimedem Promotum: & in eo plurima inſerimus, quæ ad Geometriæ faciunt incrementum, neque enim illud duntaxat nobis eo in negotio propoſitum fuit, vt quæſtiones nouas prioribus difficiliores ſolueremus, ſed etiam vt cæteris viam aperiremus, qua vlterius, cum ipſis libuerit, progredi poſſint. Praxibus adnectimus demonſtrationes ex Euclidianis petitas fontibus, quos proinde ſupponimus, vt Geometriæ Elementa. Iudicaueram ſatis eſſe, ſi vel per Algebram ſpecioſam, vel per Numericam problemata ſoluerentur: verum placuit nonnullis, vt vtramque adhiberemus: quod ego illorum iudicio detuli. vt cuilibet pro guſtu ſuo ſatiſfiat. Et quoniam nulla eſt quæſtio apud Diophantum, in qua non occurrat aliqua æquatio, lubet paulo altius ex ipſa origine doctrinam de æquationibus repetere, vt nihil ſit quod Algebræ ſtudioſum remorari poſſit.

Doctrina de Æquationibus Diophantais.

VEl igitur occurrit æquatio inter numeros ſimplices, vel inter cõpoſitos: ſi inter ſimplices, vel illi ſunt collaterales. Si inter compoſitos, vel compoſitio ſe tenet ex vtraque parte æquationis vel ex vna tantum. Si compoſitio ſe tenet ex vna duntaxat parte, vel numerorum exponentes ſeruant proportionem arithmeticam, vel non. Si compoſitio reperitur in vtraque parte æquationes, vel ſunt numeri abſoluti cum radicibus, vel cum quadratis. De his omnibus caſibus diſcurrendum in præſenti, & oſtendendum quomodo æqua-

tio ſi reſolubilis eſt, reſolui poſſit, ſiſtendo tamen intra limitẽs Diophantæos.

Æquatio inter numeros ſimplices collaterales.

HÆc æquatio reſoluitur diuidendo numerum minoris gradus, per numerum gradus maioris: quotiens enim ex hibet valorem radicis. Vt ſi 8 A æquentur numero abſoluto 56, diuide 56 per 8, & fit quotiens 7 pro valore A. Ratio huius rei petitur ex regula trium nam ſi 8A dant 56, ſequitur quod 1A dat 7. Non aliter, ſi 10 A A A æquentur 30AA. diuidendo 30 per 10, fiet quotiens 3 pro valore A. Enimuerò ſi duo æqualia diuidantũr per communem aliquem diuiſoré orientur duo quotientes æquales. Igitur ſi diuidas vtramque æquationis partem per 10 A A, fient A & 3 æquales, quod eſt propoſitum.

Æquatio inter numeros ſimplices non collaterales.

VOco numeros non collaterales, eos qui ſeſe ſuperant pluribus gradibus: tales ſunt numeri abſoluti & quadrata; vel cubi. Item cubi & radices. Item quadrata & quadrato-cubi. & ſic de cæteris. Tunc autem reſoluitur æquatio per hypobibaſmum, & per diuiſionem: ſi enim deprimas characteres more conſueto, & quem olim tradidimus in Epitome Præceptorum Algebricorum, & prætereà diuidas numerum minori affectum gradu per numerum maiori gradu affectum, habebis valorem radicis. vel in quotiente, vel in quotientis radice Vt ſi 3 A A A æquentur 27A: per hypobibaſmum fiunt 3 A A æqualia 27. deinde per diuiſionem 27 per 3 fiunt 9 æquales 1 A A. Igitur extrahendo radicem quadratam ex 9, fient 3 æquales A. Rurſus ſi 20 æquentur 4 A A. diuide 20 per 4, erit quotiens 5. ergo propter characterem quadrati, fiet A æqualis ℞5.

Æquatio inter numerum ſimplicem, & numerum compoſitum.

HViuſmodi æquatio reſoluitur pér reductionem, diuiſionem, & & extractionem radicis. Hæc autem extractio non eſt vulgaris illa quæ ab Arithmeticis traditur, ſed ſubtilior quædam præcepto

ſequenti comprehenſa. Dimidium numeri radicum ſume: huius dimidij quadrato adde vel ſubtrahe numerum abſolutum, prout ſigno † vel -- afficitur: ſummæ vel reſidui radix quadrata aucta vel multata dimidio numeri radicum, ſecundum conditionem ſuam, exhibebit valorem radicis.

Vt ſi 7 A A --- 14 A reperiantur æquari 168, fiet reductio per metatheſim tali ratione vt relinquatur ſolus maior character coſſicus: vnde in hoc exemplo erunt 7 A A æqualia 168 † 14 A. Deinde diuidentur ſingula per numerum maioris characteris coſſici, qui in noſtro exemplo eſt 7. atque ita poſt diuiſionem, exiſtet 1 A A æquale 24 † 2 A. Hinc procedes ad extractionem radicis hoc modo: dimidium numeri radicum eſt 1, cuius quadratum 1 additum numero abſoluto 24, facit ſummam 25, huius radix quadrata 5 aucta dimidio numeri radicum 1, facit 6 pro valore radicis A.

Aduerte hactenus non eſſe inuentam methodū. vniuerſalem pro omnibus tùm integris, tùm fractis, tùm ſurdis, niſi exponentes trium numerorum æquationem componentium, ſeruent proportionem arithmeticam, iuxta aliquam complicationem.

Æquatio numeri compoſiti cum quadrato.

HÆc æquatio non eſt reſolubilis niſi alter duorum numerorum ſimplicium, qui faciunt compoſitum, ſit quadratus: cum vero vnus eorum quadratus eſt, facile poteſt reſolui.

Vt ſi iubeatur quis æquare numerum 16 † 8A quadrato. Debet fingi latus illas ex duobus ſimplicibus, quorū vnus ſit latus 16 nempe 4. alter autem fingetur aliquot radicum, & ne incidas in æquationem impoſſibilem, numerus ille radicum non debet eſſe 1A cum ſigno †, ſic enim prædicti quadrati latus foret 4 † 1A, quod eſt impoſſibile, ſiquidem huius poſterioris quadratum eſt 16 † 1 A A † 8A, quod nullatenus æquari poteſt 16 † 8A, cum conſtet vel ex ipſa inſpectione poſteriorem hunc numerum 16 † 8A, priore 16 † 1A A † 8A eſſe minorem. Quare prior numerus datus æquari debet quadrato cuius latus ſit 4 cum defectu vnius vel plurium radicum, pro libito puta 4 -- 2A. huius enim quadratum 16 † 4 A A -- 16A æquatim 16 † 8A, dabit 6 pro valore radicis. Nam ſublatis vtrobique 16, & additis vtrobique 16 A, fient 4 A A æquales 24A, numeri

collaterales, ac proinde A æquatur 6, per ea quæ prius dicta ſunt. Et hoc manifeſtum eſt nam ſi A eſt 6 erunt 8A æquales 48, qui cum 16, facit quadratum 64. Quod ſi velles radicem aſſumptam habere ſignum †, deberet illa radix eſſe minor 1A. ſic potuit ſumi 4 cum defectu dimidiæ vnitatis pro latere quadrati æquandi 16 † 8A, & in eo caſu reperiretur 16 pro valore radicis. Quod patet, nam ſic 8A æquarentur 128, qui cum 16, faceret quadratum 144. atque ita patet infinitè poſſe reſolui numerum datum, & ſatisfieri propoſitio.

Non alitèr rem abſolues ſi numerus coſſicus ſit quadratus. Vt ſi detur 4 A A † 29 æquandus quadrato. Finges latus illius quadrati 2A † 1. ergo huius quadratum 4 A A † 1 † 4A æquale eſt 4AA. † 29. ſublatiſque vtrinque 4 A A † 1, reſtabunt 4 A æquales 28 & ſit A æqualis 7. cuius quadruplum quadratum 196 additum 29, facit quadratum 225. Quod ſi volueris adnectere numerum abſolutum cum ſigno †, oportebit vt eius quadratum ſuperet 29.

Pari ratione, negotium iſtud perfici poteſt ſi numerus quadratus habeat adiunctas radices vel numerum abſolutum cum ſigno --.

Æquatio duplicata, quæ ſæpe occurrit apud Diophantum.

Est inuentio numeri, qui ſumptus pro valore radicis, ſatisfacit vtrique parti æquationis. De illa dari poteſt hoc præceptum vniuerſale.

Cape duos numeros producentes differentiam numerorum coſſicorum compoſitorum : horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur maiori, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquetur minori, & fiet vtrobique idem valor radicis qui quæritur.

Exempli cauſa, ſi quæratur numerus qui additus 5 & 29 faciat duos quadratos. Pones pro illo numero A. ergo A † 5 & A † 29 æquantur quadrato eſt que æquatio duplicata differentiam horum duorum numerorum eſt 24 hæc differentia producitur à duobus 2. & 12 ductis inuicem. quare horum producentium ſumma & differentia ſunt 14 & 10. horum ſemiſſes 7 & 5. quadrata ſemiſſium 49 & 25. igitur vel 49 æquetur maiori A † 29. vel 25 æquetur minori A † 5 & prodibit vtrobique valore radicis 20. quo addito 5 & 29 fiunt duo quadrati 25 & 49.

ſequenti comprehenſa. Dimidium numeri radicum ſume: huius dimidij quadrato adde vel ſubtrahe numerum abſolutum, prout ſigno † vel -- afficitur: ſummæ vel reſidui radix quadrata aucta vel multata dimidio numeri radicum, ſecundum conditionem ſuam, exhibebit valorem radicis.

Vt ſi 7 A A --- 14 A reperiantur æquari 168, fiet reductio per metatheſim tali ratione vt relinquatur ſolus maior character coſſicus: vnde in hoc exemplo erunt 7 A A æqualia 168 † 14 A. Deinde diuidentur ſingula per numerum maioris characteris coſſici, qui in noſtro exemplo eſt 7. atque ita poſt diuiſionem, exiſtet 1 A A æquale 24 † 2 A. Hinc procedes ad extractionem radicis hoc modo: dimidium numeri radicum eſt 1, cuius quadratum 1 additum numero abſoluto 24, facit ſummam 25, huius radix quadrata 5 aucta dimidio numeri radicum 1, facit 6 pro valore radicis A.

Aduerte hactenus non eſſe inuentam methodū. vniuerſalem pro omnibus tùm integris, tùm fractis, tùm ſurdis, niſi exponentes trium numerorum æquationem componentium, ſeruent proportionem arithmeticam, iuxta aliquam complicationem.

Æquatio numeri compoſiti cum quadrato.

HÆc æquatio non eſt reſolubilis niſi alter duorum numērorum ſimplicium, qui faciunt compoſitum, ſit quadratus: cum vero vnus eorum quadratus eſt, facile poteſt reſolui.

Vt ſi iubeatur quis æquare numerum 16 † 8A quadrato. Debet fingi latus illas ex duobus ſimplicibus, quorū vnus ſit latus 16 nempe 4. alter autem fingetur aliquot radicum, & ne incidas in æquationem impoſſibilem, numerus ille radicum non debet eſſe 1A cum ſigno †, ſic enim prædicti quadrati latus foret 4 † 1A, quod eſt impoſſibile, ſiquidem huius poſterioris quadratum ēſt 16 † 1 A A † 8A, quod nullatenus æquari poteſt 16 † 8A, cum conſtet vel ex ipſa inſpectione poſteriorem hunc numerum 16 † 8A, priore 16 † 1A A † 8A eſſe minorem. Quare prior numerus datus æquari debet quadrato cuius latus ſit 4 cum defectu vnius vel plurium radicum, pro libito puta 4 -- 2A. huius enim quadratum 16 † 4 A A -- 16A æquatim 16 † 8A, dabit 6 pro valore radicis. Nam ſublatis vtrobique 16, & additis vtrobique 16 A, fient 4 A A æquales 24A, numeri

6

collaterales, ac proinde A æquatur 6, per ea quæ prius dicta ſunt. Et hoc manifeſtum eſt nam ſi A eſt 6 erunt 8A æquales 48, qui cum 16, facit quadratum 64. Quod ſi velles radicem aſſumptam habere ſignum †, deberet illa radix eſſe minor 1A. ſic potuit ſumi 4 cum defectu dimidiæ vnitatis pro latere quadrati æquandi 16 † 8A, & in eo caſu reperiretur 16 pro valore radicis. Quod patet, nam ſic 8A æquarentur 128, qui cum 16, faceret quadratum 144. atque ita patet infinitè poſſe reſolui numerum datum, & ſatisfieri propoſitio.

Non aliter rem abſolues ſi numerus coſſicus ſit quadratus. Vt ſi detur 4 A A † 29 æquandus quadrato. Finges latus illius quadrati 2A † 1. ergo huius quadratum 4 A A † 1 † 4 A æquale eſt 4AA. † 29. ſublatiſque vtrinque 4 A A † 1, reſtabunt 4 A æquales 28 & ſit A æqualis 7. cuius quadruplum quadratum 196 additum 29, facit quadratum 225. Quod ſi volueris adnectere numerum abſolutum cum ſigno †, oportebit vt eius quadratum ſuperet 29.

Pari ratione, negotium iſtud perfici poteſt ſi numerus quadratus habeat adiunctas radices vel numerum abſolutum cum ſigno--.

Æquatio duplicata, quæ ſæpe occurrit apud Diophantum.

ESt inuentio numeri, qui ſumptus pro valore radicis, ſatisfacit vtrique parti æquationis. De illa dari poteſt hoc præceptum vniuerſale.

Cape duos numeros producentes differentiam numerorum coſſicorum compoſitorum : horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur maiori, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquetur minori, & fiet vtrobique idem valor radicis qui quæritur.

Exempli cauſa, ſi quæratur numerus qui additus 5 & 29 faciat duos quadratos. Pones pro illo numero A. ergo A † 5 & A † 29 æquantur quadrato eſt que æquatio duplicata differentiam horum duorum numerorum eſt 24 hæc differentia producitur à duobus 2. & 12 ductis inuicem. quare horum producentium ſumma & differentia ſunt 14 & 10. horum ſemiſſes 7 & 5. quadrata ſemiſſium 49 & 25. igitur vel 49 æquetur maiori A † 29. vel 25 æquetur minori A † 5 & prodibit vtrobique valore radicis 20. quo addito 5 & 29 fiunt duo quadrati 25 & 49.

Rurſus, ſi quæratur numerus à quo detractus *3* & *35* fiant quadrati. Pone A pro illo numero. Igitur A -- *3* & A -- *35* æquantur quadrato tolle minorem A -- 35 à maiore A -- *3*. differentia eſt *32*, quàm producunt 2 & *16*. horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus 81 æquetur maiori A -- *3*. vel horum producentium differentiæ ſemiſſis quadratus *49* æquetur minori A -- *35*. & prodibit vtrobique 84 pro valore radicis, quo multato *3* & *35* relinquentur quadrati quæſiti 81 & *49*. denique quoties reperitur idem numerus radicum cum vnitatibus facile reſoluetur duplicata æqualitas ſiue numerus vnitatum afficiatur ſigno † ſiue ſigno --. ſic reſolues *3* A -- *6* & *3* A -- 11. ſic reſolues 20 -- *3* R & 1*3* R. ſic reſolues *3* R † 7 & *3* R -- 18. ſi tamen radices afficiantur diuerſis ſignis vt *3* † A & 22 -- A non facilè reſoluitur.

Alter Caſus, eſt dum datur diuerſus numerus radicum & numerus vnitatum eſt quadratus & tunc eodem modo ſoluitur duplicata æqualitas aduerte tamen alterum ex duobus producentibus debere tunc eſſe duplum lateris quadrati vnitatum. vt ſi detur 8 A † 4 & *6* R † 4 differentia eſt 2 A & quia latus quadrati 4 eſt 2 cuius duplum 4 debet vnus ex producentibus eſſe 4 alter vero habetur diuidendo 2 A per *4* eſtque 1 A. horum ſummæ ſemiſſis quadratus

2

æquētur 8 A † 4 vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquētur *6* A † 4. & fiet vtrobique idem valor radicis 112.

Rurſus, idem fiet ſi quadratus vnitatum ſit inæqualis: vt ſi dentur 10 A † *9* & 5 A † 4 duces priorē in 4 quadratū poſterioris & fiet 40 A † *36*. ſimiliterque duces poſteriorem in *9* quadratum prioris & fiet 45 A † *36* & tunc fit caſus præcedens. cape igitur duos producentes 5 A quorum vnus ſit 12 (duplum lateris quadrati vnitum *36*) horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus maiori 45 A † *36* vel differentiæ ſemiſſis quadratus æquatus minori 40 A † *36* dat pro valore radicis 48*96*. Quare in poſterioribus nu-

5

meris quadrati erunt 44100 & *39*204. in prioribus vero *98*01 & *4960*.

Tertius Caſus eſt cum numeri radicum & vnitatum ſunt inæquales, & vnitates non faciunt quadratum ſed numeri radicum ſe ha-

bẽt ſicut quadratus ad quadratum. Vt ſi ſint quadrato æquandi 65†8A & 189†18A. Vides numerum 18 ad numerum 8 ſe habere ſicut quadratus 9 ad quadratum 4. Igitur ductis 65†8A in 9 fient 585 † 72A æquandi quadrato. Ductis autem 189†18A in 4 fient 756†72A æquandi quadrato. Reductus eſt ergo tertius ille caſus ad primum nam 585†72A & 756†72A æquari debent quadrato. Iſtorum differentia eſt 171 igitur duo producentes ſunt 171 & 1. ſummæ ſemiſſis quadratus 7396 æquetur maiori 756 †72A vel differentiæ ſemiſſis quadratus 7225 æquetur minori 585 † 72A, & prodibit vbique valor radicis 830.

9

Qartus Caſus eſt cum vterque compoſitorum numerorum habet radices & vnitates in æquales nec vnitatum numeri ſunt quadratis nec habent rationem quadrati ad quadratum. Tunc enim contingere poteſt ſolutio dupliciter.

Primò, cum numerorum quadrato æquandorum differentià talis eſt, vt ea per aliquem vnitatum numerum multiplicata aut diuiſa, & producto vel quotiente à minore propoſitorum numerorum detracto, ſupereſt vnitatum numerus quadratus. Vt ſi ſint quadrato æquandi 3A†13 & 1A†7. quia horum interuallum eſt 2A†6 quo diuiſo per 2 fit 1A†3, quem ſi tollas à minori 1A†7 reſtat numerus quadratus 4. ſic ſolues duplicatam æqualitatem. Conſidera tres terminos 3A † 13. & 1A†7. & 4 differentia duorum maiorum 2A†6 dupla eſt differentiæ duorum minorum 1A†3. quare quærendi duo numeri quadrati tales vt illorum differentia ſit dupla interualli quo minor illorum ſuperat 4. latus minoris ſit 1A † 2 (2 eſt latus quadrati 4) huius quadratum eſt 1AA † 4 † 4A. hinc tolle 4, reſtabit 1AA†4A. cuius duplum 2AA†8A additum prædicto quadrato 1AA†4†4A æquandum quadrato id autem multis modis fieri poteſt quia numerus abſolutus eſt quadratus. Si enim fingas latus 2 -- 2 A vel 2 -- 3 A deprehendes abſoluendo operationem 1444 & 484 vel 100 & 36 pro duobus quadratis quæſitis. Tales enim ſunt vt illorum differentia dupla ſit interualli quo minor quadratus ſuperat 4. igitur ſi minorem quadratum 484 (vel 36) æques minori numero dato 1A†7. fiet 477 vel (29) pro valore radicis.

Rurſus, ſi quæratur numerus à quo detractus 3 & 35 fiant quadrati. Pone A pro illo numero. Igitur A -- 3 & A -- 35 æquantur quadrato tolle minorem A -- 35 à maiore A -- 3. differentia eſt 32, quàm producunt 2 & 16. horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus 81 æquetur maiori A -- 3. vel horum producentium differentiæ ſemiſſis quadratus 49 æquetur minori A -- 35. & prodibit vtrobique 84 pro valore radicis, quo multato 3 & 35 relinquentur quadrati quæſiti 81 & 49. denique quoties reperitur idem numerus radicum cum vnitatibus facile reſoluetur duplicata æqualitas ſiue numerus vnitatum afficiatur ſigno † ſiue ſigno --. ſic reſolues 3 A -- 6 & 3 A -- 11. ſic reſolues 20 -- 3 R & 13 R. ſic reſolues 3 R † 7 & 3 R -- 18. ſi tamen radices afficiantur diuerſis ſignis vt 3 † A & 22 -- A non facilè reſoluitur.

Alter Caſus, eſt dum datur diuerſus numerus radicum & numerus vnitatum eſt quadratus & tunc eodem modo ſoluitur duplicata æqualitas aduerte tamen alterum ex duobus producentibus debere tunc eſſe duplum lateris quadrati vnitatum. vt ſi detur 8 A † 4 & 6 R † 4 differentia eſt 2 A & quia latus quadrati 4 eſt 2 cuius duplum 4 debet vnus ex producentibus eſſe 4 alter vero habetur diuidendo 2 A per 4 eſtque $\frac{1 A.}{2}$ horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur 8 A † 4 vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquetur 6 A † 4. & fiet vtrobique idem valor radicis 112.

Rurſus, idem fiet ſi quadratus vnitatum ſit inæqualis: vt ſi dentur 10 A † 9 & 5 A † 4 duces priorē in 4 quadratū poſterioris & fiet 40 A † 36. ſimiliterque duces poſteriorem in 9 quadratum prioris & fiet 45 A † 36 & tunc fit caſus præcedens. cape igitur duos producentes 5 A quorum vnus ſit 12 (duplum lateris quadrati vnitum 36) horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus maiori 45 A † 36 vel differentiæ ſemiſſis quadratus æquatus minori 40 A † 36 dat pro valore radicis $\frac{4896}{5}$. Quare in poſterioribus numeris quadrati erunt 44100 & 39204 in prioribus vero 9801 & 4960.

Tertius Caſus eſt cum numeri radicum & vnitatum ſunt inæquales, & vnitates non faciunt quadratum ſed numeri radicum ſe ha-

bent ſicut quadratus ad quadratum. Vt ſi ſint quadrato æquandi 65†8A & 189†18A. Vides numerum 18 ad numerum 8 ſe habere ſicut quadratus 9 ad quadratum 4. Igitur ductis 65†8A in 9 fient 585 † 72A æquandi quadrato. Ductis autem 189†18A in 4 fient 756†72A æquandi quadrato. Reductus eſt ergo tertius ille caſus ad primum nam 585†72A & 756†72A æquari debent quadrato. Iſtorum differentia eſt 171 igitur duo producentes ſunt 171 & 1. ſummæ ſemiſſis quadratus 7396 æquetur maiori 756 †72A vel differentiæ ſemiſſis quadratus 7225 æquetur minori 585 † 72A, & prodibit vbique valor radicis 830.

9

Qartus Caſus eſt cum vterque compoſitorum numerorum habet radices & vnitates in æquales nec vnitatum numeri ſunt quadrati nec habent rationem quadrati ad quadratum. Tunc enim contingere poteſt ſolutio dupliciter.

Primò, cum numerorum quadrato æquandorum differentià talis eſt, vt ea per aliquem vnitatum numerum multiplicata aut diuiſa, & producto vel quotiente à minore propoſitorum numerorum detracto, ſupereſt vnitatum numerus quadratus. Vt ſi ſint quadrato æquandi 3A†13 & 1A†7. quia horum interuallum eſt 2A†6 quo diuiſo per 2 fit 1A†3, quem ſi tollas à minori 1A†7 reſtat numerus quadratus 4. ſic ſolues duplicatam æqualitatem. Conſidera tres terminos 3A † 13. & 1A†7. & 4 differentia duorum maiorum 2A†6 dupla eſt differentiæ duorum minorum 1A†3. quare quærendi duo numeri quadrati tales vt illorum differentia ſit dupla interualli quo minor illorum ſuperat 4. latus minoris ſit 1A†2 (2 eſt latus quadrati 4) huius quadratum eſt 1AA † 4 † 4A. hinc tolle 4, reſtabit 1AA†4A. cuius duplum 2AA†8A additum prædicto quadrato 1AA†4†4A æquandum quadrato id autem multis modis fieri poteſt quia numerus abſolutus eſt quadratus. Si enim fingas latus 2 -- 2 A vel 2 -- 3 A deprehendes abſoluendo operationem 1444 & 484 vel 100 & 36 pro duobus quadratis quæſitis. Tales enim ſunt vt illorum differentia dupla ſit interualli quo minor quadratus ſuperat 4. igitur ſi minorem quadratum 484 (vel 36) æques minori numero dato 1A†7. fiet 477 vel (29) pro valore radicis.

Secundo

Secundò, cum numerorum quadrato æquandorum differentia talis eſt, vt per aliquem vnitatum numerum multiplicata aut diuiſa, & producto vel quotiente à minore propoſitorum numerorum detracto reſtet numerus, qui ad multiplicatorem aut diuiſionem ſe habeat vt quadratus ad quadratum, æqualitas eſt reſolubilis. Vt ſi ſint quadrato æquandi *6* A † 25 & 2 A † *3* horum differentia eſt 4 A † 22 diuiſa per 2, dat quotientem 2 A † 11, quo detracto à minore 2 A † 3 facit reſiduum -- 8, qui numerus 8 ad diuiſorem 2, eſt vt quadratus 4 ad quadratum 1. ſic operaberis. Conſidera tres numeros *6* A † 25 & 2 A † 3 & --- 8. maiorum differentia 4 A † 22 dupla eſt differentiæ duorum minorum 2 A † 11. igitur in quirendi duo quadrati quorum differentia ſit dupla interualli quo minor ſuperat -- 8. Ponatur minor quadratus 1 A A hinc ſublato -8, fit reſiduum 1 A A † 8. huius duplum 2 A A † *16* additum minori quadrato exhibet ſummam *3* A A † *16* æquandam quadrato. id autem fieri poteſt multis modis. Finge latus *4* -- *3* A (4 eſt latus *16*) ergo quadratum eius *16* † *9* A A -- 24 A æquatur *3* A A † *16*. & fit 1 A æqualis 4. quadrati autem quæſiti 16 & *6*4. vnde ſi æques 16 minori dato 2 A † *3*. vel *6*4 maiori dato *6* A † 25, fit vtrobique valor radicis $\frac{13}{2}$.

Quintus & vltimus caſus eſt cum propoſiti numeri quadrato æquandi, diuerſimode componnntur ex quadratis radicibus & vnitatibus. vt autem tunc reſolubilis ſit æqualitas nec eſſe eſt vt quadratorum vel vnitatum numerus ſit quadratus, deinde interuallum propoſitorum numerorum debet conſtare vna tantum aut duabus tantum ſpeciebus hunc caſum ſequentia exempla illuſtrabunt.

Exemplum, primũ ſint æquandi quadrato 4 A A † 3 A - 1 & 4 A A † 4- A -- 1 horum differentia eſt 1 A. elige duos producentes hanc differentiam tales, vt in altero eorum reperiatur duplum lateris quadratorum 2 A. duo itaque producentes erunt 4 A & $\frac{1}{4}$. horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur maiori, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquetur minori, & fiet 1 A æqualis $\frac{65}{224}$.

Exemplum ſecundum. Sint æquandi quadrato 4AA -- 1A -- 4 & 4AA † 15A. horum differentia eſt 16A † 4. producentes erunt 4 & 4A † 1 (4A eſt duplum lateris quadratorum) ergo vel horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus maiori, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquatus minori, dabit valorem radicis $\frac{5}{4}$.

Exemplum Tertium. Sint quadrato æquandi 12 & 13A -- 12. eo-
2
rum differentia eſt 1 AA -- $\frac{13A}{2}$ quare producentes hanc differentiam eligi debẽt tales, vt in earum ſumma ſint 2A (duplum lateris quadrati). erunt ergo producentes 1A & 1A -- $\frac{13}{2}$. horum producẽtium ſummæ ſemiſſis quadratus, æquatus maiori, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquatus minori, dabit valorem radicis $\frac{361}{104}$.

Exemplum quartum. Sint quadrato æquãdi 1AA † 1A -- 1 & 1Q -- 1. horum differentia eſt 1A. producentes erunt 1 & $\frac{2A}{2}$. ergo vel horum producẽtium ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus maiori, vel differentiæ ſemiſſis quadratus æquatus minori dabit valorem radicis $\frac{17}{8}$.

Atque hæc ſatis ſunto, qui plura volet conſulat Bachẽtum in commentarius Diophanti à quo iſta deſcripſimus, ne quid hinc operi de eſſe videatur. Quoniam verò huius vltimæ praxeos tàm vtilis & tam crebrò repetitæ demonſtrationem omiſit; lubet eam hic paucis explicare.

Secundò, cum numerorum quadrato æquandorum differentia talis eſt, vt per aliquem vnitatum numerum multiplicata aut diuiſa, & producto vel quotiente à minore propoſitorum numerorum detracto reſtet numerus, qui ad multiplicatorem aut diuiſionem ſe habeat vt quadratus ad quadratum, æqualitas eſt reſolubilis. Vt ſi ſint quadrato æquandi $6A + 25$ & $2A + 3$ horum differentia eſt $4A + 22$ diuiſa per 2, dat quotientem $2A + 11$, quo detracto à minore $2A + 3$ facit reſiduum $-- 8$, qui numerus 8 ad diuiſorem 2, eſt vt quadratus 4 ad quadratum 1. ſic operaberis. Conſidera tres numeros $6A + 25$ & $2A + 3$ & $-- 8$. maiorum differentia $4A + 22$ dupla eſt differentiæ duorum minorum $2A + 11$. igitur inquirendi duo quadrati quorum differentia ſit dupla interualli quo minor ſuperat $-- 8$. Ponatur minor quadratus $1AA$ hinc ſublato -8, ſit reſiduum $1AA + 8$. huius duplum $2AA + 16$ additum minori quadrato exhibet ſummam $3AA + 16$ æquandam quadrato. id autem fieri poteſt multis modis. Finge latus $4 -- 3A$ (4 eſt latus 16) ergo quadratum eius $16 + 9AA -- 24A$ æquatur $3AA + 16$. & fit $1A$ æqualis 4. quadrati autem quæſiti 16 & 64. vnde ſi æques 16 minori dato $2A + 3$. vel 64 maiori dato $6A + 25$, fit vtrobique valor radicis $\frac{13}{2}$.

Quintus & vltimus caſus eſt cum propoſiti numeri quadrato æquandi, diuerſimode componnntur ex quadratis radicibus & vnitatibus. vt autem tunc reſolubilis ſit æqualitas nec eſſe eſt vt quadratorum vel vnitatum numerus ſit quadratus, deinde interuallum propoſitorum numerorum debet conſtare vna tantum aut duabus tantum ſpeciebus hunc caſum ſequentia exempla illuſtrabunt.

Exemplum, primû ſint æquandi quadrato $4AA + 3A - 1$ & $4AA + 4A -- 1$ horum differentia eſt $1A$. elige duos producentes hanc differentiam tales, vt in altero eorum reperiatur duplum lateris quadratorum $2A$. duo itaque producentes erunt $4A$ & $\frac{1}{4}$. horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur maiori, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquetur minori; & fiet $1A$ æqualis $\frac{65}{224}$.

ũ

Exemplum ſecundum. Sint æquandi quadrato 4 A A -- 1 A -- 4 & 4 A A + 15 A. horum differentia eſt 16 A + 4. producentes erunt 4 & 4 A + 1 (4 A eſt duplum lateris quadratorum) ergo vel horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus maiori, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquatus minori, dabit valorem radicis $\frac{5}{4}$.

Exemplum Tertium. Sint quadrato æquandi 12 & $\frac{13}{2}$A -- 12. eorum differentia eſt 1 AA -- $\frac{13}{2}$A quare producentes hanc differentiam eligi debent tales, vt in earum ſumma ſint 2 A (duplum lateris quadrati). erunt ergo producentes 1A & 1A -- $\frac{13}{2}$. horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus, æquatus maiori, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquatus minori, dabit valorem radicis $\frac{361}{104}$.

Exemplum quartum. Sint quadrato æquandi 1 A A + 1 A -- 1 & 1 Q -- 1. horum differentia eſt 1 A. producentes erunt $\frac{1}{2}$ & 2 A. ergo vel horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus maiori, vel differentiæ ſemiſſis quadratus æquatus minori dabit valorem radicis $\frac{17}{8}$.

Atque hæc ſatis ſunto, qui plura volet conſulat Bachetum in commentarius Diophanti à quo iſta deſcripſimus, ne quid hinc operi deeſſe videatur. Quoniam verò huius vltimæ praxeos tàm vtilis & tam crebrò repetitæ demonſtrationem omiſit; lubet eam hic paucis explicare.

Si fuerint duo quadrata quæcumque quorum differentia æqualis ſit plano ſub duabus quantitatibus comprehenſo, erit quadratus ſemiſſis ſummæ illarum duarum quantitatum æqualis maiori quadrato, & quadratus ſemiſſis differentiæ earumdem quantitatem æqualis quadrato minori.

ESto enim, ſiue in lineis, ſiue in numeris, quadratum maius A B, & quadratum minus A C. Sumatur verò A D æqualis A C, & D E æqualis C B, erit rectangulum E C B æquale differentiæ quadratorum A B & A C, ſiquidem per quartam ſecundi Euclidis quadratum A B æquatur quadratis A C & C B & duplo rectanguli A C B. Duplum autem rectangulum A C B eſt æquale rectangulo D C B, quia D A ſumpta fuit æqualis A C. Rectangulũ verò E D in C B æquatur quadrato C B quia aſſumpta eſt E D æqualis C B. Igitur quadratum A B æquatur rectangulo E C B & quadrato A C. Ac proinde rectangulum E C B eſt differentia quadratorum A B & A C. Eſt autem duarum illarum quantitatum E C & C B ſemiſſis A B cuius quadratum æquatur maiori quadrato dato, & earumdem quantitatum differentia eſt D C, cuius ſemiſſis eſt A C habens quadratum æquale minori quadrato dato. Ergo &c. quod eſt propoſitum.

E...D..A..C...B

F G

21 1

Immò ſi capiantur duæ aliæ quantitates quæcumque F G, quarum rectangulum æquetur rectangulo E C B, quadrata ſummæ ſemiſſis, & ſemiſſis differentiæ illarum, different per rectangulum E C B. Quoniam enim F G rectangulum æquatur rectangulo E C B quadratum F --- G differet à quadrato F † G per quadruplum rectangulum E C B, ſiquidem quadratum F † G eſt F F † G G † 2 F G, quadratum vero F -- G eſt F F † G G -- 2 F G hoc poſterius ſi tollatur à priori remanet 4 F G ſed rectangulum F G æquatur rectangulo E C B. Igitur quadratum F † G differt à quadrato F -- G per quadruplũ rectangulum E C B. Ergo quadrans quadrati F † G (ſeu quadratum ſemiſſis ſummæ) differt à quadrante quadrati F --- G (ſeu à quadrato ſemiſſis differentiæ) per rectangulum

ECB. Ac proinde, ſi ſumantur duæ quantitates quæcumque quarum rectangulum æquetur rectangulo E C B, quadrata ſemiſſis ſummæ illarum & ſemiſſis differentiæ different per hoc idem rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

Igitur cum in præcedentibus praxibus habeatur differentia quantitatum quadrato æquandorum, & inueniantur duæ quantitates hanc differentiam producentes, & quadrata ipſa ſint de ſe indeterminata, rectè omnes huiuſmodi praxes procedunt, quod eſt propoſitum.

Si fuerint duo quadrata quæcumque quorum differentia æqualis ſit plano ſub duabus quantitatibus comprehenſo, erit quadratus ſemiſſis ſummæ illarum duarum quantitatum æqualis maiori quadrato, & quadratus ſemiſſis differentiæ earumdem quantitatem æqualis quadrato minori.

ESto enim, ſiue in lineis, ſiue in numeris, quadratum maius A B, & quadratum minus A C. Sumatur verò A D æqualis A C, & D E æqualis C B, erit rectangulum E C B æquale differentiæ quadratorum A B & A C, ſiquidem per quartam ſecundi Euclidis quadratum A B æquatur quadratis A C & C B & duplo rectanguli A C B. Duplum autem rectangulum A C B eſt æquale rectangulo D C B, quia D A ſumpta fuit æqualis A C. Rectangulũ verò E D in C B æquatur quadrato C B quia aſſumpta eſt E D æqualis C B. Igitur quadratum A B æquatur rectangulo E C B & quadrato A C. Ac proinde rectangulum E C B eſt differentia quadratorum A B & A C. Eſt autem duarum illarum quantitatum E C & C B ſemiſſis A B cuius quadratum æquatur maiori quadrato dato, & earumdem quantitatum differentia eſt D C, cuius ſemiſſis eſt A C habens quadratum æquale minori quadrato dato. Ergo &c. quod eſt propoſitum.

E...D..A..C...B

F G

21 1

Immò ſi capiantur duæ aliæ quantitates quæcumque F G, quarum rectangulum æquetur rectangulo E C B, quadrata ſummæ ſemiſſis, & ſemiſſis differentiæ illarum, different per rectangulum E C B. Quoniam enim F G rectangulum æquatur rectangulo E C B quadratum F --- G differet à quadrato F † G per quadruplum rectangulum E C B, ſiquidem quadratum F † G eſt F F † G G † 2 F G, quadratum vero F -- G eſt F F † G G -- 2 F G hoc poſterius ſi tollatur à priori remanet 4 F G ſed rectangulum F G æquatur rectangulo E C B. Igitur quadratum F † G differt à quadrato F -- G per quadruplũ rectangulum E C B. Ergo quadrans quadrati F † G (ſeu quadratum ſemiſſis ſummæ) differt à quadrante quadrati F --- G (ſeu à quadrato ſemiſſis differentiæ) per rectangulum

ECB. Ac proinde, ſi ſumantur duæ quantitates quæcumque quarum rectangulum æquetur rectangulo ECB, quadrata ſemiſſis ſummæ illarum & ſemiſſis differentiæ different per hoc idem rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

Igitur cum in præcedentibus praxibus habeatur differentia quantitatum quadrato æquandorum, & inueniantur duæ quantitates hanc differentiam producentes, & quadrata ipſa ſint de ſe indeterminata, rectè omnes huiuſmodi praxes procedunt, quod eſt propoſitum.

DIOPHANTI GEOMETRÆ.

LIBER PRIMVS.

IN QVO OMNES DIOPHANTI Alexandrini quæſtiones quæ Geometricè fieri poſſunt, tùm per Algebram communem, tùm etiam per ſpecioſam, & quod hic præſertim intendimus, per Geometriam abſoluuntur.

Propositio I.

Datam quantitatem diuidere in duas partes quarum datum ſit interuallum.

ESto datus numērus 100, quem oporteat diuiderē in duos, ita vt illorum interuallum ſit 40. Ponatur 1 R pro minore, ergo major erit 100 — 1 R, ex quo ſi tollas minorem, reſiduum 100 — 2 R debebit æquari dato interuallo 40. & proinde additis vtrobique 2 R, & ſubtractis vtrimque 40, erunt 2 R æquales 60. igitur 1 R eſt 30, cui ſi addas 40, extabit 70, pro majore. Aliter

potuit poni 1R pro majorē, ergo 100 — 1R erit minor, quem ſi tollas à majore reſiduum 2R — 100, æquabitur dato interuallo 40. Et poſt tranſpoſitionem debitam 2R æquantur 140. Ergo diuidendo 140 per 2, fit 1R ſiue major 70, à quo ſi tollas 40, habebis 30 pro minore.

Per Algebram ſpecioſam ſic inſtituetur operatio. Sit data quantitas diuidenda B & interuallum C. Ponatur A minor pars, ergo A+C erit major, quæ ſi addatur cum A, fient 2A+C æquales B, igitur $\frac{B-C}{2}$ æquatur A. Quod ſi majorē poſuiſſes A, fuiſſet minor A-C ergo 2A-C æquales eſſent B, ac proinde A æqualis extitiſſet $\frac{B+C}{2}$.

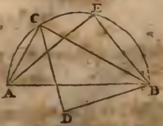
Hinc Canon.

Datæ quantitati diuidendæ adde vel detrahe interuallum datum: ſemiſſis ſummæ vel reſidui exhibebit duas partes quæſitas.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea AB in duas diuidenda partes, taliter vt partium differētia ſit BC. Producatur BA vſq; ad D, donec BA ſit æqualis BC, tùm diuidatur AC bifariā in E. Dico AE & EB eſſe partes quæſitas: cum enim D A E C B AC diuiſa ſit bifariàm in E erit AE æqualis EC, ergo EB differt ab AE per CB. Ac proinde tota AB diuiſa eſt in duas AE, EB, quarum datum ſit interuallum BC. Quod erat demonſtrandum. Idem contingit ſi datæ AB addas interuallum datum AD, & totam DB diuidas bifariàm in E.

Sit iam datum quadratum AB diuidendum in duas partes, quarum interuallum ſit quadratū AC. Supra AB fiat ſemicirculus in quo inſcribatur AC & nectatur CB tùm ſupra CB fiat triangulum rectangulum iſoſceles CDB, ſumptaque BE æquali BD, nectatur EA: dico duas partes quæſitas eſſe quadrata AE & EB: nam quadratū AB æquatur quadratis AC & CB, quia angulus C eſt in ſemicirculo, ac proinde rectus, ſed quadratum CB æquatur quadratis CD &



DB propter angulum rectum D igitur duo quadrata CD & DB cum quadrato AC æqualia ſunt quadrato AB. Sed cum triangulum CDB ſit iſoſceles, erit quadratum BD æquale quadrato CD, ergo

DIOPHANTI GEOMETRÆ, LIBER PRIMVS.

IN QVO OMNES DIOPHANTI Alexandrini quæſtiones quæ Geometricè fieri poſſunt, tùm per Algebram communem, tùm etiam per ſpecioſam, & quod hic præſertim intendimus, per Geometriam abſoluuntur.

PROPOSITIO I.

Datam quantitatem diuidere in duas partes quarum datum ſit interuallum.

ESto datus numerus 100, quem oporteat diuidere in duos, ita vt illorum interuallum ſit 40. Ponatur 1 R pro minore, ergo major erit 100 — 1 R, ex quo ſi tollas minorem, reſiduum 100 — 2 R debebit æquari dato interuallo 40. & proinde additis vtrobique 2 R, & ſubtractis vtrimque 40, erunt 2 R æquales 60. igitur 1 R eſt 30, cui ſi addas 40, extabit 70, pro majore. Aliter

potuit poni 1R pro majorẽ, ergo 100 — 1R erit minor, quem ſi tollas à majore reſiduum 2R — 100, æquabitur dato interuallo 40. Et poſt tranſpoſitionem debitam 2R æquantur 140. Ergo diuidendo 140 per 2, fit 1R ſiue major 70, à quo ſi tollas 40, habebis 30 pro minore.

Per Algebram ſpecioſam ſic inſtituetur operatio. Sit data quantitas diuidenda B & interuallum C. Ponatur A minor pars, ergo A+C erit major, quæ ſi addatur cum A, fient 2A+C æquales B, igitur $\frac{B-C}{2}$ æquatur A. Quod ſi majorẽ poſuiſſes A, fuiſſet minor A.-C ergo 2 A.-C æquales eſſent B, ac proinde A æqualis extitiſſet $\frac{B+C}{2}$.

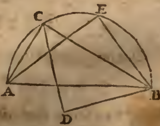
Hinc Canon.

Datæ quantitati diuidendæ adde vel detrahe interuallum datum: ſemiſſis ſummæ vel reſidui exhibebit duas partes quæſitas.

Hinc Effectio Geometrica.

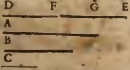
Sit data linea AB in duas diuidenda partes, taliter vt partium differẽtia ſit BC. Producatur BA vſq; ad D, donec BA ſit æqualis BC, tùm diuidatur AC bifariã in E. Dico AE & EB eſſe partes quæſitas: cum enim $\overline{\text{DA E CB AC}}$ diuiſa ſit bifariàm in E erit AE æqualis EC, ergo EB differt ab AE per CB, Ac proinde tota AB diuiſa eſt in duas AE, EB, quarum datum ſit interuallum BC. Quod erat demonſtrandum. Idem contingit ſi datæ AB addas interuallum datum AD, & totam DB diuidas bifariàm in E.

Sit iam datum quadratum AB diuidendum in duas partes, quarum interuallum ſit quadratũ AC. Supra AB fiat ſemicirculus in quo inſcribatur AC & nectatur CB, tùm ſupra CB fiat triangulum rectangulum-iſoſceles CDB, ſumptaque BE æquali BD, nectatur EA: dico duas partes quæſitas eſſe quadrata AE & EB: nam quadratũ AB æquatur quadratis AC & CB, quia angulus C eſt in ſemicirculo, ac proinde rectus, ſed quadratum CB æquatur quadratis CD & DB propter angulum rectum D igitur duo quadrata CD & DB cum quadrato AC æqualia ſunt quadrato AB. Sed cum triangulum CDB ſit iſoſceles, erit quadratum BD æquale quadrato CD, ergo



quadratum CD plus quadrato A C differt à quadrato BD pēr quadratum A C. At quadratum B D æquale eſt quadrato B E, igitur quadrata AC & C D differunt à quadrato B E per quadratum A C. Sed quadrata AC & CD æquantur quadrato A E, (ſiquidem tam tria quadr. AC CD DB quam duo quadrata BE AE æquantur quadrato AB) ergo quadratum A E differt à quadrato BE per quadratum AC. Ac proinde quadratum AB diuiſum eſt in duo quadrata AE EB quorum datum eſt interuallum, nempe quadratum A C. Quod erat demonſtrandum.

Sit poſtremo Cubus A diuidendus in duas partes, quarum interuallum ſit cubus B. Ipſis duabus lineis A & B, ſumantur vtrimq; tertiæ proportionales C & D E ſitque GE æqualis ipſi C, & diuidatur DG bifariàm in F. Dico ſolida B,A,DF & B,A,FE eſſe partes quæſitas: cum enim DE & C (ſeu GE) ſint tertiæ proportionales ipſis B & A erit cubus A æqualis ſolido B, A, DE, & cubus B æqualis B, A, GE, per 36 vndecimi. At ſolidum BA DE æquatur ſolidis BADF & BAFE, aliundeque ſolida BADF, & BAFE differunt per ſolidum BAGE (hoc eſt cubum B) ergò cubus A diuiſus eſt in duas partes differentes cubo B. Quod erat demonſtrandum.



Propositio II.

Datam quantitatem diuidere in duas, quæ habeant inter ſe proportionem datam.

SIT numerus diuidendus 60, & ratio data 3. ad 2. Ponatur autem vna pars numeri diuidendi 1 R, ergo alter erit 60 1R. Igitur 1R ad 60-1R, erit in ratione data 3 ad 2: ac proinde productus ſub extremis 2R æquabitur producto ſub mediis 180-3R. Ergo 5R æquabuntur 180: & ita 180 diuiſis per 5, fiet 1R 36 quæ ſi tollas à 60 habebis alteram partem 24.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & ratione partium C ad D, ponatur A vna pars, ergo altera erit B-A. Ac proinde A ad B-A erit vt C ad D. Ergo productus ſub extremis

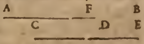
D A æquatur producto ſub mediis C B--C A. Et per tranſpoſitionem DA † CA æquabitur CB, & diuiſa vtraque parte æquationis per D†C fiet A æqualis $\frac{CB}{D \dagger C}$

Hinc Canon.

Multiplica quantitatem diuidendam per priorem terminum proportionis datæ : productum diuide per ſummam terminorum proportionis : & habebis priorem partem diuidendæ quantitatis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea AB diuidenda in duas, quæ habeant proportionem C D ad DE. Fiat vt C E ad C D, ita AB ad AF : dico lineam AF fore priorem partem quæſitam. Cum enim ſit vt CE ad CD, ita A B ad AF, erit diuidendo vt DE ad CD, ita FB ad F A. & innertendo vt CD ad DE, ita AF ad FB, quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Poteſt nullo negotio Geometricè illud idem abſolui in planis & ſolidis, vti factum eſt in Propoſit. I. tùm quia triangula & parallelogramma quæ ſunt inter eaſdem parallelas, ita ſe habent vt baſes ex Libro ſexto Euclidis : tùm etiam quia ſolida parallelepipeda ſupra eamdem baſim conſtituta, habent inter ſe eamdem proportionem, quam altitudines, vt docetur apud Euclidem in Libro vndecimo. Sed nobis breuitati ſtudentibus, hoc indicaſſe ſatis ſit.

PROPOSITIO III.

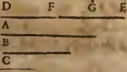
Datam quantitatem diuidere in duas ſecundùm datam proportionem & differentiam additam.

ESto datus numerus 100. diuidendus in duos tali ratione, vt major ad minorem ſe habeat ſicut. 5 ad 3, & adhuc 4 vnitates ſuperaddat. Ponatur minor 1 R, tum fiat vt 3 ad 5, ita 1 R ad aliud nempe $\frac{5R}{3}$ † 4. & huic numero inuento, addatur differentia data 4, vt fiat ſumma $\frac{5R}{3}$ † 4. Pro majore quæſitorum: huic ſi addas minorem 1 R, fiet aggregatum $\frac{8R}{3}$ † 4 æquale numero diuidendo 100. Ergo $\frac{8R}{3}$ æquabuntur *96*. Et fit 1 R ſiue minor quæſitorum *36*, quo ſublato de 100, extabit major quæſitus 6 4.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & ratione C ad D, & inſuper F ſuperaddenda, ponatur A minor quæſitarum, tùm,

quadratum CD plus quadrato AC differt à quadrato BD per quadratum A C. At quadratum B D æquale eſt quadrato B E, igitur quadrata AC & C D differunt à quadrato B E per quadratum A C. Sed quadrata AC & CD æquantur quadrato A E, (ſiquidem tam tria quadr. AC CD DB quam duo quadrata BE AE æquantur quadrato AB) ergo quadratum A E differt à quadrato BE per quadratum AC. Ac proinde quadratum AB diuiſum eſt in duo quadrata AE EB quorum datum eſt interuallum, nempe quadratum A C. Quod erat demonſtrandum.

Sit poſtremo Cubus A diuidendus in duas partes, quarum interuallum ſit cubus B. Ipſis duabus lineis A & B, ſumantur vtrimq; tertiæ proportionales C & D E ſitque GE æqualis ipſi C, & diuidatur D G bifariàm in F. Dico ſolida B,A,DF & B,A, FE eſſe partes quæſitas: cum enim DE & C (ſeu GE) ſint tertiæ proportionales ipſis B & A erit cubus A æqualis ſolido B, A, DE, & cubus B æqualis B, A, G E, per 36 vndecimi. At ſolidum BA DE æquatur ſolidis BADF & BAFE, aliundeque ſolida BADF, & BAFE differunt per ſolidum BAGE (hoc eſt cubum B) ergo cubus A diuiſus eſt in duas partes differentes cubo B. Quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO II.

Datam quantitatem diuidere in duas, quæ habeant inter ſe proportionem datam.

SIT numerus diuidendus 60, & ratio data 3. ad 2. Ponatur autem vna pars numeri diuidendi 1R, ergo alter erit 60 1R. Igitur 1R ad 60-1R, erit in ratione data 3 ad 2: ac proinde productus ſub extremis 2R æquabitur producto ſub mediis 180-3R. Ergo 5R æquabuntur 180: & ita 180 diuiſis per 5, fiet 1R 36 quæ ſi tollas à 60 habebis alteram partem 24.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & ratione partium C ad D, ponatur A vna pars, ergo altera erit B-A. Ac proinde A ad B-A erit vt C ad D. Ergo productus ſub extremis

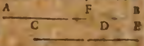
D A æquatur producto ſub mediis C B--C A. Et per tranſpoſitionem D A † C A æquabitur C B, & diuiſa vtraque parte æquationis per D † C fiet A æqualis $\frac{CB}{D \dagger C}$

Hinc Canon.

Multiplica quantitatem diuidendam per priorem terminum proportionis datæ: productum diuide per ſummam terminorum proportionis: & habebis priorem partem diuidendæ quantitatis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea AB diuidenda in duas, quæ habeant proportionem C D ad DE. Fiat vt C E ad C D, ita AB ad AF: dico lineam AF fore priorem partem quæſitam. Cum enim ſit vt CE ad CD, ita AB ad AF, erit diuidendo vt DE ad CD, ita FB ad FA. & innertendo vt CD ad DE, ita AF ad FB, quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Poteſt nullo negotio Geometricè illud idem abſolui in planis & ſolidis, vti factum eſt in Propoſit. I. tùm quia triangula & parallelogramma quæ ſunt inter eaſdem parallelas, ita ſe habent vt baſes ex Libro ſexto Euclidis: tùm etiam quia ſolida parallelepipeda ſupra eamdem baſim conſtituta, habent inter ſe eamdem proportionem, quam altitudines, vt docetur apud Euclidem in Libro vndecimo. Sed nobis breuitati ſtudentibus, hoc indicaſſe ſatis ſit.

PROPOSITIO III.

Datam quantitatem diuidere in duas ſecundùm datam proportionem & differentiam additam.

ESto datus numerus 100. diuidendus in duos tali ratione, vt major ad minorem ſe habeat ſicut. 5 ad 3, & adhuc 4 vnitates ſuperaddat. Ponatur minor 1 R, tum fiat vt 3 ad 5, ita 1 R ad aliud nempe $\frac{5R}{3}$ † 4. & huic numero inuento, addatur differentia data 4, vt fiat ſumma $\frac{5R}{3}$ † 4. Pro majore quæſitorum: huic ſi addas minorem 1 R, fiet aggregatum $\frac{8R}{3}$ † 4 æquale numero diuidendo 100. Ergo $\frac{8R}{3}$ æquabuntur *96*. Et fit 1 R ſiue minor quæſitorum *36*, quo ſublato de 100, extabit major quæſitus *64*.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & rationē C ad D, & inſuper F ſuperaddenda, ponatur A minor quæſitarum,

tùm,

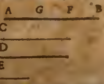
tùm fiat vt D ad C, ſic A ad aliam, quæ erit $\frac{CA}{D}$. Huic addatur F & A minor, fietquæ $\frac{CA}{D} + F + A$ æqualis B. Ergo B--F æquatur $\frac{CA}{D} + A$. Igitur A æquatur $\frac{BD - FD}{C+D}$.

Hinc Canon.

Quantitatem quæ ſuperaddi debet tolle ex quantitate diuidendam reſiduum multiplica per poſteriorem terminum proportionis, & productum diuide per ſummam terminorum, habebiſque poſteriorem ex quæſitis. Vnde alter non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea diuidenda A B, ratio C ad D, & differentia E. Oporteatque diuidere A B in duas taliter vt vna ſit ad aliam, ſicut C ad D, & præterea contineat lineam E. Tollatur ex A B linea BF æqualis E : tùm fiat vt ſumma C D ad D, ita A F ad A G. Dico A G fore vnã ex quæſitis & alteram G B, nam cum ſit vt C D ad D, ita A F ad A G, erit diuidendo. Vt C ad D, ita F G ad A G. Ergo ſi ipſi F G addas F B, tota A B diuiſa erit in duas B G, G A tali ratione, vt G B ad A G ſit in ratione data C ad D & inſuper contineat lineam datam E hoc eſt F B. Quod erat demonſtrandum.



Propositio IV.

Duas quantitates inuenire, quæ & datum habeant interuallum, & datam rationem.

SIt datum interuallum 36, & ratio 5. ad 1. Ponatur minor illorum numerorum I R, ergo major erit I R + 36. Igitur I R + 36. ad I R, eſt vt 5 ad 2. Ac proinde productus ſub extremis 2 R + 72 æquabitur producto ſub mediis S R. Et fit I R æqualis 24. minor quæſitorum, cui ſi addatur 36, habebitur major 60.

Per Algebram ſpecioſam, dato interuallo B, & ratione C ad D, ponatur A minor quantitas quæſita, igitur A + B eſt major. Ac proinde A + B ad A eſt in ratione C ad D. Ergo productus ſub extremis A D + B D æquatur producto ſub mediis A C & ita A C - A D æquatur B D. Igitur A æqualis eſt $\frac{BD}{C - D}$

Hinc Canon.

Multiplica interuallum datum per minorem terminum rationis datæ: productum diuide per differentiam terminorum, & habebis minorem quantitatem ex quæſitis. Vnde altera non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit datum interuallum duarum linearum A B, & ratio A———B F C D ad D E. Fiat vt C E ad E D ita A B ad B F. Dico C———E D duas lineas quæſitas eſſe A F & B F, nam quia eſt vt C E ad E D ita A B ad B F, erit componendo, vt C D ad D E. ita A F ad B F Ergo duæ lineæ A F & B F habent rationem datam & interuallum datum. Quod erat demonſtrandum.

Propositio V.

Datam quantitatem diuidere in duas, ita vt vtriuſque partes præſcriptura faciant datam quantitatem.

Esto datus numerus 100 diuidendus in duos ita vt prioris duo trientes cum tribus quadrantibus poſterioris faciant 70. (oportet autem numerum conficiendum cadere inter partes eaſdem numeri diuidendi, vt erudité demonſtrat Gaſpar Bachetus ad quæſt. 5. lib. 1. Diophanti alioqui problema eſſet impoſſibile: vt quoniam duo trientes numeri 100. ſunt $66\frac{2}{3}$ & tres quadrantes 75, neceſſe eſt numerum qui datur 70, cadere inter illos duos terminos) ponatur ergo 1 R pro priori, igitur poſterior erit 100 - 1 R, prioris duo trientes ſunt $\frac{2 R}{3}$, tres autem quadrantes poſterioris ſunt $\frac{300 - 3 R}{4}$,

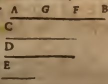
tùm fiat vt D ad C, ſic A ad aliam, quæ erit $\frac{CA}{D}$. Huic addatur F & A minor, fietque $\frac{CA}{D} + F + A$ æqualis B. Ergo $B - F$ æquatur $\frac{CA}{D} + A$. Igitur A æquatur $\frac{BD - FD}{C + D}$.

Hinc Canon.

Quantitatem quæ ſuperaddi debet tolle ex quantitate diuidendam reſiduum multiplica per poſteriorem terminum proportionis, & productum diuide per ſummam terminarum, habebiſque poſteriorem ex quæſitis. Vnde alter non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea diuidenda A B, ratio C ad D, & differentia E. Oporteatque diuidere A B in duas taliter vt vna ſit ad aliam, ſicut C ad D, & præterea contineat lineam E. Tollatur ex A B linea BF æqualis E : tùm fiat vt ſumma C D ad D, ita A F ad A G. Dico A G fore vnā ex quæſitis & alteram G B, nam cum ſit vt C D ad D, ita A F ad A G, erit diuidendo. Vt C ad D, ita F G ad A G. Ergo ſi ipſi F G addas F B, tota A B diuiſa erit in duas B G, G A tali ratione, vt G B ad A G ſit in ratione data C ad D & inſuper contineat lineam datam E hoc eſt F B. Quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO IV.

Duas quantitates inuenire, quæ & datum habeant interuallum, & datam rationem.

SIt datum interuallum 36, & ratio 5. ad 1. Ponatur minor illorum numerorum I R, ergo major erit I R + 36. Igitur I R + 36. ad I R, eſt vt 5 ad 2. Ac proinde productus ſub extremis 2 R + 72 æquabitur producto ſub mediis 5 R. Et ſit I R æqualis 24. minor quæſitorum, cui ſi addatur 36, habebitur major 60.

Per Algebram ſpecioſam, dato interuallo B, & ratione C ad D, ponatur A minor quantitas quæſita, igitur A + B eſt major. Ac proinde A + B ad A eſt in ratione C ad D. Ergo productus ſub extremis A D + B D æquatur producto ſub mediis A C & ita A C -- A D æquatur B D. Igitur A æqualis eſt $\frac{BD}{C - D}$

Hinc Canon.

Multiplica interuallum datum per minorem terminum rationis datæ: productum diuide per differentiam terminorum, & habebis minorem quantitatem ex quæſitis. Vnde altera non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit datum interuallum duarum linearum A B, & ratio C D ad D E. Fiat vt C E ad E D ita A B ad B F. Dico duas lineas quæſitas eſſe A F & B F, nam quia eſt vt C E ad E D ita A B ad B F, erit componendo, vt C D ad D E. ita A F ad B F Ergo duæ lineæ A F & B F habent rationem datam & interuallum datum. Quod erat demonſtrandum.

Propositio V.

Datam quantitatem diuidere in duas, ita vt vtriuſque partes præſcriptæ faciant datam quantitatem.

ESto datus numerus 100 diuidendus in duos ita vt prioris duo trientes cum tribus quadrantibus poſterioris faciant 70. (opportet autem numerum conficiendum cadere inter partes eaſdem numeri diuidendi, vt eruditè demonſtrat Gaſpar Bachetus ad quæſt. 5. lib. 1. Diophanti alioqui problema eſſet impoſibile: vt quoniam duo trientes numeri 100. ſunt $66\frac{2}{3}$ & tres quadrantes 75, neceſſe eſt numerum qui datur 70, cadere inter illos duos terminos) ponatur ergo 1 R pro priori, igitur poſterior erit 100 -- 1 R, prioris duo trientes ſunt $\frac{2\ R}{3}$, tres autem quadrantes poſterioris ſunt $\overline{300 - 3\ R}$,

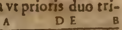
horum ergo ſumma $\frac{900 - 1R}{12}$ æquatur 70. Igitur 1 R ſiue prior pars erit 60, poſterior vero 40. Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & quantitate conficienda ex duobus trientibus prioris & tribus quadrantibus poſterioris C, ponatur A prior pars ergo B − A erit poſterior igitur $\frac{2A}{3}$ & $\frac{3B - 3A}{4}$ æquantur C. Ac proinde A eſt æqualis 9 B − 12 C.

Hinc Canon.

Datæ quantitatis diuidendæ ſume partes ſimiles partibus poſtulatis: minorum aufer à quantitate conficienda, & quantitate conficiendam aufer à maiore: reſidua multiplica ſigillatim per quantitatem diuidendam & productos diuide per ſummam reſiduorum, habebiſque ſegmenta quæſita.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data A B diuidenda in duo ſegmenta, ita vt prioris duo trientes cum tribus quadrantibus poſterioris faciant lineam A C.



Sumatum linea D A æqualis duobus trientibus totius A B, & A E æqualis tribus quadrantibus eiuſdem A B, tùm fiat vt D E ad C E ita A B ad A F. Dico A F & F B foræ partes queſitas totius A B. Qnoniam enim A E continet tres quadrantes A B ſequitur quod ſi ſegmentorum A F F B ſumerentur tres quadrantes ſumma partium æquaretur A E, nam vt tres quadrantes A F ad tres quadrantes F B, ita A F ad F B. Et compendo vt tres quadrantes A F plus tribus quadrantibus F B ad tres quadrantes F B, ita A B ad F B & permutando vt tres quandrantes A F plus tribus quadrantibus F B ad A B ita tres quadrantes F B ad F B, ſed vt F B ad tres quadrantes F B ita A B ad tres quadrantes A B, ergo tres quadrantes A B (hoc eſt ipſa A E) æquatur tribus quadrantibus A F plus tribus quadrantibus F B. At factum eſt vt D E ad C E ita A B ad A F, ergo permutando inuertendoque vt A B ad D E ita A F ad E C. Igitur cum D E ſit id quo tres quadrantes A B ſuperant duos trientes A B, erit etiam C E id quo tres quadrantes A F ſuperant duos trientes A F, ac proinde duo trientes A F cum C E, æquantur tribus quadrantibus A F. Ergo duo trientes A F cum C E & tribus quadrantibus F B erunt æquales A E,

& ſublata CE, ex vtraque parte æquationis duo trientes AF cum tribus quadrantibus FB æquantur AC. Quod erat demonſtrãdum.

Propositio VI.

Quantitatem datam diuidere in duas, ita vt prioris data pars poſterioris datam partem ſuperet data quantitate.

Eſto datus numerus 100 diuidendus in duos, ita vt prioris quadrans poſterioris ſextantem ſuperet numero 20 (oportet autem hunc numerum 20 minorem eſſe quadrante numeri dati 100) ponatur 1 R primus quæſitorum, ergo ſecundus erit 100-- 1 R, Primi quadrans eſt $\frac{1R}{4}$, ſextans vero poſterioris eſt $\frac{100 - 1R}{6}$. Si igitur huic poſteriori addas 20, erit æquatio inter ſummam confectam $\frac{220 - 1R}{6}$ & $\frac{1R}{4}$. Ac proinde poſt debitam reductionem 10 R æquabuntur 880, & fit 1R ſiue primus 88, & quem ſi tollas à 100, fi ſecundus 12.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & interualo prædicto C, ponatur prior A cuius quadrans $\frac{A - C}{4}$ æquatur ſextanti alterius $\frac{B - A}{6}$. Igitur A eſt æqualis $\frac{4B + 24C}{10}$.

Hinc Canon.

Interuallum datum diuidatur per fractionem priorem: quotienſque tollatur à quantitate diuidenda, & reſiduum ſeruetur. Deinde numerator poſterioris fractionis diuidatur per fractionem priorem & quotiens augeatur poſteriore denominatore, ac per hanc ſummam diuidatur reſiduum ſeruatum, quotiens iſte multiplicatus per denominatorem poſteriorem exhibet ſecundam partem quantitatis diuidendæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto linea AB diuidenda in duas partes, taliter vt quadrans vnius

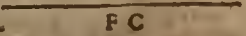
horum ergo ſumma $\frac{900 - 1R}{12}$ æquatur 70. Igitur 1 R ſiue prior pars erit 60, poſterior vero 40. Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & quantitate conficienda ex duobus trientibus prioris & tribus quadrantibus poſterioris C, ponatur A prior pars ergo B -- A erit poſterior igitur $\frac{2A}{3}$ & $\frac{3B - 3A}{4}$ æquantur C. Ac proinde A eſt æqualis 9 B -- 12 C.

Hinc Canon.

Datæ quantitatis diuidendæ ſume partes ſimiles partibus poſtulatis: minorum aufer à quantitate conficienda, & quantitate conficiendam aufer à maiore: reſidua multiplica ſigillatim per quantitatem diuidendam & productos diuide per ſummam reſiduorum, habebiſque ſegmenta quæſita.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data A B diuidenda in duo ſegmenta, ita vt prioris duo trientes cum tribus quadrantibus poſterioris faciant lineam A C. Sumatum linea D A æqualis duobus trientibus totius A B, & A E æqualis tribus quadrantibus eiuſdem A B, tùm fiat vt D E ad C E ita A B ad A F. Dico A F & F B foræ partes queſitas totius A B. Quoniam enim A E continet tres quadrantes A B ſequitur quod ſi ſegmentorum A F F B ſumerentur tres quadrantes ſumma partium æquaretur A E, nam vt tres quadrantes A F ad tres quadrantes F B, ita A F ad F B. Et compendo vt tres quadrantes A F plus tribus quadrantibus F B ad tres quadrantes F B, ita A B ad F B & permutando vt tres quandrantes A F plus tribus quadrantibus F B ad A B ita tres quadrantes F B ad F B, ſed vt F B ad tres quadrantes F B ita A B ad tres quadrantes A B, ergo tres quadrantes A B (hoc eſt ipſa A E) æquatur tribus quadrantibus A F plus tribus quadrantibus F B. At factum eſt vt D E ad C E ita A B ad A F, ergo permutando inuertendoque vt A B ad D E ita A F ad E C. Igitur cum D E ſit id quo tres quadrantes A B ſuperant duos trientes A B, erit etiam C E id quo tres quadrantes A F ſuperant duos trientes A F, ac proinde duo trientes A F cum C E, æquantur tribus quadrantibus A F. Ergo duo trientes A F cum C E & tribus quadrantibus F B erunt æquales A E,



& ſublata C E, ex vtraque parte æquationis duo trientes A F cum tribus quadrantibus F B æquantur A C. Quod erat demonſtrãdum.

Propositio VI.

Quantitatem datam diuidere in duas, ita vt prioris data pars poſterioris datam partem ſuperet data quantitate.

Esto datus numerus 100 diuidendus in duos, ita vt prioris quadrans poſterioris ſextantem ſuperet numero 20 (oportet autem hunc numerum 20 minorem eſſe quadrante numeri dati 100) ponatur 1 R primus quæſitorum, ergo ſecundus erit 100 -- 1 R, Primi quadrans eſt $\frac{1R}{4}$, ſextans vero poſterioris eſt $\frac{100 - 1R}{6}$. Si igitur huic poſteriori addas 20, erit æquatio inter ſummam confectam $\frac{220 - 1R}{6}$ & $\frac{1R}{4}$. Ac proinde poſt debitam reductionem 10 R æquabuntur 880, & fit 1R ſiue primus 88, & quem ſi tollas à 100, fi ſecundus 12.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & interualo prædicto C, ponatur prior A cuius quadrans $\frac{A}{4}$ -- C æquatur ſextanti alterius $\frac{B - A}{6}$. Igitur A eſt æqualis $\frac{4B + 24C}{10}$.

Hinc Canon.

Interuallum datum diuidatur per fractionem priorem: quotienſque tollatur à quantitate diuidenda, & reſiduum ſeruetur. Deinde numerator poſterioris fractionis diuidatur per fractionem priorem & quotiens augeatur poſteriore denominatore, ac per hanc ſummam diuidatur reſiduum ſeruatum, quotiens iſte multiplicatus per denominatorem poſteriorem exhibet ſecundam partem quantitatis diuidendæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto linea A B diuidenda in duas partes, taliter vt quadrans vnius

vnius ſupēret ſex tantem alterius per lineam A C. Capiatur A D quadrupla A C, & reſidua D B per prop. II huius, A C D B diuidatur in E tali ratione, vt quadrans D E E æquetur ſextanti E B. (ſiue diuidatur D B in duas quæ ſe habeant ſicut 4 ad *6* quadrans enim 4 æquatur ſextanti *6*.) Dico totam A B ſectam eſſe in E, ita vt quadrans A E ſuperet ſextantem E B per lineam A C, nam quadrans A E æquatur quadranti A D & quadranti D E propter diſcurſum factum in propoſ. præced. ſed quadrans A D eſt A C, igitur A C plus quadrante ipſius D E æquatur quadranti A E. Sed A C cum quadrante D E ſuperat quadrantem D E per A C, ergo quadrans A E ſuperat quadrantem D E per A C, ſed quadrans D E æquatur ſextanti E B. Igitur quadrans A E ſuperat ſextantē E B per lineam A C. Quod erat demonſtrãdum

---

PROPOSITIO VII.

Ab eadem quantitate auferre duas alias datas, ita vt reſidua datam habeant rationem.

SInt dati numeri 18 & 20, quos oporteat tollere ab alio numero, taliter vt reſiduj habeant rationem *6* ad 5. Ponatur numerus inueniendus I R, a quo ſi tollas 18 & 20, reſidui ſunt I R --- 18 & I R --- 20. ac proinde iſti ſunt in ratione data *6* ad 5. ergo productus ſub extremis 5 R --- *90* æquatur producto ſub medijs *6* R --- 120. & ita poſt reductionem debitam I R eſt *30* hinc enim ſi tollas 18 & 20, reſidui 12 & 10 ſunt in ratione data *6* ad 5.

Per Algebram ſpecioſam, datis quantitatibus auferendis B & C, & ratione reſiduarum D ad F ponatur A quantitas inuenienda. Ergo A --- B ad A --- C habet eamdem rationem, quam D ad F. Ac ideò productus ſub extremis F A --- F B æqualis eſt producto ſub mediis D A --- D C. Ergo D A --- F A æquatur D C --- F B. igitur A eſt æqualis $\frac{DC --- FB}{D --- F}$,

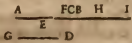
Hinc Canon.

Multiplica majorem quantitatem ſubtrahendam per majorem

terminum proportionis datæ, & minorem ſubtrahendum per minorem terminum : poſteriorem productum tolle de priori, & reſiduum diuide per differentiam terminorum, habebiſque quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint auferendæ A C & A B ex aliqua linea ita vt reſiduæ habeant proportionem G D ad E G fiat vt G D ad E G ſic A C ad A F & vt differentia D E ad D G ſic B F ad A H. Dico lineam A H eſſe illam quæ inquiritur. Sumpta enim



F I æquali A H, erit vt F B ad F I ita F B ad A H, & G D ad E G, & per conuerſionem rationis vt F I ad B I ita G D ad G E, ſed vt G D ad G E, ita factum eſt A C ad A F, ergo erit vt F I ad B I ita A C ad A F, & permutando vt tota F I ad totam A C, ita ablata B I ad ablatam A F proindeque erit & reliqua F B ad reliquã F C, vt tota F I ſiue A H ad totam A C, & permutando inuertẽdoque vt tota A H ad totam F B, ita ablata A C ad ablatam C F, igitur & reliqua C H ad reliquã B C erit vt tota A H ad totam B F, hoc eſt vt iam probauimus, ſicut G D ad E D. Quoniam ergo eſt vt C H ad C B, ita G D ad E D, erit per conuerſionem rationis, vt C H ad B H ita G D ad G E. At ſi ex A H tollatur A C, remans C H : ſi vero ex eadem A H tollatur A B, remans B H, ergo inuenta eſt linea A H, ex qua ſi tollantur duæ datæ lineæ A C & A B, reſiduæ C B & B H habent rationem datam G D ad G E. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Duabus quantitatibus datis adiicere eamdem taliter vt compoſita habeant rationem datam.

Dentur duo numeri 26 & 14 quibus oporteat addere eumdem numerum tali ratione, vt confectæ ſummæ ſint in ratione 5 ad 3. Ponatur numerus addendus 1 R, igitur 26 + 1 R & 14 + 1 R ſunt in ratione data 5 ad 3. Ergo productus ſub extremis 78 + 3 R,

vnius ſuperet ſex tantem alterius per lineam AC. Capiatur A D quadrupla A C, & reſidua D B per prop. II huius, A C D B diuidatur in E tali ratione, vt quadrans D E E æquetur ſextanti E B. (ſiue diuidatur D B in duas quæ ſe habeant ſicut 4 ad 6 quadrans enim 4 æquatur ſextanti 6.) Dico totam A B ſectam eſſe in E, ita vt quadrans A E ſuperet ſextantem E B per lineam A C, nam quadrans A E æquatur quadranti A D & quadranti D E propter diſcurſum factum in propoſ. præced. ſed quadrans A D eſt A C, igitur A C plus quadrante ipſius D E æquatur quadranti A E. Sed A C cum quadrante D E ſuperat quadrantem D E per A C, ergo quadrans A E ſuperat quadrantem D E per A C, ſed quadrans D E æquatur ſextanti E B. Igitur quadrans A E ſuperat ſextantē E B per lineam A C. Quod erat demonſtrādum

---

Propositio VII.

Ab eadem quantitate auferre duas alias datas, ita vt reſidua datam habeant rationem.

Sint dati numeri 18 & 20, quos oporteat tollere ab alio numero, taliter vt reſiduj habeant rationem 6 ad 5. Ponatur numerus inueniendus 1 R, a quo ſi tollas 18 & 20, reſidui ſunt 1 R --- 18 & 1 R --- 20. ac proinde iſti ſunt in ratione data 6 ad 5. ergo productus ſub extremis 5 R --- 90 æquatur producto ſub medijs 6 R --- 120. & ita poſt reductionem debitam 1 R eſt 30 hinc enim ſi tollas 18 & 20, reſidui 12 & 10 ſunt in ratione data 6 ad 5.

Per Algebram ſpecioſam, datis quantitatibus auferendis B & C, & ratione reſiduarum D ad F ponatur A quantitas inuenienda. Ergo A --- B ad A --- C habet eamdem rationem, quam D ad F. Ac ideò productus ſub extremis F A -- F B æqualis eſt producto ſub mediis D A --- D C. Ergo D A --- F A æquatur D C --- F B, igitur A eſt æqualis $\frac{D\,C --- F\,B}{D --- F}$,

Hinc Canon.

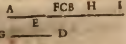
Multiplica majorem quantitatem ſubtrahēndam pēr majorēm

C

terminum proportionis datæ, & minorem ſubtrahendum per minorem terminum : poſteriorem productum tolle de priori, & reſiduum diuide per differentiam terminorum, habebiſque quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint auferendæ A C & A B ex aliqua linea ita vt reſiduæ habeant proportionem G D ad E G fiat vt G D ad E G ſic A C ad A F & vt differentia D E ad D G ſic B F ad A H. Dico lineam A H eſſe illam quæ inquiritur. Sumpta enim



F I æquali A H, erit vt F B ad F I ita F B ad A H, & G D ad E G, & per conuerſionem rationis vt F I ad B I ita G D ad G E, ſed vt G D ad G E, ita factum eſt A C ad A F, ergo erit vt F I ad B I ita A C ad A F, & permutando vt tota F I ad totam A C, ita ablata B I ad ablatam A F proindeque erit & reliqua F B ad reliquã F C, vt tota F I ſiue A H ad totam A C, & permutando inuertẽdoque vt tota A H ad totam F B, ita ablata A C ad ablatam C F, igitur & reliqua C H ad reliquã B C erit vt tota A H ad totam B F, hoc eſt vt iam probauimus, ſicut G D ad E D. Quoniam ergo eſt vt C H ad C B, ita G D ad E D, erit per conuerſionem rationis, vt C H ad B H ita G D ad G E. At ſi ex A H tollatur A C, remans C H : ſi vero ex eadem A H tollatur A B, remans B H, ergo inuenta eſt linea A H, ex qua ſi tollantur duæ datæ lineæ A C & A B, reſiduæ C B & B H habent rationem datam G D ad G E. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Duabus quantitatibus datis adiiecere eamdem taliter vt compoſitæ habeant rationem datam.

Dentur duo numeri 26 & 14 quibus oporteat addere eumdem numerum tali ratione, vt confectæ ſummæ ſint in ratione 5 ad 3. Ponatur numerus addendus 1 R, igitur 26 † 1 R & 14 † 1 R ſunt in ratione data 5 ad 3. Ergo productus ſub extremis 78 † 3 R,

æquatur producto ſub mediis 70 + S R, & ita I R ſiue numerus addendus eſt 4 qui iunctus 26 & 14, facit 30 & 18 in ratione 5 ad 3.

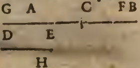
Per Algebram ſpecioſam, datis B & C cum ratione D ad F, ponatur quantitas inuenienda A, ergo B + A & C + A ſunt vt D ad F. igitur F B + F A æquatur D C + D A. ac proinde F B -- D C ſunt æqualia D A -- F A. & ſit A æqualis $\frac{FB - DC}{D - F}$

Hinc Canon.

Multiplica quantitatem priorem addendam per poſteriorem terminum proportionis, itemque reliquos inter ſe : minorem productum tolle de maiore : & reſiduum diuide per differentiam terminorum rationis, ſic enim habebis quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint datæ duæ lineæ A B A C, quibus addenda ſit eadem linea tali ratione vt compoſitæ habeant rationem D E ad H D. Fiat primò vt D H, ad E H, ita A C ad C F : deinde fiat quoque vt E H ad H D, ita F B ad A G. Dico A G eſſe lineam quæſitam nam quia eſt vt D H ad E H, ita A C ad C F, erit inuertendo vt E H ad D H ita C F ad A C. Sed factum eſt vt E H ad D H ita F B ad A G. ergo vt C F ad C A ita F B ad A G. & componendo antecedentia, vt C B ad C G ita E H ad D H. & componendo ſimpliciter vt G B ad G C, ita E D ad D H. igitur inuenta eſt linea A G quæ addita duabus A B A C, facit compoſitas G B G C in ratione data D E ad D H. quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Aduerte rationem datam minorem debere eſſe quam quantitatum addendarum, quia vt demonſtratur à Gaſpare Bacheto. L. 1. Poriſm. prop 1. & Clauio cap. 9. Algeb. Ænig. 7. Si duæ quantitates inæquales adiiciantur eidem, erit compoſitarum minor ratio, quam adiectarum.

Propositio IX.

A duabus quantitatibus datis auferre eamdem taliter, vt reſiduæ ſint in data ratione.

Sint duo numeri dati 12 & 8, à quibus oporteat tollere eumdem numerum, ita vt reſidui ſe habeant vt 5 ad 3. Eſto numerus tollendus 1R. ergo 12 --- 1R & 8 --- 1R ſunt in ratione 5 ad 3. igitur productus ſub extremis 36 --- 3R æquatur producto ſub mediis 40 --- 5R. & ita 1R ſiue numerus auferendus eſt 2, quem ſi tollas ex 12 & 8, reſidui 10 & 6 habebunt rationem datam 5 ad 3.

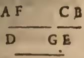
Per Algebram ſpecioſam, datis B & C cum ratione D ad F, ponatur A pro quantitate tollenda. ergo B --- A & C A ſunt in ratione D ad F. & ita F B --- F A æquatur D C --- D A ergo D A --- F A æquantur D C --- F B. igitur A æquatur $\frac{DC --- FB}{D --- F}$

Hinc Canon.

Multiplica minorem quantitatem a qua debet fieri ſubſtractio, per maiorem terminum proportionis, itemque reliquas inter ſe: productum minorem tolle de maiore: reſiduum diuide per differentiam terminorum rationis datæ, habebiſque quantitatem quęſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint duæ lineæ A B A C ex quibus oporteat tollere eamdem lineam tali ratione, vt reſiduæ habeant rationem D E ad D G. Fiat vt G E ad G D ita C B ad C F. Dico A F eſſe lineam quæſitam, nam quia factum eſt vt E G ad G D, ita B C ad C F, erit componendo vt D E ad D G ita B F ad C F. Ergo ſi ex duabus datis A B A C tollatur A F, reſiduæ F B F C ſunt in ratione data D E ad D G. quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Aduertè rationem datam minorem eſſe debere ea quam quantitates datæ inter ſe habent, propter rationem quæ allata eſt in ſcholio propoſitionis præcedentis.

æquatur producto ſub mediis 70 † SR, & ita I R ſiue numerus addendus eſt 4 qui iunctus 26 & 14, facit 30 & 18 in ratione 5 ad 3.

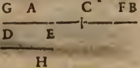
Per Algebram ſpecioſam, datis B & C cum ratione D ad F, ponatur quantitas inuenienda A, ergo B† A & C † A ſunt vt D ad F. igitur F B † F A æquatur D C + D A. ac proinde F B---D C ſunt æqualia D A---F A. & ſit A æqualis $\frac{F B - D C}{D - F}$

Hinc Canon.

Multiplica quantitatem priorem addendam per poſteriorem terminum proportionis, itemque reliquos inter ſe : minorem productum tolle de maiore : & reſiduum diuide per differentiam terminorum rationis, ſic enim habebis quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint datæ duæ lineæ A B A C, quibus addenda ſit eadem linea tali ratione vt compoſitæ habeant rationem D E ad H D. Fiat primò vt D H, ad E H, ita A C ad C F : deinde fiat quoque vt E H ad H D, ita F B ad A G. Dico A G eſſe lineam quæſitam nam quia eſt vt D H ad EH, ita A C ad C F, erit inuertendo vt E H ad D H ita C F ad A C. Sed factum eſt vt E H ad D H ita F B ad A G. ergo vt C F ad C A ita F B ad A G. & componendo antecedentia, vt C B ad C G ita E H ad D H. & componendo ſimpliciter vt G B ad G C, ita E D ad D H. igitur inuenta eſt linea A G quæ addita duabus A B A C, facit compoſitas G B G C in ratione data D E ad D H, quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Aduerte rationem datam minorem debere eſſe quam quantitatum addendarum, quia vt demonſtratur à Gaſpare Bacheto. l. 1. Poriſm. prop 1. & Clauio cap. 9. Algeb. Ænig. 7. Si duæ quantitates inæquales adiiciantur eidem, erit compoſitarum minor ratio, quam adiectarum.

PROPOSITIO IX.

A duabus quantitatibus datis auferre eamdem taliter, vt reſidua ſint in data ratione.

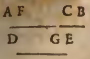
Sint duo numeri dati 12 & 8, à quibus oporteat tollere eumdem numerum, ita vt reſidui ſe habeant vt 5 ad *3*. Eſto numerus tollendus 1 R. ergo 12 --- 1 R & 8 --- 1 R ſunt in ratione 5 ad 3. igitur productus ſub extremis *36* --- *3* R æquatur producto ſub mediis 40 --- 5 R. & ita 1 R ſiue numerus auferendus, eſt 2, quem ſi tollas ex 12 & 8, reſidui 10 & *6* habebunt rationem datam 5 ad *3*.

Per Algebram ſpecioſam, datis B & C cum ratione D ad F, ponatur A pro quantitate tollenda. ergo B --- A & C A ſunt in ratione D ad F. & ita F B --- F A æquatur D C --- D A ergo D A --- F A æquantur D C --- F B. igitur A æquatur $\frac{D C --- F B}{D --- F}$

Hinc Canon.

Multiplica minorem quantitatem a qua debet fieri ſubſtractio, per maiorem terminum proportionis, itemque reliquas inter ſe: productum minorem tolle de maiore: reſiduum diuide per differentiam terminorum rationis datæ, habebiſque quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.



Sint duæ lineæ A B A C ex quibus oporteat tollere eamdem lineam tali ratione, vt reſiduæ habeant rationem D E ad D G. Fiat vt G E ad G D ita C B ad C F. Dico A F eſſe lineam quæſitam, nam quia factum eſt vt E G ad G D, ita B C ad C F, erit componendo vt D E ad D G ita B F ad C F. Ergo ſi ex duabus datis A B A C, tollatur A F, reſiduæ F B F C ſunt in ratione data D E ad D G. quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Aduerte rationem datam minorem eſſe debere ea quam quantitates datæ inter ſe habent, propter rationem quæ allata eſt in ſcholio propoſitionis præcedentis.

Propoſitio

PROPOSITIO X.

Datis duabus quantitatibus, eamdem addere minori & detrahere maiori, ita vt ſumma ad reſiduum datam habeat rationem.

IMperatum ſit ipſi quidem 20 addere, at vero ipſi 100 detrahere eumdem numerum, taliter vt ſumma ad reſiduum ſit vt 5 ad 3. Ponatur 1 R pro numero quæſito ergo 20 † 1 R ad 100 ---- 1 R eſt in ratione data 5 ad 3. igitur productus ſub extremis 60 † 3 R æquabitur producto ſub mediis 500 --- 5 R & ita 1 R eſt æqualis 55, quem ſi adiicias ad 20 & auferas à 100, ſumma 75 ad reſiduum 45, eſt vt 5 ad 3.

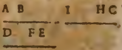
Per Algebram ſpecioſam, datis B & C pro duabus prioribus quantitabus, & ratione D ad F. ponatur quantitas inuenienda A, ergo B † A & C -- A ſunt vt D ad F. ideoque F B † F A æquatur D C--- D A. igitur A æquatur $\frac{FB - DC}{F + D}$

Hinc Canon.

Quantitatem datam cui debet adiungi quæſita, duc in poſteriorem terminum rationis datæ; illam vero a qua debet tolli eadem quantitas, multiplica per priorem terminum rationis: productum minorem tolle de maiore, & reſiduum diuide per ſummam terminorum proportionis, habebiſque quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Data ſint duæ lineæ A B B C, quarum priori oporteat addere quamdã lineã, & eamdẽ detrahere poſteriori, taliter vt ſumma ad reſiduum ſit in ratione D E ad D F. fiat vt D E ad DF ita A B ad CH. deinde fiat quoque vt D E plus F D ad D E ita B H ad B I. Dico lineam B I eſſe lineam quæ inquiritur, & fore A I ad I C in ratione data D E ad D F, nam cum ſit vt D E plus F D ad D E ita B H ad B I, erit diuidendo vt F D ad D E, ita H I ad I B. Sed factum eſt vt F D ad D E ita C H ad A B, ergo erit vt C H ad A B ita H I ad I B. & permutando vt C H ad H I ita A B ad B I.



D

& componendo vt C I ad I H ita A I ab B I & permutando vt C I ad A I ita I H ad B I. & inuertendo vt A I ad I C ita B I ad I H. Sed iam oſtendimus eſſe vt B I ad I H ita A B ad C H, factum eſt autem vt A B ad C H ita D E ad D F. Ergo A I ad I C eſt vt D E ad D F. & ſic inuenta eſt linea B I quæ addita A B & detracta B C facit ſummam A I ad reſiduum I C in ratione data D E ad D F. quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Diophantus præcipit numerum quæſitum addi minori, & maiori detrahi: poteſt tamen etiam maiori addi & à minore tolli: vt ſi dentur 100 & 80, & iubeatur numerum quæſitum addi 100, & tolli ab 80, ita vt ſumma ad reſiduum ſit vt 5 ad 3. Verum & ſi dentur iſti duo caſus, canonem noſtrum & ex canone praxim geometricam ita attemperauimus, vt vtrique caſui conueniat.

Propositio XI.

Duas datas quantitates addere & detrahere alteri, vt ſumma ad reſiduum datam habeat rationem.

Sint dati duo numeri 20 & 100, oporteatque inuenire numerum cui addendo 20, & detrahendo 100, fiat ſumma ad reſiduum in proportione 5 ad 3. Ponatur ille numerus 1 R, ergo 1 R † 20 ad 1 R -- 100, habet rationem quam 5 ad 3. igitur productus ſub extremis 3 R † 60 eſt æqualis producto ſub mediis 5 R -- 500 & proinde 1 R eſt 280, huic enim addendo 20, & detrahendo 100, fit ſumma 300, & reſiduum 180, in proportione data 5 ad 3

Per Algebram ſpecioſam, datis quantitatibus B & C & ratione D ad F, ponatur A pro quantitate inuenienda. Ergo A † B ad A -- C eſt vt D ad F. ac proinde F † A F B æquatur D -- A D C. igitur D C † F B eſt æqualis D -- A F A. & ſic A æquatur $\frac{DC + FB}{D - F}$

PROPOSITIO X.

Datis duabus quantitatibus, eamdem addere minori & detrahere maiori, ita vt ſumma ad reſiduum datam habeat rationem.

IMperatum ſit ipſi quidem 20 addere, at vero ipſi 100 detrahere eumdem numerum, taliter vt ſumma ad reſiduum ſit vt 5 ad 3. Ponatur 1 R pro numero quæſito ergo 20 † 1 R ad 100 ---- 1 R eſt in ratione data 5 ad 3. igitur productus ſub extremis 60 † 3 R æquabitur producto ſub mediis 500 --- 5 R & ita 1 R eſt æqualis 55, quem ſi adiicias ad 20 & auferas à 100, ſumma 75 ad reſiduum 45, eſt vt 5 ad 3.

Per Algebram ſpecioſam, datis B & C pro duabus prioribus quantitatibus, & ratione D ad F. ponatur quantitas inuenienda A, ergo B † A & C -- A ſunt vt D ad F. ideoque F B † F A æquatur D C -- D A. igitur A æquatur

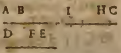
$$\frac{FB - DC}{F + D}$$

Hinc Canon.

Quantitatem datam cui debet adiungi quæſita, duc in poſteriorem terminum rationis datæ; illam vero aqua debet tolli eadem quantitas, multiplica per priorem terminum rationis: productum minorem tolle de maiore, & reſiduum diuide per ſummam terminorum proportionis, habebiſque quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Data ſint duæ lineæ AB BC, quarum priori oporteat addere quamdã lineã, & eamdẽ detrahere poſteriori, taliter vt ſumma ad reſiduum ſit in ratione DE ad DF. fiat vt DE ad DF ita AB ad CH. deinde fiat quoque vt DE plus FD ad DE ita BH ad BI. Dico lineam BI eſſe lineam quæ inquiritur, & fore AI ad IC in ratione data DE ad DF, nam cum ſit vt DE plus FD ad DE ita BH ad BI, erit diuidendo vt FD ad DE, ita HI ad IB. Sed factum eſt vt FD ad DE ita CH ad AB, ergo erit vt CH ad AB ita HI ad IB. & permutando vt CH ad HI ita AB ad BI.



& componendo vt C I ad I H ita A I ab B I & permutando vt C I ad A I ita I H ad B I. & inuertendo vt A I ad I C ita B I ad I H. Sed iam oſtendimus eſſe vt B I ad I H ita A B ad C H, factum eſt autem vt A B ad C H ita D E ad D F. Ergo A I ad I C eſt vt D E ad D F. & ſic inuenta eſt linea B I quæ addita A B & detracta B C facit ſummam A I ad reſiduum I C in ratione data D E ad D F. quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Diophantus præcipit numerum quæſitum addi minori, & maiori detrahi: poteſt tamen etiam maiori addi & à minore tolli: vt ſi dentur 100 & 80, & iubeatur numerum quæſitum addi 100, & tolli ab 80, ita vt ſumma ad reſiduum ſit vt 5 ad 3. Verum & ſi dentur iſti duo caſus, canonem noſtrum & ex canone praxim geometricam ita attemperauimus, vt vtrique caſui conueniat.

PROPOSITIO XI.

Duas datas quantitates addere & detrahere alteri, vt ſumma ad reſiduum datam habeat rationem.

SInt dati duo numeri 20 & 100, oporteatque inuenire numerum cui addendo 20, & detrahendo 100, fiat ſumma ad reſiduum in proportione 5 ad 3. Ponatur ille numerus 1 R, ergo 1 R † 20 ad 1 R -- 100, habet rationem quam 5 ad 3. igitur productus ſub extremis 3 R † 60 eſt æqualis producto ſub mediis 5 R -- 500 & proinde 1 R eſt 280, huic enim addendo 20, & detrahendo 100, fit ſumma 300, & reſiduum 180, in proportione data 5 ad 3

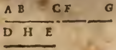
Per Algebram ſpecioſam, datis quantitatibus B & C & ratione D ad F, ponatur A pro quantitate inuenienda. Ergo A † B ad A -- C eſt vt D ad F. ac proinde F † A F B æquatur D -- A D C. igitur D C † F B eſt æqualis D -- A F A. & ſic A æquatur $\frac{D\ C \dagger F\ B}{D - F}$

Hinc Canon.

Multiplica quantitatem addendam per poſterior m terminum rationis & detrahendum per priorem: ſummam productorum diuide per differentiam terminorum proportionis datæ, habebiſque quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint datæ duæ lineæ AB, BC. oporteat autem inuenire alteram cui addendo AB, & detrahendo BC, ſumma ad reſiduum, ſit vt DE ad DH. Fiat vt DE ad DH ita AB ad CF. tùm fiat quoque vt HE ad DE ita BF ad BG. Dico BC eſſe lineam quæſitam cui addita AB & detracta BG facit ſummam AG ad reſiduum CG in ratione data DE ad DH. Nam cum ſit vt HE ad DE ita BF ad BG, erit inuertendo vt DE ad HE ita BG ad BF. & per conuerſionem rationis vt DE ad DH ita BG ad FC. Sed factum eſt vt DE ad DH ita AB ad CF. ergo vt AB ad CF ita BG ad FG. & permutando vt AB ad BG ita CF ad FG. & componendo vt AG ad BG ita CG ad FG. & permutando vt AG ad CG ita BG ad FG. Sed iam probatum eſt iſtam proportionem BG ad FG eſſe æqualem AB ad CF, & hanc AB ad CF iſti DE ad DH. ergo AG ad CG eſt vt DE ad DH. & ita inuenta eſt linea BG quæ addita AB & a qua detracta BC, facit ſummam AG ad reſiduum CG in ratione data DE ad DH quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO XII.

Datam quantitatem diuidere bis in duo ſegmenta ita vt vnum ex prima diuiſione ad vnum è ſecunda habeat rationem datam: at vero reliquum ſecunda ad reliquum prima datam quoque habeat rationem.

Esto datus numerus 100. bis diuidendus in duos, ita ut maior ex prima diuiſione ad minorem è ſecunda ſit vt 7 ad 2: at vero & maior ſecundæ diuiſionis ad minorē primæ, ſit in ratione 8 ad 3.

Ponatur major primæ diuiſionis 1 R, ergo minor diuiſionis eiuſdem erit 100 --- 1 R. Et quia maior primæ diuiſionis ad minorem ſecundæ eſt vt 7 ad 2, erit minor ſecundæ $\frac{2\ R.}{7}$ & proinde major eiuſdem diuiſionis. erit 100 --- $\frac{2\ R.}{7}$ igitur vt 100 --- $\frac{2\ R}{7}$ ad 100 -- 1 R ita 8 ad 3. ideoque productus ſub extremis 300 --- $\frac{6\ R}{7}$ æquabitur producto ſub mediis 800 -- 8 R. ac proinde poſt debitam reductionem 1 R ſiue maior primæ diuiſionis eſt. 70. minor autem eiuſdem diuiſionis eſt 30. partes vero ſecundæ diuiſionis ſunt 80 & 20.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & prima ratione C ad D, ſecunda vero F ad G. ponatur A maius ſegmentum primæ, ergo minus erit B -- A. & quia eſt vt C ad D ita A ad minus ſegmentum ſecundæ, erit illud $\frac{D\ A}{C}$. quo ſublato a B reſtat B -- $\frac{D\ A}{C}$ maius ſegmentum ſecundæ. igitur vt B -- $\frac{DA}{C}$ ad B -- A ita F ad G. ac propterea G B -- $\frac{G\ D\ A}{C}$ æquatur F B -- F A. ergo poſt debitam reductionem A æqualis eſt $\frac{C F B --- G B C}{C F --- G D}$

Hinc Canon.

Multiplica priorem terminum primæ proportionis datæ per differentiam terminorum ſecundæ proportionis, & productum planum duc in quantitatem diuidendam: natum ex hac multiplicatione ſolidum diuide per id quo productus priorum terminorum vtriuſque proportionis ſuperat productum poſteriorum, & habebis maiorem numerum primæ diuiſionis, vnde reliqui non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

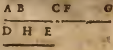
Sit data linea A B diuidenda bis in duo ſegmenta, puta in punctis G & H ita vt maius ſegmentum primæ diuiſionis A G ad minus ſegmentum

Hinc Canon.

Multiplica quantitatem [addendam per poſterio rm terminum rationis & detrahendum per priorem]: ſummam prod uctorum diuide per differentiam terminorum proportionis datæ, habebiſque quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint datæ duæ lineæ A B, B C. oporteat autem inuenire alteram cui addendo A B, & detrahendo B C, ſumma ad reſiduum, ſit vt D E ad D H. Fiat vt D E ad D H ita A B ad C F. tùm fiat quoque vt H E ad D E ita B F ad B G. Dico B C eſſe lineam quæſitam cui addita A B & detracta B G facit ſummam A G ad reſiduum C G in ratione data D E ad D H. Nam cum ſit vt H E ad D E ita B F ad B G, erit inuertendo vt D E ad H E ita B G ad B F. & per conuerſionem rationis vt D E ad D H ita B G ad F C. Sed factum eſt vt D E ad D H ita A B ad C F. ergo vt A B ad C F ita B G ad F G. & permutando vt A B ad B G ita C F ad F G. & componendo vt A G ad B G ita C G ad F G. & permutando vt A G ad C G ita B G ad F G. Sed iam probatum eſt iſtam proportionem B G ad F G eſſe æqualem A B ad C F, & hanc A B ad C F iſti D E ad D H. ergo A G ad C G eſt vt D E ad D H. & ita inuenta eſt linea B G quæ addita A B & a qua detracta B C, facit ſummam A G ad reſiduum C G in ratione data D E ad D H quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO XII.

Datam quantitatem diuidere bis in duo ſegmenta ita vt vnum ex prima diuiſione ad vnum è ſecunda habeat rationem datam: at vero reliquum ſecundæ ad reliquum primæ datam quoque habeat rationem.

ESto datus numerus 100. bis diuidendus in duos, ita ut maior ex prima diuiſione ad minorem è ſecunda ſit vt 7 ad 2: at vero & maior ſecundæ diuiſionis ad minorē primæ, Sit in ratione 8 ad 3.

Ponatur major primæ diuiſionis 1 R, ergo minor diuiſionis eiuſdem erit 100---1 R. Et quia maior primæ diuiſionis ad minorem ſecundæ eſt vt 7 ad 2, erit minor ſecundæ $\frac{2\ R.}{7}$ & proinde major eiuſdem diuiſionis. erit 100--- $\frac{2\ R.}{7}$ igitur vt 100 --- $\frac{2\ R}{7}$ ad 100 -- 1 R ita 8 ad 3. ideoque productus ſub extremis 300 --- $\frac{6\ R}{7}$ æquabitur producto ſub mediis 800-- 8 R. ac proinde poſt debitam reductionem 1 R ſiue maior primæ diuiſionis eſt. 70. minor autem eiuſdem diuiſionis eſt 30. partes vero ſecundæ diuiſionis ſunt 80 & 20.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & prima ratione C ad D, ſecunda vero F ad G. ponatur A maius ſegmentum primæ, ergo minus erit B --A. & quia eſt vt C ad D ita A ad minus ſegmentum ſecundæ, erit illud $\frac{D\ A}{C}$. quo ſublato a B reſtat B--$\frac{D\ A}{C}$ maius ſegmentum ſecundæ. igitur vt B--$\frac{DA}{C}$ ad B--A ita F ad G. ac propterea G B-- $\frac{G\ D\ A}{C}$ æquatur F B --F A. ergo poſt debitam reductionem A æqualis eſt

$$\frac{CFB --- GBC}{CF --- GD}$$

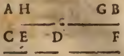
Hinc Canon.

Multiplica priorem terminum primæ proportionis datæ per differentiam terminorum ſecundæ proportionis, & productum planum duc in quantitatem diuidendam: natum ex hac multiplicatione ſolidum diuide per id quo productus priorum terminorum vtriuſque proportionis ſuperat productum poſteriorum, & habebis maiorem numerum primæ diuiſionis, vnde reliqui non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda bis in duo ſegmenta, puta in punctis G & H ita vt maius ſegmentum primæ diuiſionis A G ad minus ſegmentum

gmentum ſecundæ A H, ſit in ratione C D ad C E. at vero B H maius ſegmentum ſecundæ ad B G minus ſegmentum primæ ſit in ratione data C F ad C D. Fiat vt E F ad D F ita A B ad A G, dico A G fore maius ſegmentum primæ diuiſionis: ſi autem fiat vt C D ad C E. ita A G ad A H duo ſegmenta ſecundæ diuiſionis fore A H, H B. Quoniam enim eſt vt C D ad C E ita A G ad A H, erit per conuerſionem rationis vt C D ad E D ita A H ad G H. ſed factum eſt vt E F ad D F ita A B ad A G, ergo diuidendo vt E D ad D F ita B G ad A G. igitur quoniam eſt vt C D ad E D ita A G ad G H, & vt E D ad D F ita B G ad A G, erit perturbando vt C D ad D F ita B G ad G H & inuertendo vt D F ad C D ita G H ad B G. & componendo vt F C ad C D ita H B ad G B ergo maius ſegmentum ſecundæ diuiſionis H B ad minus primæ G B eſt in ratione data F C ad C D. Sed & maius primæ A G ad minus ſecundæ A H eſt etiam in ratione data C D ad C D. ergo tota A B ſecta eſt bis in punctis G & H, ita vt ſegmenta ad ſe inuicem habeant rationem datam, quod erat faciendum.



Scholium.

Aliter potuiſſet inſtitui operatio data quantitate diuidenda B & prima ratione B ad C, ſecunda autem B ad D, & ponendo primum ſegmentum primæ diuiſionis A. Hinc enim ſequitur ſecundum ſegmentum diuiſionis eiuſdem fore B---A. Et quia vt primum primæ ad ſecundum ſecundæ eſt vt B ad C, erit ſecundum ſecundæ $\frac{C\,A}{B}$ igitur ſi illud auferas ex B erit primum ſecundæ B.--$\frac{C\,A}{B}$ ſupereſt ergo vt iſtud primum ſecundæ ad ſecundum primæ ſupra inuentum ſit in ratione data B ad D. quo poſito productus ſub extremis D B---$\frac{D\,A\,C}{B}$ æquabitur producto ſub mediis B quadr. ----A B. & poſt debitam reductionem D B quadr.----D A C, æquatur B cub. ---- A B quadr. & A æqualis eſt

E

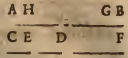
$\frac{B\ cub. - D\ B\ quadr.}{B\ quadr. - D\ C}$ Quod vt aliquantulum extricetur fiat vt B ad D ita C ad aliud quod ſit Y fiet A æqualis $\frac{B\ quadr. - D\ B}{B - Y}$ vnde naſcetur nouus canon & noua effectio geometrica.

Propositio XIII.

Datam quantitatem diuidere ter in duo ſegmenta, ita vt vnum ex prima diuiſione ad vnum è ſecunda datam habeat rationem: at vero reliquum è ſecunda ad vnum ex tertia datum quoque habeat rationem: & rurſus reliquum ex tertia ad reliquum è prima datam etiam habeat rationem.

ESto datus numerus 60 diuidendus, & prima ratio ſit 60 ad 30, ſecunda 60 ad 20, tertia autem 60 ad 15. (ſi datæ rationes non habeant terminum antecedentem numero dato æqualem, facile poſſunt ad hanc æqualitatem reuocari per regulam auream) ponatur autem primum ſegmentum primæ diuiſionis 1 R, ergo alterum erit 60 --- 1 R. & quia primum ſegmentum primæ diuiſionis ad ſecundum ſecundæ eſt vt 60 ad 30, ſi fiat vt 60 ad 30 ita 1 R ad aliud, habebitur ſecundum ſegmentum ſecundæ $\frac{30\ R.}{60}$ igitur primum ſegmentum ſecundæ erit $60 - \frac{30\ R.}{60}$ ac proinde ſi fiat vt 60 ad 20, ita iſtud primum ſegmentum diuiſionis ſecundæ ad aliud, fiet ſecundum ſegmentum tertiæ diuiſionis $\frac{72000 - 600\ R.}{3600}$ ergo primum erit $\frac{44000 + 600\ R.}{3600}$ At primum iſtud tertiæ ad ſecundum primæ, qui eſt 60 --- 1 R eſt vt 60 ad 15. igitur productus ſub extremis

gmentum ſecundæ A H, ſit in ratione C D ad C E. at vero B H maius ſegmentum ſecundæ ad B G minus ſegmentum primæ ſit in ratione data C F ad C D. Fiat vt E F ad D F ita A B ad A G, dico A G fore maius ſegmentum primæ diuiſionis: ſi autem fiat vt C D ad C E. ita A G ad A H duo ſegmenta ſecundæ diuiſionis fore A H, H B. Quoniam enim eſt vt C D ad C E ita A G ad A H, erit per conuerſionem rationis vt C D ad E D ita A H ad G H. ſed factum eſt vt E F ad D F ita A B ad A G, ergo diuidendo vt E D ad D F ita B G ad A G. igitur quoniam eſt vt C D ad E D ita A G ad G H, & vt E D ad D F ita B G ad A G, erit perturbando vt C D ad D F ita B G ad G H & inuertendo vt D F ad C D ita G H ad B G. & componendo vt F C ad C D ita H B ad G B ergo maius ſegmentum ſecundæ diuiſionis H B ad minus primæ G B eſt in ratione data F C ad C D. Sed & maius primæ A G ad minus ſecundæ A H eſt etiam in ratione data C D ad C D. ergo tota A B ſecta eſt bis in punctis G & H, ita vt ſegmenta ad ſe inuicem habeant rationem datam, quod erat faciendum.



Scholium.

Aliter potuiſſet inſtitui operatio data quantitate diuidenda B & prima ratione B ad C, ſecunda autem B ad D, & ponendo primum ſegmentum primæ diuiſionis A. Hinc enim ſequitur ſecundum ſegmentum diuiſionis eiuſdem fore B--A. Et quia vt primum primæ ad ſecundum ſecundæ eſt vt B ad C, erit ſecundum ſecundæ $\frac{C\ A}{B}$ igitur ſi illud auferas ex B erit primum ſecundæ $B -- \frac{C\ A}{B}$ ſupereſt ergo vt iſtud primum ſecundæ ad ſecundum primæ ſupra inuentum ſit in ratione data B ad D. quo poſito productus ſub extremis $D\,B --- \frac{D\ A\ C}{B}$ æquabitur producto ſub mediis B quadr. ---A B & poſt debitam reductionem D B quadr.---D A C, æquatur B cub. --- A B quadr. & A æqualis eſt

Hinc Canon.

Reductio taliter proportiones datas vt terminus antecedens illarum ſit quantitas diuidenda, tum conſequentes terminos ſecundæ & tertiæ rationis multiplica inter ſe, productumque diuide per quantitatem diuidendam & quotientem adde interuallo numeri diuidendi & conſequentis termini proportionis tertiæ, ſummamque ſerua. Deinde ſolidum ſub tribus terminis conſequentibus proportionum datarum diuide per quadratum numeri diuidendi & quotientem ſerua. Poſtremo fiat vt quotiens ſeruatus plus numero diuidendo ad numerum diuidendum, ita ſumma ſeruata ad aliud, & habebis primum ſegmentum diuiſionis primæ, vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto linea A B ter diuidenda, ſic vt maius ſegmentum primæ diuiſionis ad minus ſecundæ ſit vt A B ad A z; ſegmentum autem maius ſecundæ ad minus tertiæ, vt A B ad A L: ac tandem ſegmentum maius tertiæ ad minus primæ, vt A B ad B T. ſuper A B tamquam ſemidiametro, fiat ſemicirculus C B S, & ſuper eadem A B tamquam diametro, deſcribatur ſemicirculus B K A. tùm ex puncto L ducatur L K perpendiculariter ad A B & nectatur B K. deinde facto ſuper B T ſemicirculo ſecante B K in M, demittatur ex M perpendicularis M N ad ipſam A B. præterea ſuper A C æquali A B ducatur circulus integer, & ſumptæ C 3 & C 4 æquales A L & B T, ſint diametri duorum circulorum C E 3, C H 4: inſcriptaque C D æquali A Z nectantur D A & E 3. tùm ſumpta C F æquali C E, erigatur F G perpendicularis ipſi C A, & ducta G C producatur vſque ad H ex quo ducatur H I parallela F G, nectaturque I N & huic I N parallela fiat C O. Dico A O eſſe primum ſegmentum diuiſionis primæ, & O B ſecundum: Q P primum ſegmentum ſecundæ, & A P ſecundum: B S primum ſegmentum tertiæ & S A ſecundum.

Producatur

$\frac{2160000 + 900\,R}{3600}$ erit æquale producto ſub medijs $3600 - 60\,R$, ergo 1 R eſt 48 ſegmentum primum, & ſecundum erit 12. ſegmenta ſecundæ diuiſionis ſunt 36, 24, ſegmenta vero tertiæ 48, 12.

Per Algebram ſpecioſam data B quantitate diuidenda, detur prima ratio B ad C, ſecunda B ad D, tertia vero B ad F, & ponatur A primum ſegmentum primæ diuiſionis. ergo B -- A erit ſecundum. Si autem fiat vt B ad C ita A ad aliud, habebitur $\frac{C\,A}{B}$ pro ſecundo ſegmento ſecundæ primum autem erit $\frac{B\ \text{quadr.} - C\,A}{B}$. Iam fiat vt B ad D ita iſtud primum ſecundæ ad aliud, & extabit ſecundum tertiæ $\frac{D\,B\ \text{quadr.} - D\,C\,A}{B\ \text{quadr.}}$ & primum naſcetur per ſubſtractionem iſtius ex B eritque $\frac{B\ \text{cub.} - D\,B\ \text{quadr.} + D\,C\,A}{B\ \text{quadr.}}$ hoc ad ſecundum primæ eſt vt B ab F. igitur illud ſecundum primæ eſt $\frac{F\,B\ \text{cub.} - F\,D\,B\ \text{quadr.} + F\,D\,C\,A}{B\ \text{cubus}}$. Sed illud idem iam ſupra inuentum eſt B -- A ergo eſt æquatio inter illa, duo ac proinde B quadr. quadr. -- A B cub. æquatur F B cub. - F D quadr. † F D C A. igitur B quadr. quadr. † F D B quadr. -- F B cub. æqualia ſunt A B cub. † F D C A. & fit A æqualis $\frac{B\ \text{quadr. quadr.} + F\,D\,B\ \text{quadr.} - F\,B\ \text{cub.}}{B\ \text{cub.} + F\,D\,C}$.

Et ſi feceris vt quadratum B ad planum rectangulum D C ita F ad aliud quod ſit Y erit D C F æquale Y B quadr. igitur diuidendo omnia per B quadr. A æquatur $\frac{B\ \text{quadr.} + F\,D - F\,B}{B + Y}$ & iterum ſi fiat vt B ad F ita D ad aliud quod ſit Z, erit B Z æquale F D ergo A æqualis eſt. $\frac{B\ \text{quadr.} + B\,Z - B\,F}{B + Y}$

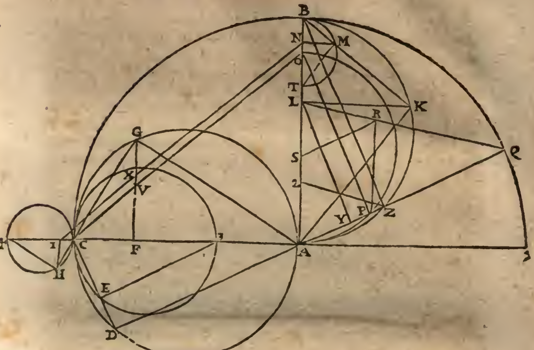
Hinc Canon.

Reductio taliter proportiones datas vt terminus antecedens illarum ſit quantitas diuidenda, tum conſequentes terminos ſecundæ & tertiæ rationis multiplica inter ſe, productumque diuide per quantitatem diuidendam & quotientem adde interuallo numeri diuidendi & conſequentis termini proportionis tertiæ. ſummamque ſerua. Deinde ſolidum ſub tribus terminis conſequentibus proportionum datarum diuide per quadratum numeri diuidendi & quotientem ſerua. Poſtremo fiat vt quotiens ſeruatus plus numero diuidendo ad numerum diuidendum, ita ſumma ſeruata ad aliud, & habebis primum ſegmentum diuiſionis primæ, vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto linea A B ter diuidenda, ſic vt maius ſegmentum primæ diuiſionis ad minus ſecundæ ſit vt A B ad A Z; ſegmentum autem maius ſecundæ ad minus tertiæ, vt A B ad A L : ac tandem ſegmentum maius tertiæ ad minus primæ, vt A B ad B T. ſuper A B tamquam ſemidiametro, fiat ſemicirculus C B S, & ſuper eadem A B tamquam diametro, deſcribatur ſemicirculus B K A. tùm ex puncto L ducatur L K perpendiculariter ad A B & nectatur B K. deinde facto ſuper B T ſemicirculo ſecante B K in M, demittatur ex M perpendicularis M N ad ipſam A B. præterea ſuper A C æquali A B ducatur circulus integer, & ſumptæ C 3 & C 4 æquales A L & B T, ſint diametri duorum circulorum C E 3, C H 4 : inſcriptaque C D æquali A Z nectantur D A & E 3. tùm ſumpta C F æquali C E, erigatur F G perpendicularis ipſi C A, & ducta G C producatur vſque ad H ex quo ducatur H I parallela F G, nectaturque I N & huic I N parallela fiat C O. Dico A O eſſe primum ſegmentum diuiſionis primæ, & O B ſecundum : Q P primum ſegmentum ſecundæ, & A P ſecundum : B S primum ſegmentum tertiæ & S A ſecundum.

Producatur



Producatur ènim D A vſquè ad Q, èrit A Z æqualis C D, tùm deſcribatur ſemicirculus ſuper AO ſecans A Q in P, nectâturq; Z B &PO & ducatur L Y ipſis parallela & PR parallela AB & RS parallela A Z, & Z 2 parallela R L. Quia igitur R S parallela eſt P A & Z 2 parallela R L, erunt duo triangula Z A 2 & R S L æquiangula, ergo vt A Z ad A 2 ita RS ad SL, & permutando, vt A Z ad RS (hoc eſt A P) ita A 2 ad SL. Sed vt A Z ad A P, ita A B (ſeu CA) ad A O. & vt C A ad A O ita C F ad F V. igitur vt C F ad F V, ita A 2 ad S L. eſt autem C F æqualis A Y, quia eſt vt C 3 ad C E (hoc eſt C F) ita A L ad A Y, igitur quoniam C 3 ſumpta eſt æqualis A L, erit C F æqualis A Y ergo vt A Y ad F V ſic A 2 ad S L. & permutando vt A Y ad A 2 ſic F V ad S L. Eſt vero A Y æqualis A 2, ſiquidem vt B A ad A L ſic A Z ad A Y: itemque vt B A (hoc eſt A Q) ad A L, ita A Z ad A 2. ergo A Y eſt æqua-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

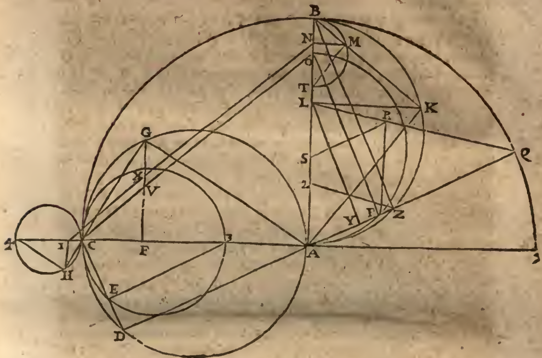
lis A 2. & proinde cum ſit vt A Y ad A 2 ita F V ad S L, erit F V æqualis S L.

Sed vt F V ad V X ita eſt F C ad C I ergo vt F C ad C I ſic S L ad V X (hoc eſt O N, ſunt enim V X & O N parallelæ inter parallelas) ſed vt F C ad C I ita eſt C A ad C 4 (nam cum G C H ſit linea recta, erunt iſta duo triangula C G F & C H I æquiangula, ergo vt C G ad C F ita C H ad C I. Sed vt A C ad C G ita 4 C ad H C : ergo vt C A ad C F H C ad C I) ergo vt C A ad 4 C ita S L ad O N. ac proinde cum C A æquetur A B & 4 C æquetur B T, erit quoque vt S L ad O N ita A B ad B T. Sed triangula A B K & T B M ſunt æquiangula, ſiquidem T M & A K ſunt perpendiculares eidem B K : igitur vt A B ad B K ita T B ad B M. & permutando vt A B ad B T ita B K ad B M. at L K & N B perpendiculares ſunt A B, ergo vt B K ad B M ita B L ad B N. igitur vt A B ad B T ita B L ad B N. proinde vt S L ad O N ita L B ad B N & permutando vt S L ad L B ita O N ad N B. & componendo vt B S ad L B ita O B ad N B. & permutando vt B S ad O B ita L B ad N B. ſed mox probatum eſt vt L B ad N B ita A B ad B T. ergo vt B S ad O B ita A B ad B T. cum igitur A B ad B T ſit vt primum ſegmentum tertiæ ad ſecundum ſegmentum primæ, erit S B primum ſegmentum tertiæ, quod ad O B ſecundum ſegmentum primæ habet rationem datam. Præterea eſt vt P Q ad P R (hoc eſt A S) ſeu vt primum ſegmentum ſecundæ ad ſecundum tertiæ ita A Q (hoc eſt A B) ad A L eſt autem A B ad A L data ratio primi ſegmenti ſecundæ ad ſecundum tertiæ : ac tandem eſt vt A O primum ſegmentum primæ ad A P ſecundum ſegmentum ſecundæ, ita (propter æquianguleitatem triangulorum A B Z & A O P) A B ad A Z, quæ eſt data ratio. igitur diuiſa eſt A B ter ſecundum omnes proportiones datas, quod erat demonſtrandum.

Propositio XIV.

Hoc idem problema alia ratione abſoluere.

Detur idem numerus 60 diuidendus ter ita vt prima pars primæ diuiſionis ad ſecundam ſecundæ ſit vt 60 ad 30. & prima ſe-



Producatur enim D A vſquè ad Q, erit A Z æqualis C D, tùm deſcribatur ſemicirculus ſuper A O ſecans A Q in P, nectáturq; Z B &PO & ducatur L Y ipſis parallela & PR parallela AB & RS parallela A Z, & Z 2 parallela R L. Quia igitur R S parallela eſt P A & Z 2 parallela R L, erunt duo triangula Z A 2 & R S L æquiangula, ergo vt A Z ad A 2 ita RS ad SL, & permutando, vt A Z ad RS (hoc eſt A P) ita A 2 ad SL. Sed vt A Z ad A P, ita A B (ſeu CA) ad A O. & vt CA ad AO ita C F ad FV. igitur vt CF ad FV, ita A 2 ad SL. eſt autem CF æqualis A Y, quia eſt vt C 3 ad CE (hoc eſt CF) ita A L ad A Y, igitur quoniam C 3 ſumpta eſt æqualis A L, erit C F æqualis A Y ergo vt A Y ad F V ſic A2 ad S L. & permutando vt A Y ad A 2 ſic F V ad S L. Eſt vero A Y æqualis A 2, ſiquidem vt B A ad A L ſic A Z ad A Y: itemque vt B A (hoc eſt A Q) ad A L, ita A Z ad A 2. ergo A Y eſt æqua-

ſis A 2. & proinde cum ſit vt A Y ad A 2 ita F V ad S L, erit F V æqualis S L.

Sed vt F V ad V X ita eſt F C ad C I ergo vt F C ad C I ſic S L ad V X (hoc eſt O N, ſunt enim V X & O N parallelæ inter parallelas) ſed vt F C ad C I ita eſt C A ad C 4 (nam cum G C H ſit linea recta, erunt iſta duo triangula C G F & C H I æquiangula, ergo vt C G ad C F ita C H ad C I. Sed vt A C ad C G ita 4 C ad H C: ergo vt C A ad C F H C ad C I) ergo vt C A ad 4 C ita S L ad O N. ac proinde cum C A æquetur A B & 4 C æquetur B T, erit quoque vt S L ad O N ita A B ad B T. Sed triangula A B K & T B M ſunt æquiangula, ſiquidem T M & A K ſunt perpendiculares eidem B K: igitur vt A B ad B K ita T B ad B M. & permutando vt A B ad B T ita B K ad B M. at L K & N B perpendiculares ſunt A B, ergo vt B K ad B M ita B L ad B N. igitur vt A B ad B T ita B L ad B N. proinde vt S L ad O N ita L B ad B N & permutando vt S L ad L B ita O N ad N B. & componendo vt B S ad L B ita O B ad N B. & permutando vt B S ad O B ita L B ad N B. ſed mox probatum eſt vt L B ad N B ita A B ad B T. ergo vt B S ad O B ita A B ad B T. cum igitur A B ad B T ſit vt primum ſegmentum tertiæ ad ſecundum ſegmentum primæ, erit S B primum ſegmentum tertiæ, quod ad O B ſecundum ſegmentum primæ habet rationem datam. Præterea eſt vt P Q ad P R (hoc eſt A S) ſeu vt primum ſegmentum ſecundæ ad ſecundum tertiæ ita A Q (hoc eſt A B) ad A L eſt autem A B ad A L data ratio primi ſegmenti ſecundæ ad ſecundum tertiæ: ac tandem eſt vt A O primum ſegmentum primæ ad A P ſecundum ſegmentum ſecundæ, ita (propter æquianguleitatem triangulorum A B Z & A O P) A B ad A Z, quæ eſt data ratio. igitur diuiſa eſt A B ter ſecundum omnes proportiones datas, quod erat demonſtrandum.

Propositio XIV.

Hoc idem problema alia ratione abſoluere.

DEtur idem numerus 60 diuidendus ter ita vt prima pars primæ diuiſionis ad ſecundam ſecundæ ſit vt 60 ad 30. & prima ſe-

cundæ ad ſecundam tertiæ vt 60 ad 30. & prima tertiæ ad ſecundam primæ vt 240 ad 60. Ponatur prima primæ 1 R, ergo ſecunda 60 -- 1 R. tum fiat vt 60 ad 30 ſic 1 R ad aliud, & habebitur ſecunda ſecundæ $\frac{30\ \text{R}}{60}$. igitur prima ſecundæ erit $60 - \frac{30\ \text{R}}{60}$. quæ ad ſecundam debet eſſe vt 60 ad 20, ac proinde ſecunda tertiæ eſt $\frac{72000 - 600\ \text{R}}{3600}$ ergo prima erit $\frac{144000 + 600\ \text{R}}{3600}$. hæc igitur ad 60 -- 1 R ſe habet vt 240 ad 60. ergo productus ſub extremis $\frac{864000 + 36000\ \text{R}}{3600}$ æquatur producto ſub mediis. 14400 -- 240 R. ac proinde 1 R eſt 48 vt ſupra. partes primæ diuiſionis ſunt 48. 12. ſecundæ 36. 24. tertiæ 48. 12.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & primâ ratione B ad C, ſecunda B ad D, & tertia F ad B, ponatur A pro primo ſegmento primæ diuiſionis, erit ergo B -- A ſecundum. igitur ſi fiat vt B ad C ita A ad aliud, habebitur $\frac{\text{C A}}{\text{B}}$ ſecundum ſegmentum ſecundæ diuiſionis, vnde primum erit $\frac{\text{B quadr.} - \text{C A}}{\text{B}}$. Si igitur fiat vt B ad D ita iſtud ſegmentum mox inuentum ad aliud, habebis $\frac{\text{D B quadr.} - \text{D C A}}{\text{B quadr.}}$ pro ſecundo ſegmento tertiæ diuiſionis, quo ſublato ex B reſtabit primum ſegmentum tertiæ diuiſionis $\frac{\text{B cub.} + \text{D C A} - \text{D B quadr.}}{\text{B quadr.}}$ quod ad ſecundum ſegmentum primæ diuiſionis B -- A habet rationem eamdem quam F ad B. ergo productus ſub extremis $\frac{\text{B quadr. quadr.} + \text{B D C A} - \text{D B cub.}}{\text{B. quadr.}}$ æquatur producto ſub mediis F B -- F A. ac proinde F B cub. --- F A B quadr. æqualis eſt B quadr. quadr. + B D C A -- D B cub. er-

go, A æquabitur $\frac{\text{F B cub.} \dagger \text{D B cub.} - \text{B quadr. quadr.}}{\text{B D C} \dagger \text{F B quadr.}}$

Si autem feceris vt quadratum B ad planum B D ita C ad aliud, quod ſit L, erit (diuidendo omnia per B quadr.) A æqualis $\frac{\text{F B} \dagger \text{D B} - \text{B quadr.}}{\text{L} \dagger \text{F}}$

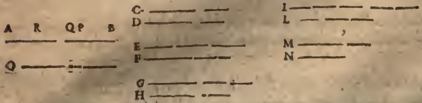
Hinc Canon.

Reducito rationes datas taliter vt quantitas data in duabus prioribus proportionibus ſit antecedens, & in poſtrema proportione ſit conſequens: deinde quantitatem diuidendam multiplica per primum terminum tertiæ rationis auctum ſecundo termino ſecundæ, ex producto, tolle quadratum quantitatis diuidendæ, & reſiduum ſerua. Tum ducito poſteriores terminos primæ & ſecundæ rationis inter ſe, productumque diuide per quantitatem diuidendam, & per quotientem auctum priore termino tertiæ rationis diuide reſiduum ſupra ſeruatum, habebiſque primum ſegmentum diuiſionis primæ, vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data A B linea ter diuidenda in punctis R P Q tali ratione, vt primum ſegmentum A R primæ diuiſionis ad Q B ſecundum ſegmentum diuiſionis ſecundæ, habeat rationem C ad D: ſegmentum autem primum ſecundæ diuiſionis A Q ad P B ſecundum ſegmentum tertiæ diuiſionis, ſit vt E ad F: ac tandem A P ſegmentum primum tertiæ diuiſionis ad R B ſecundum ſegmentum primæ diuiſionis, ſit vt G ad H.

Fiat vt C ad D. ita A B ad I. & vt E ad F ita A B ad L. & vt H ad G ita A B ad O. Deinde fiat rurſus vt A B ad L ita I ad M.



Ac tandem vt compoſita ex M & O ad O plus L minus A B, ſic A B ad

cundæ ad ſecundam tertiæ vt 60 ad 20; & prima tertiæ ad ſecundam primæ vt 240 ad 60. Ponatur prima primæ 1 R, ergo ſecunda 60 -- 1 R. tum fiat vt 60 ad 30 ſic 1 R ad aliud, & habebitur ſecunda ſecundæ $\frac{30\ R}{60}$. igitur prima ſecundæ erit $60 - \frac{30\ R}{60}$. quæ ad ſecundam debet eſſe vt 60 ad 20, ac proinde ſecunda tertiæ eſt $\frac{72000 - 600\ R}{3600}$ ergo prima erit $\frac{144000 + 600\ R}{3600}$. hæc igitur ad 60 -- 1 R ſe habet vt 240 ad 60. ergo productus ſub extremis $\frac{864000 + 36000\ R}{3600}$ æquatur producto ſub mediis. 14400 -- 240 R. ac proinde 1 R eſt 48 vt ſupra. partes primæ diuiſionis ſunt 48. 12. ſecundæ 36. 24. tertiæ 48. 12.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & prima ratione B ad C, ſecunda B ad D, & tertia F ad B, ponatur A pro primo ſegmento primæ diuiſionis, erit ergo B -- A ſecundum. igitur ſi fiat vt B ad C ita A ad aliud, habebitur $\frac{C\ A}{B}$ ſecundum ſegmentum ſecundæ diuiſionis, vnde primum erit $\frac{B\ \text{quadr.} - C\ A}{B}$. Si igitur fiat vt B ad D ita iſtud ſegmentum mox inuentum ad aliud, habebis $\frac{D\ B\ \text{quadr.} - D\ C\ A}{B\ \text{quadr.}}$ pro ſecundo ſegmento tertiæ diuiſionis, quo ſublato ex B reſtabit primum ſegmentum tertiæ diuiſionis $\frac{B\ \text{cub.} + D\ C\ A - D\ B\ \text{quadr.}}{B\ \text{quadr.}}$ quod ad ſecundum ſegmentum primæ diuiſionis B -- A habet rationem eamdem quam F ad B. ergo productus ſub extremis $\frac{B\ \text{quadr. quadr.} + B\ D\ C\ A - D\ B\ \text{cub.}}{B.\ \text{quadr.}}$ æquatur producto ſub mediis F B -- F A. ac proinde F B cub. --- F A B quadr. æqualis eſt B quadr. quadr. + B D C A --- D B cub. er-

go, A æquabitur $\frac{F B\ cub. + D B\ cub. - B\ quadr.\ quadr.}{B D C + F B\ quadr.}$

Si autem ſeceris vt quadratum B ad planum B D ita C ad aliud, quod ſit L, erit (diuidendo omnia per B quadr.) A æqualis $\frac{F B + D B - B\ quadr.}{L + F}$

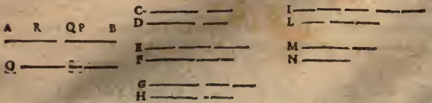
Hinc Canon.

Reducito rationes datas taliter vt quantitas data in duabus prioribus proportionibus ſit antecedens, & in poſtrema proportione ſit conſequens: deinde quantitatem diuidendam multiplica per primum terminum tertiæ rationis auctum ſecundo termino ſecundæ, ex producto, tolle quadratum quantitatis diuidendæ, & reſiduum ſerua. Tum ducito poſteriores terminos primæ & ſecundæ rationis inter ſe, productumque diuide per quantitatem diuidendam, & per quotientem auctum priore termino tertiæ rationis diuide reſiduum ſupra ſeruatum, habebiſque primum ſegmentum diuiſionis primæ, vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data A B linea ter diuidenda in punctis R P Q tali ratione, vt primum ſegmentum A R primæ diuiſionis ad Q B ſecundum ſegmentum diuiſionis ſecundæ, habeat rationem C ad D: ſegmentum autem primum ſecundæ diuiſionis A Q ad P B ſecundum ſegmentum tertiæ diuiſionis, ſit vt E ad F: ac tandem A P ſegmentum primum tertiæ diuiſionis ad R B ſecundum ſegmentum primæ diuiſionis, ſit vt G ad H.

Fiat vt C ad D. ita A B ad I. & vt E ad F ita A B ad L. & vt H ad G ita A B ad O. Deinde fiat rurſus vt A B ad L ita I ad M.



Ac tandem vt compoſita ex M & O ad O plus L minus A B, ſic AB

ad

ad A R. Dico A R fore primum ſegmentum & R B ſecundum primæ diuiſionis: & ſi fiat vt C ad D ita A R ad Q B: & vt E ad F ita A Q ad P B: lineam A B fore diuiſam vt imperatum eſt in punctis B. P. Q.

Nam tribus iectis A B, M, A R, inueniatur quarta proportionalis N. ergo rectangulum A B N æquabitur rectangulo M A R. & quoniam factum eſt vt M plus O ad O plus L minus A B ita A B ita A B ad A R, erit rectangulum ſub extremis M A R plus O A R æquale rectangulo ſub mediis A B O plus A B L minus A B quadrato. & ablato vtrinque rectangulo O A R, reſtabit rectangulum M A R æquale rectangulo A B O plus A B L minus quadrato A B minus rectangulo O A R, & addito vtrobique quadrato A B fiet rectangulum M A R (hoc eſt A B N vt paulo ante oſtenſum eſt) plus quadrato A B æquale rectangulo A B O plus A B L minus rectangulo O A R, & tollendo vtrinque A B L, erit rectangulum A B N plus quadrato A B minus rectangulo A B L æquale rectangulo A B O minus rectangulo O A R. Igitur per reſolutionem analogiſmi (ſeu per 16. ſexti Euclidis) eſt vt N plus A B minus. L. ad A B minus A R, ita O ad A B (ſeu G ad H)

Iam autem propter eamdem altitudinem eſt vt cubus A B ad ſolidum ſub A B quadrato in L ita A B ad L, item vt A B, ſolidum 1, A R, ad ſolidum, L, 1, A R ita A B ad L. ergo vt cubus A B ad ſolidum ſub A B quadrato in L. A B, 1, A R ad ſolidum L, 1, A R. Igitur (per 19. quinti Euclidis) cubus A B minus ſolido A B, 1, A R ad ſolidum ſub A B quadrato in L minus ſolido L, 1, A R, erit vt A B ad L (hoc eſt vt E ad F) ſed factum eſt vt A B ad L ita I ad M, ergo rectangulum A B M æquatur rectangulo L I, ac proinde ſi loco plani L I, accipias planum A B M, erit vt A B ad L ita cubus A B minus ſolido A B, 1, A R, ad ſolidum ſub A B quadrato in L, minus ſolido, A B, M, A R

Sed rectangulum I, A R, eſt æquale rectangulo A B, Q (quia factum eſt vt C ad D, hoc eſt A B ad I, ita A R ad B Q) & rectangulum A B N iam oſtenſum eſt æquale M A R. ergo ſi loco rectanguli I, A R, ſumas rectangulum A B Q: & loco rectanguli M A R, ſumas rectangulum A B N: erit vt A B ad L ita cubus A B minus ſolido ſub quadrato A B in B Q ad ſolidum ſub A B quadrato in L minus ſolido ſub quadrato A B in N. At vt cubus A B minus ſolido

ſub quadrato A B in B Q ad ſolidum ſub quadrato A B in L minus ſolido ſub quadrato A B in N, ita eſt (propter eamdem baſim) A B minus B Q ad L minus N. igitur vt A B ad L ſic A B minus B Q, (ſeu A Q) ad L minus N.

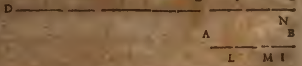
Sed ex conſtructione A B ad L, hoc eſt E ad F, eſt vt A Q ad P B: ergo A Q ad L minus N eſt vt A Q ad P B. ac proinde L minus N æquatur P B. ergo P B plus N æquatur L. & addendo vtrobique A B, erit A B plus P B plus N æqualis A B plus L.) & tollendo vtrinque L & P B, reſtabit A P plus N minus L æqualis A P.

At iam oſtendimus A B plus N minus L ad A B minus A R hoc eſt ad B R eſſe vt G ad H: igitur erit A P primum ſegmentum tertiæ diuiſionis ad B R ſecundum ſegmentum diuiſionis primæ in ratione data G ad H. quod erat demonſtrandum.

Hanc praxim ſuæ iunctam demonſtrationi miſit ad me ante aliquot annos eruditiſſimus Geometra Dominus le Hardy, in qua neſcias an elegantia ſubtilitati, aut ſubtilitas elegantiæ præſtet.

Scholium.

Multis aliis modis idem ploblema abſolui potuit: & quoniam occurrit initii modus non inelegans, quando datur ratio maioris ſegmenti ad minus, illum hic paucis verbis attexam. Data linea diuidenda ſit A B & eſto prima ratio maioris ſegmenti primæ diuiſionis ad minus ſecundæ D C ad E C: (ſuppono autem maioris felicitatis gratia E C æquari A B) ſecunda ratio maioris ſegmenti ſecundæ diuiſionis ad minus tertiæ ſit E C ad C F: tertia denique ratio maioris ſegmenti tertiæ diuiſionis ad minus primæ ſit C F ad C G. Fiat vt E C ad E F ita G C ad C N. tum fiat vt rectangulum ſub C F in compoſitam ex D C & C G ad rectangulum ex D C in F N, ita A B ad A I. erit A I ſegmentum maius primæ diuiſionis cuius praxeos demonſtrationem ſtudioſorum exercitationi relinquo.



PROPOSITIO XV.

Inuenire duas quantitates tales vt vtraque ab altera imperatam accipiens quantitatem, ad reſiduum datam habeat rationem.

SInt inueniendi duo numeri tali ratione vt prior acceptis à poſteriori 2 vnitatibus, ſit reſidui duplus: poſterior vero acceptis à priore vnitatibus 18, ſit triplus reſidui. Ponatur 1 R pro priori numero igitur 1 R † 2 erit reſidui duplus: ac proinde reſiduus eſt $\frac{1R \dagger 2}{2}$. cui ſi reſtituas 2, habebis poſteriorem numerum $\frac{1R \dagger 6}{2}$. Si ergo ille accipiat à priori vnitates 18, fiet $\frac{1R \dagger 42}{2}$ triplus reſidui 1 R -- 18. Quare ſi iſte triplicetur fiet æquatio inter $\frac{1R \dagger 42}{2}$ & 3 R - 54. igitur 1 R ſiue prior numerus eſt 30 & poſterior 18.

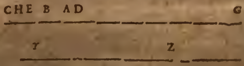
Per Algebram ſpecioſam, datis quantitatibus accipiendis B & C, & ratione prima D ad F, ſecunda autem G ad H. Ponatur A prior quantitas, ergo A † B ſe habet ad reſiduum poſturioris quantitatis vt D ad F. ac proinde iſtud reſiduum eſt $\frac{FA \dagger FB}{D}$. cui ſi reſtituas B & tribuas C, ſumma $\frac{FA \dagger FB \dagger BD \dagger CD}{D}$ ad reſiduum A - C eſt vt G ad H. igitur productus ſub extremis $\frac{HFA \dagger HFB \dagger HBD \dagger HCD}{D}$ æquatur producto ſub mediis G A -- G C. & ita D G A -- D G C eſt æqualis H F A † H F B † H B D † H C D. & fit A æqualis $\frac{DGC \dagger HFB \dagger HBD \dagger HCD}{DG -- HF}$.

Hinc Canon.

Multiplica planum ẽx duobus prioribus terminis proportionum datarium in ſecundam quantitatem accipiendam. deinde planum ex duobus poſterioribus terminis in primam ex quantitatibus accipiendis: tertiò planum ex primo termino primæ rationis in ſecundum ſecundæ ſigillatim per duas quantitates accipiendas: & horum quatuor ſolidorum ſummam ſerua. Tùm priores terminos proportionum datarum duc inter ſe, & poſteriores ſimiliter, ac per iſtorum productorum differentiam, diuide ſeruatam quatuor ſolidorum ſummam, quotiens erit prior quantitas quæſitas vnde poſterior non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea primo accipienda A B & linea ſecundo accipienda C B. ſit prima ratio A B ad D A, & ſecunda C B ad C E. Fiat autem vt A B ad A D ita C E ad C H: item vt C E ad C B ita C B ad D G: ac tandem vt B H ad C G ita C E ad Y. Dico lineam Y eſſe primam ex quæſitis: ſi autem fiat vt A B ad A D, ita Y plus A B ad Z, lineam Z plus A B fore ſecundam quæſitarum: ac



propterea Z plus A C ad Y minus C B eſſe vt C B ad C E. Cum enim ſit Y plus A B ad Z vt A B ad A D, erit permutando vt Y plus A B ad A B, ita Z ad A D. & diuidendo vt Y ad A B ita Z minus A D ad A D. ergo permutando Y ad Z minus A D erit vt A B ad A D. ſed vt A B ad A D ita eſt ex conſtructione C E ad C H. igitur vt Y ad Z minus A D ita C E ad C H. & permutando vt Y ad C E ita Z minus A D ad C H.

Cum autem factum fuerit vt B H ad C G ita C E ad Y, erit inuertendo vt Y ad C E ita C G ad B H. ſed mox oſtenſum eſt eſſe vt Y ad C E ita Z minus A D ad C H: ergo vt A D ad C H ſic C G ad B H igitur per 12 quinti Euclidis vt Z minus A D plus C G, omnes videlicet antecedentes ad C B ſummam omnium conſequentium, ita Y ad C E. ſed Z minus A D plus C G æquatur Z plus C A plus D G: igitur Z plus C A plus D G ad C B eſt vt Y ad

C E

PROPOSITIO XV.

Inuenire duas quantitates tales vt vtraque ab altera imperatam accipiens quantitatem, ad reſiduum datam habeat rationem.

Sint inueniendi duo numeri tali ratione vt prior acceptis à poſteriori 2 vnitatibus, ſit reſidui duplus: poſterior vero acceptis à priore vnitatibus 18, ſit triplus reſidui. Ponatur 1 R pro priori numero igitur 1 R † 2 erit reſidui duplus: ac proinde reſiduus eſt $\frac{1R + 2}{2}$. cui ſi reſtituas 2, habebis poſteriorem numerum $\frac{1R + 6}{2}$. Si ergo ille accipiat à priori vnitates 18, fiet $\frac{1R + 42}{2}$ triplus reſidui 1 R -- 18. Quare ſi iſte triplicetur fiet æquatio inter $\frac{1R + 42}{2}$ & 3 R -- 54. igitur 1 R ſiue prior numerus eſt 30 & poſterior 18.

Per Algebram ſpecioſam, datis quantitatibus accipiendis B & C, & ratione prima D ad F, ſecunda autem G ad H. Ponatur A prior quantitas, ergo A † B ſe habet ad reſiduum poſturioris quantitatis vt D ad F. ac proinde iſtud reſiduum eſt $\frac{FA + FB}{D}$. cui ſi reſtituas B & tribuas C, ſumma $\frac{FA + FB + BD + CD}{D}$ ad reſiduum A -- C eſt vt G ad H. igitur productus ſub extremis $\frac{HFA + HFB + HBD + HCD}{D}$ æquatur producto ſub mediis G A -- G C. & ita D G A -- D G C eſt æqualis H F A † H F B † H B D † H C D. & fit A æqualis

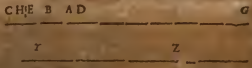
$$\frac{DGC + HFB + HBD + HCD}{DG - HF}.$$

Hinc Canon.

Multiplica planum ex duobus prioribus terminis proportionum datarium in ſecundam quantitatem accipiendam. deinde planum ex duobus poſterioribus terminis in primam ex quantitatibus accipiendis: tertiò planum ex primo termino primæ rationis in ſecundum ſecundæ ſigillatim per duas quantitates accipiendas: & horum quatuor ſolidorum ſummam ſerua. Tùm priores terminos proportionum datarum duc inter ſe, & poſteriores ſimiliter, ac per iſtorum productorum differentiam, diuide ſeruatam quatuor ſolidorum ſummam, quotiens erit prior quantitas quæſitas vnde poſterior non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea primo accipienda A B & linea ſecundo accipienda C B. ſit prima ratio A B ad D A, & ſecunda C B ad C E. Fiat autem vt A B ad A D ita C E ad C H: item vt C E ad C B ita C B ad D G: ac tandem vt B H ad CG ita C E ad Y. Dico lineam Y eſſe primam ex quæſitis: ſi autem fiat vt A B ad A D, ita Y plus A B ad Z, lineam Z plus A B fore ſecundam quæſitarum: ac



propterea Z plus A C ad Y minus C B eſſe vt C B ad C E. Cum enim ſit Y plus A B ad Z vt A B ad A D, erit permutando vt Y plus A B ad A B, ita Z ad A D. & diuidendo vt Y ad A B ita Z minus A D ad A D. ergo permutando Y ad Z minus A D erit vt A B ad A D. ſed vt A B ad A D ita eſt ex conſtructione C E ad C H. igitur vt Y ad Z minus A D ita C E ad C H, & permutando vt Y ad C E ita Z minus A D ad C H.

Cum autem factum fuerit vt B H ad C G ita C E ad Y, erit inuertendo vt Y ad C E ita CG ad B H. ſed mox oſtenſum eſt eſſe vt Y ad C E ita Z minus A D ad C H: ergo vt A D ad C H ſic CG ad B H igitur per 12 quinti Euclidis vt Z minus A D plus CG, omnes videlicet antecedentes ad C B ſummam omnium conſequentium, ita Y ad C E. ſed Z minus A D plus C G æquatur Z plus C A plus D G: igitur Z plus C A plus D G ad C B eſt vt Y ad

C E

CE. ergo rectangulum ſub extremis Z in CE plus CA in CE plus DG in CE æquatur rectangulo ſub mediis CB in Y. at cum factum ſit vt CE ad CB ita CB ad DG, eſt quadratum CB æquale rectangulo CE in DG igitur ſi loco CE in DG ſumas quadratum CB, & illud ſubtrahas ex vtraque parte æquationis mox inuentæ, erit in Z in CE plus CA in CE æquale rectangulo CB in Y minus quadrato CB. ac proinde per reſolutionem analogiſmi (ſeu per 16. ſexti Euclidis) vt Z plus CA ad Y minus CB ita CB ad CE. quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Si volueris immediatè reperire ſecundam quantitatem vteris hoc canone: Planum ſub duobus antecedentibus proportionum terminis multiplica per primam quantitatem accipiendam: deinde planum ex terminis conſequentibus per ſecundam accipiendam: tertiò planum ex primo termino ſecundæ rationis in ſecundum primæ duces in ſummam quantitatum accipiendarum: hæc omnia ſimul addes, & aggregatum illorum diuides per differentiam producti ex antecedentibus terminis proportionum inter ſe, & producti ex conſequentibus: ita enim prodibit in quotiente ſecunda quantitas quæſita, vnde altera non latebit. Ex hoc Canone naſcetur effectio geometrica tantillum diuerſa à præcedente, & quam facilè inuenis ſtudioſus geometra.

Propositio XVI.

Inuenire tres quantitates, vt binæ ſimul ſumptæ efficiant ſummam datam.

Sint inueniendi tres numeri tales vt primus & ſecundus efficiant 20: ſecundus & tertius 30: at vero tertius & primus 40. Ponatur 1 R pro ſumma trium numerorum, ergo 1 R -- 20 erit tertius, & propter eamdem rationem 1 R -- 30 erit primus & 1 R -- 40 erit ſecundus. ſumma horum trium 3 R -- 90 æquantur 1 R: ergo 1 R

H

go, A æquabitur $\frac{\text{F B cub.} + \text{D B cub.} - \text{B quadr. quadr.}}{\text{B D C} + \text{F B quadr.}}$

Si autem feceris vt quadratum B ad planum B D ita C ad aliud, quod ſit L, erit (diuidendo omnia per B quadr.) A æqualis $\frac{\text{F B} + \text{D B} - \text{B quadr.}}{\text{L} + \text{F}}$

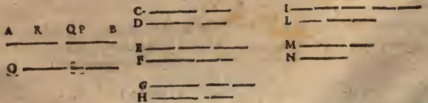
Hinc Canon.

Reducito rationes datas taliter vt quantitas data in duabus prioribus proportionibus ſit antecedens, & in poſtrema proportione ſit conſequens: deinde quantitatem diuidendam multiplica per primum terminum tertiæ rationis auctum ſecundo termino ſecundæ, ex producto, tolle quadratum quantitatis diuidendæ, & reſiduum ſerua. Tum ducito poſteriores terminos primæ & ſecundæ rationis inter ſe, productumque diuide per quantitatem diuidendam, & per quotientem auctum priore termino tertiæ rationis diuide reſiduum ſupra ſeruatum, habebiſque primum ſegmentum diuiſionis primæ, vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data A B linea ter diuidenda in punctis R P Q tali ratione, vt primum ſegmentum A R primæ diuiſionis ad Q B ſecundum ſegmentum diuiſionis ſecundæ, habeat rationem C ad D: ſegmentum autem primum ſecundæ diuiſionis A Q ad P B ſecundum ſegmentum tertiæ diuiſionis, ſit vt E ad F: ac tandem A P ſegmentum primum tertiæ diuiſionis ad R B ſecundum ſegmentum primæ diuiſionis, ſit vt G ad H.

Fiat vt C ad D. ita A B ad I. & vt E ad F ita A B ad L. & vt H ad G ita A B ad O. Deinde fiat rurſus vt A B ad L ita I ad M.



Ac tandem vt compoſita ex M & O ad O plus L minus A B, ſic AB

ad

ad A R. Dico A R fore primum ſegmentum & R B ſecundum primæ diuiſionis: & ſi fiat vt C ad D ita A R ad Q B & vt E ad F ita A Q ad P B : lineam A B fore diuiſam vt imperatum eſt in punctis B. P. Q.

Nam tribus iectis A B, M, A R inueniatur quarta proportionalis N. ergo rectangulum A B N æquabitur rectangulo M A R. & quoniam factum eſt vt M plus O ad O plus L minus A B ita A B ita A B ad A R, erit rectangulum ſub extremis M A R plus O A R æquale rectangulo ſub medijs A B O plus A B L minus A B quadrato. & ablato vtrinque rectangulo O A R, reſtabit rectangulum M A R æquale rectangulo A B O plus A B L minus quadrato A B minus rectangulo O A R, & addito vtrobique quadrato A B fiet rectangulum M A R (hoc eſt A B N vt paulo ante oſtenſum eſt) plus quadrato A B æquale rectangulo A B O plus A B L minus rectangulo O A R, & tollendo vtrinque A B L, erit rectangulum A B N plus quadrato A B minus rectangulo A B L æquale rectangulo A B O minus rectangulo O A R. Igitur per reſolutionem analogiſmi (ſeu per 16. ſexti Euclidis) eſt vt N plus A B minus. L. ad A B minus A R, ita O ad A B (ſeu G ad H)

Iam autem propter eamdem altitudinem eſt vt cubus A B ad ſolidum ſub A B quadrato in L ita A B ad L. item vt A B, ſolidum I, A R, ad ſolidum, L, I, A R ita A B ad L. ergo vt cubus A B ad ſolidum ſub A B quadrato in L. A B, I, A R ad ſolidum L, I, A R. Igitur (per 19. quinti Euclidis) cubus A B minus ſolido A B, I, A R ad ſolidum ſub A B quadrato in L minus ſolido L, I, A R, erit vt A B ad L (hoc eſt vt E ad F) ſed factum eſt vt A B ad L ita I ad M, ergo rectangulum A B M æquatur rectangulo L I, ac proinde ſi loco plani L I, accipias planum A B M, erit vt A B ad L ita cubus A B minus ſolido A B, I, A R, ad ſolidum ſub A B quadrato in L, minus ſolido, A B, M, A R

Sed rectangulum I, A R, eſt æquale rectangulo A B, Q (quia factum eſt vt C ad D, hoc eſt A B ad I, ita A R ad B Q) & rectangulum A B N iam oſtenſum eſt æquale M A R. ergo ſi loco rectanguli I, A R, ſumas rectangulum A B Q: & loco rectanguli M A R, ſumas rectangulum A B N: erit vt A B ad L ita cubus A B minus ſolido ſub quadrato A B in B Q ad ſolidum ſub A B quadrato in L minus ſolido ſub quadrato A B in N. At vt cubus A B minus ſolido

ſub quadrato A B in B Q ad ſolidum ſub quadrato A B in L minus ſolido ſub quadrato A B in N, ita eſt (propter eamdem baſim) A B minus B Q ad L minus N. igitur vt A B ad L ſic A B minus B Q (ſeu A Q) ad L minus N.

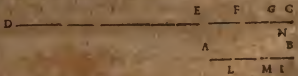
Sed ex conſtructione A B ad L, hoc eſt E ad F, eſt vt A Q ad P B: ergo A Q ad L minus N eſt vt A Q ad P B. ac proinde L minus N æquatur P B. ergo P B plus N æquatur L. & addendo vtrobique A B, erit A B plus P B plus N æqualis A B plus L.; & tollendo vtrinque L & P B, reſtabit A P plus N minus L æqualis A P.

At iam oſtendimus A B plus N minus L ad A B minus A R hoc eſt ad B R eſſe vt G ad H: igitur erit A P primum ſegmentum tertiæ diuiſionis ad B R ſecundum ſegmentum diuiſionis primæ in ratione data G ad H. quod erat demonſtrandum.

Hanc praxim ſuæ iunctam demonſtrationi miſit ad me ante aliquot annos erudiſſimus Geometra Dominus le Hardy, in qua neſcias an elegantia ſubtilitati, aut ſubtilitas elegantiæ præſtet.

Scholium.

Multis aliis modis idem ploblema abſolui potuit: & quoniam occurrit initii modus non inelegans, quando datur ratio maioris ſegmenti ad minus, illum hic paucis verbis attexam. Data linea diuidenda ſit A B & eſto prima ratio maioris ſegmenti primæ diuiſionis ad minus ſecundæ D C ad E C: (ſuppono autem maioris felicitatis gratia E C æquari A B) ſecunda ratio maioris ſegmenti ſecundæ diuiſionis ad minus tertiæ ſit E C ad C F: tertia denique ratio maioris ſegmenti tertiæ diuiſionis ad minus primæ ſit C F ad C G. Fiat vt E C ad E F ita G C ad C N.



tum fiat vt rectangulum ſub C F in compoſitam ex D C & C G ad rectangulum ex D C in F N, ita A B ad A I. erit A I ſegmentum maius primæ diuiſionis cuius praxeos demonſtrationem ſtudioſorum exercitationi relinquo.

ad A R. Dico A R fore primum ſegmentum & R B ſecundum primæ diuiſionis: & ſi fiat vt C ad D ita A R ad Q B: & vt E ad F ita A Q ad P B: lineam A B fore diuiſam vt imperatum eſt in punctis B. P. Q.

Nam tribus iectis A B, M, A R, inueniatur quarta proportionalis N. ergo rectangulum A B N æquabitur rectangulo M A R. & quoniam factum eſt vt M plus O ad O plus L minus A B ita A B ita A B ad A R, erit rectangulum ſub extremis M A R plus O A R æquale rectangulo ſub mediis A B O plus A B L minus A B quadrato. & ablato vtrinque rectangulo O A R, reſtabit rectangulum M A R æquale rectangulo A B O plus A B L minus quadrato A B minus rectangulo O A R, & addito vtrobique quadrato A B fiet rectangulum M A R (hoc eſt A B N vt paulo ante oſtenſum eſt) plus quadrato A B æquale rectangulo A B O plus A B L minus rectangulo O A R, & tollendo vtrinque A B L, erit rectangulum A B N plus quadrato A B minus rectangulo A B L æquale rectangulo A B O minus rectangulo O A R. Igitur per reſolutionem analogiſmi (ſeu per 16. ſexti Euclidis) eſt vt N plus A B minus. L. ad A B minus A R, ita O ad A B (ſeu G ad H)

Iam autem propter eamdem altitudinem eſt vt cubus A B ad ſolidum ſub A B quadrato in L ita A B ad L. item vt A B, ſolidum, I, A R, ad ſolidum, L, I, A R ita A B ad L. ergo vt cubus A B ad ſolidum ſub A B quadrato in L. A B, I, A R ad ſolidum L, I, A R. Igitur (per 19. quinti Euclidis) cubus A B minus ſolido A B, I, A R ad ſolidum ſub A B quadrato in L minus ſolido L, I, A R, erit vt A B ad L (hoc eſt vt E ad F) ſed factum eſt vt A B ad L ita I ad M, ergo rectangulum A B M æquatur rectangulo L I, ac proinde ſi loco plani L I, accipias planum A B M, erit vt A B ad L ita cubus A B minus ſolido A B, I, A R, ad ſolidum ſub A B quadrato in L, minus ſolido, A B, M, A R

Sed rectangulum I, A R, eſt æquale rectangulo A B, Q (quia factum eſt vt C ad D, hoc eſt A B ad I, ita A R ad B Q) & rectangulum A B N iam oſtenſum eſt æquale M A R. ergo ſi loco rectanguli I, A R, ſumas rectangulum A B Q: & loco rectanguli M, A R, ſumas rectangulum A B N: erit vt A B ad L ita cubus A B minus ſolido ſub quadrato A B in B Q ad ſolidum ſub A B quadrato in L minus ſolido ſub quadrato A B in N. At vt cubus A B minus ſolido

G

ſub quadrato A B in B Q ad ſolidum ſub quadrato A B in L minus ſolido ſub quadrato A B in N, ita eſt (propter eamdem baſim) A B minus B Q ad L minus N. igitur vt A B ad L ſic A B minus B Q (ſeu A Q) ad L minus N.

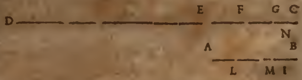
Sed ex conſtructione A B ad L, hoc eſt E ad F, eſt vt A Q ad P B: ergo A Q ad L minus N eſt vt A Q ad P B. ac proinde L minus N æquatur P B. ergo P B plus N æquatur L. & addendo vtrobique A B, erit A B plus P B plus N æqualis A B plus L.) & tollendo vtrinque L & P B, reſtabit A P plus N minus L æqualis A P.

At iam oſtendimus A B plus N minus L ad A B minus A R hoc eſt ad B R eſſe vt G ad H: igitur erit A P primum ſegmentum tertiæ diuiſionis ad B R ſecundum ſegmentum diuiſionis primæ in ratione data G ad H. quod erat demonſtrandum.

Hanc praxim ſuæ iunctam demonſtrationi miſit ad me ante aliquot annos eruditiſſimus Geometra Dominus le Hardy, in qua neſcias an elegantia ſubtilitati, aut ſubtilitas elegantiæ præſtet.

Scholium.

Multis aliis modis idem ploblema abſolui potuit: & quoniam occurrit initii modus non inelegans, quando datur ratio maioris ſegmenti ad minus, illum hic paucis verbis attexam. Data linea diuidenda ſit A B & eſto prima ratio maioris ſegmenti primæ diuiſionis ad minus ſecundæ D C ad E C: (ſuppono autem maioris felicitatis gratia E C æquari A B) ſecunda ratio maioris ſegmenti ſecundæ diuiſionis ad minus tertiæ ſit E C ad C F: tertia denique ratio maioris ſegmenti tertiæ diuiſionis ad minus primæ ſit C F ad C G. Fiat vt E C ad E F ita G C ad C N. tum fiat vt rectangulum



ſub C F in compoſitam ex D C & C G ad rectangulum ex D C in F N, ita A B ad A I. erit A I ſegmentum maius primæ diuiſionis cuius praxeos demonſtrationem ſtudioſorum exercitationi relinquo.

PROPOSITIO XV.

Inuenire duas quantitates tales vt vtraque ab altera imperatam accipiens quantitatem, ad reſiduum datam habeat rationem.

SInt inueniendi duo numeri tali ratione vt prior acceptis à poſteriori 2 vnitatibus, ſit reſidui duplus: poſterior vero acceptis à priore vnitatibus 18, ſit triplus reſidui. Ponatur 1 R pro priori numero igitur 1 R † 2 erit reſidui duplus: ac proinde reſiduus eſt $\frac{1R + 2}{2}$. cui ſi reſtituas 2, habebis poſteriorem numerum $\frac{1R + 6}{2}$. Si ergo ille accipiat à priori vnitates 18, fiet $\frac{1R + 42}{2}$ triplus reſidui 1 R -- 18. Quare ſi iſte triplicetur fiet æquatio inter $\frac{1R + 42}{2}$ & 3 R -- 54. igitur 1 R ſiue prior numerus eſt 30 & poſterior 18.

Per Algebram ſpecioſam, datis quantitatibus accipiendis B & C, & ratione prima D ad F, ſecunda autem G ad H. Ponatur A prior quantitas, ergo A † B ſe habet ad reſiduum poſturioris quantitatis vt D ad F. ac proinde iſtud reſiduum eſt $\frac{FA + FB}{D}$. cui ſi reſtituas B & tribuas C, ſumma $\frac{FA + FB + BD + CD}{D}$ ad reſiduum A -- C eſt vt G ad H. igitur productus ſub extremis $\frac{HFA + HFB + HBD + HCD}{D}$ æquatur producto ſub mediis G A -- G C. & ita D G A -- D G C eſt æqualis H F A † H F B † H B D † H C D. & fit A æqualis

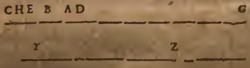
$$\frac{DGC + HFB + HBD + HCD}{DG - HF}.$$

Hinc Canon.

Multiplica planum ēx duobus prioribus terminis proportionum datarium in ſecundam quantitatem accipiendam. deinde planum ex duobus poſterioribus terminis in primam ex quantitatibus accipiendis: tertiò planum ex primo termino primæ rationis in ſecundum ſecundæ ſigillatim per duas quantitates accipiendas: & horum quatuor ſolidorum ſummam ſerua. Tùm priores terminos proportionum datarum duc inter ſe, & poſteriores ſimiliter, ac per iſtorum productorum differentiam, diuide ſeruatam quatuor ſolidorum ſummam, quotiens erit prior quantitas quæſitas vnde poſterior non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea primo accipienda A B & linea ſecundo accipienda C B. ſit prima ratio A B ad D A, & ſecunda C B ad C E. Fiat autem vt A B ad A D ita C E ad C H: item vt C E ad C B ita C B ad D G: ac tandem vt B H ad C G ita C E ad Y. Dico lineam Y eſſe primam ex quæſitis: ſi autem fiat vt A B ad A D, ita Y plus A B ad Z, lineam Z plus A B fore ſecundam quæſitarum: ac



propterea Z plus A C ad Y minus C B eſſe vt C B ad C E. Cum enim ſit Y plus A B ad Z vt A B ad A D, erit permutando vt Y plus A B ad A B, ita Z ad A D. & diuidendo vt Y ad A B ita Z minus A D ad A D. ergo permutando Y ad Z minus A D erit vt A B ad A D. ſed vt A B ad A D ita eſt ex conſtructione C E ad C H. igitur vt Y ad Z minus A D ita C E ad C H. & permutando vt Y ad C E ita Z minus A D ad C H.

Cum autem factum fuerit vt B H ad C G ita C E ad Y, erit inuertendo vt Y ad C E ita C G ad B H. ſed mox oſtenſum eſt eſſe vt Y ad C E ita Z minus A D ad C H: ergo vt A D ad C H ſic C G ad B H igitur per 12 quinti Euclidis vt Z minus A D plus C G, omnes videlicet antecedentes ad C B ſummam omnium conſequentium, ita Y ad C E. ſed Z minus A D plus C G æquatur Z plus C A plus D G: igitur Z plus C A plus D G ad C B eſt vt Y ad

Propositio XV.

Inuenire duas quantitates tales vt vtraque ab altera imperatam accipiens quantitatem, ad reſiduum datam habeat rationem.

SInt inueniendi duo numeri tali ratione vt prior acceptis à poſteriori 2 vnitatibus, ſit reſidui duplus: poſterior vero acceptis à priore vnitatibus 18, ſit triplus reſidui. Ponatur 1 R pro priori numero igitur 1 R † 2 erit reſidui duplus; ac proinde reſiduus eſt $\frac{1R + 2}{2}$. cui ſi reſtituas 2, habebis poſteriorem numerum $\frac{1R + 6}{2}$. Si ergo ille accipiat à priori vnitates 18, fiet $\frac{1R + 42}{2}$ triplus reſidui 1 R -- 18. Quare ſi iſte triplicetur fiet æquatio inter $\frac{1R + 42}{2}$ & 3 R -- 54. igitur 1 R ſiue prior numerus eſt 30 & poſterior 18.

Per Algebram ſpecioſam, datis quantitatibus accipiendis B & C, & ratione prima D ad F, ſecunda autem G ad H. Ponatur A prior quantitas, ergo A † B ſe habet ad reſiduum poſturioris quantitatis vt D ad F. ac proinde iſtud reſiduum eſt $\frac{FA + FB}{D}$. cui ſi reſtituas B & tribuas C, ſumma $\frac{FA + FB + BD + CD}{D}$ ad reſiduum A -- C eſt vt G ad H. igitur productus ſub extremis $\frac{HFA + HFB + HBD + HCD}{D}$ æquatur producto ſub mediis G A -- G C. & ita D G A -- D G C eſt æqualis H F A † H F B † H B D † H C D. & fit A æqualis

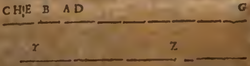
$$\frac{DGC + HFB + HBD + HCD}{DG - HF}.$$

Hinc Canon.

Multiplica planum ex duobus prioribus terminis proportionum datarium in ſecundam quantitatem accipiendam. deinde planum ex duobus poſterioribus terminis in primam ex quantitatibus accipiendis: tertiò planum ex primo termino primæ rationis in ſecundum ſecundæ ſigillatim per duas quantitates accipiendas: & horum quatuor ſolidorum ſummam ſerua. Tùm priores terminos proportionum datarum duc inter ſe, & poſteriores ſimiliter, ac per iſtorum productorum differentiam, diuide ſeruatam quatuor ſolidorum ſummam, quotiens erit prior quantitas quæſitas vnde poſterior non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea primo accipienda A B & linea ſecundo accipienda C B. ſit prima ratio A B ad D A, & ſecunda C B ad C E. Fiat autem vt A B ad A D ita C E ad C H: item vt C E ad C B ita C B ad D G ac tandem vt B H ad C G ita C E ad Y. Dico lineam Y eſſe primam ex quæſitis: ſi autem ſiat vt A B ad A D, ita Y plus A B ad Z, lineam Z plus A B fore ſecundam quæſitarum: ac



propterea Z plus A C ad Y minus C B eſſe vt C B ad C E. Cum enim ſit Y plus A B ad Z vt A B ad A D, erit permutando vt Y plus A B ad A B, ita Z ad A D. & diuidendo vt Y ad A B ita Z minus A D ad A D. ergo permutando Y ad Z minus A D erit vt A B ad A D. ſed vt A B ad A D ita eſt ex conſtructione C E ad C H. igitur vt Y ad Z minus A D ita C E ad C H, & permutando vt Y ad C E ita Z minus A D ad C H.

Cum autem factum fuerit vt B H ad C G ita C E ad Y, erit inuertendo vt Y ad C E ita C G ad B H. ſed mox oſtenſum eſt eſſe vt Y ad C E ita Z minus A D ad C H: ergo vt A D ad C H ſic C G ad B H igitur per 12 quinti Euclidis vt Z minus A D plus C G, omnes videlicet antecedentes ad C B ſummam omnium conſequentium, ita Y ad C E. ſed Z minus A D plus C G æquatur Z plus C A plus D G: igitur Z plus C A plus D G ad C B eſt vt Y ad

C E

CE. ergo rectangulum ſub extremis Z in C E plus CA in C E plus D G in C E æquatur rectangulo ſub mediis C B in Y. at cum factum ſit vt C E ad C B ita C B ad D G, eſt quadratum C B æquale rectangulo C E in D G igitur ſi loco CE in D G ſumas quadratum C B, & illud ſubtrahas ex vtraque parte æquationis mox inuentæ, erit in Z in C E plus C A in CE æquale rectangulo C B in Y minus quadrato C B. ac proinde per reſolutionem analogiſmi (ſeu per 16. ſexti Euclidis) vt Z plus C A ad Y minus C B ita CB ad C E. quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Si volueris immediatè reperire ſecundam quantitatem vteris hoc canone: Planum ſub duobus antecedentibus proportionum terminis multiplica per primam quantitatem accipiendam: deinde planum ex terminis conſequentibus per ſecundam accipiendam: tertiò planum ex primo termino ſecundæ rationis in ſecundum primæ duces in ſummam quantitatum accipiendarum: hæc omnia ſimul addes, & aggregatum illorum diuides per differentiam producti ex antecedentibus terminis proportionum inter ſe, & producti ex conſequentibus: ita enim prodibit in quotiente ſecunda quantitas quæſita, vnde altera non latebit. Ex hoc Canone naſcetur effectio geometrica tantillum diuerſa à præcedente, & quam facile inuenis ſtudioſus geometra.

PROPOSITIO XVI.

Inuenire tres quantitates, vt binæ ſimul ſumptæ efficiant ſummam datam.

SInt inueniendi tres numeri tales vt primus & ſecundus efficiant 20: ſecundus & tertius 30: at vero tertius & primus 40. Ponatur 1 R pro ſumma trium numerorum, ergo 1 R -- 20 erit tertius. & propter eamdem rationem 1 R -- 30 erit primus & 1 R -- 40 erit ſecundus. ſumma horum trium 3 R -- 90 æquantur 1 R: ergo 1 R

ſeu ſumma trium æqualis eſt 45. & attendendo ad poſitiones primus erit 15. ſecundus 5. tertius 25.

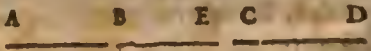
Per Algebram ſpecioſam, data ſumma primæ & ſecundæ quantitatis B, ſumma ſecundæ & tertiæ C, ſumma tertiæ & primæ D, ponatur A ſumma omnium: ergo $A - B$ eſt tertia, & $A - C$ prima, & $A - D$ ſecunda. harum aggregatum $3A - B - C - D$ æquantur A, & proinde A eſt æqualis $\frac{B + C + D}{2}$

Hinc Canon.

Aggregati ſummarum datarum cape dimidium, & habebis ſummam trium, à qua ſingulæ ſummæ ablatæ exhibebunt quantitates quæſitas.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint datæ tres lineæ quarum quælibet duas ex quæſitis continet: A B quidem primam & ſecundam, B C ſecundam & tertiam, C D autem tertiam & primam: quæruntur prima, ſecunda, & tertia ſigillatim, compoſitis illis tribus indirectum, ſine vllo ſpatio intermedio, fit ſumma A D, qua diuiſa bifariam in



E, habetur A E ſumma quæſitarum: nam cum quælibet inter ſummas datas bis accipiatur, certum eſt ſummam A D continere duplum omnium, ergo ſemiſſis A E continebit omnes. ſed A B eſt ſumma ſecundæ & primæ: igitur B E eſt tertia, ſimiliter C D eſt ſumma primæ & tertiæ, ergo cum E D ſit ſumma trium erit E C ſecunda. Clariora ſunt iſta, quam vt fuſiori demonſtratione indigeant.

Propositio XVII.

Inuenire quatuor quantitates, vi ternæ iunctæ efficiant ſummas poſtulatas.

Sint quatuor numeri inueniendi quorum primus & duo ſequentes efficiant 20: ſecundus & duo ſequentes 22. tertius cum quarto

CE. ergo rectangulum ſub extremis Z in C E plus C A in C E plus D G in C E æquatur rectangulo ſub mediis C B in Y. at cum factum ſit vt C E ad C B ita C B ad D G, eſt quadratum C B æquale rectangulo C E in D G igitur ſi loco CE in D G ſumas quadratum CB, & illud ſubtrahas ex vtraque parte æquationis mox inuentæ, erit in Z in C E plus C A in C E æquale rectangulo C B in Y minus quadrato CB. ac proinde per reſolutionem analogiſmi (ſeu per 16. ſexti Euclidis) vt Z plus C A ad Y minus C B ita CB ad C E. quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Si volueris immediatè reperire ſecundam quantitatem vteris hoc canone: Planum ſub duobus antecedentibus proportionum terminis multiplica per primam quantitatem accipiendam; deinde planum ex terminis conſequentibus per ſecundam accipiendam: tertiò planum ex primo termino ſecundæ rationis in ſecundum primæ duces in ſummam quantitatum accipiendarum: hæc omnia ſimul addes, & aggregatum illorum diuides per differentiam producti ex antecedentibus terminis proportionum inter ſe, & producti ex conſequentibus: ita enim prodibit in quotiente ſecunda quantitas quæſita, vnde altera non latebit. Ex hoc Canone naſcetur effectio geometrica tantillum diuerſa à præcedente, & quam facile inuenis ſtudioſus geometra.

PROPOSITIO XVI.

Inuenire tres quantitates, vt binæ ſimul ſumptæ efficiant ſummam datam.

SInt inueniendi tres numeri tales vt primus & ſecundus efficiant 20: ſecundus & tertius 30: at vero tertius & primus 40. Ponatur 1 R pro ſumma trium numerorum, ergo 1 R -- 20 erit tertius. & propter eamdem rationem 1 R -- 30 erit primus & 1 R -- 40 erit ſecundus. ſumma horum trium 3 R -- 90 æquantur 1 R: ergo 1 R

ſeu ſumma trium æqualis eſt 45. & attendendo ad poſitiones primus erit 15. ſecundus 5. tertius 25.

Per Algebram ſpecioſam, data ſumma primæ & ſecundæ quantitatis B, ſumma ſecundæ & tertiæ C, ſumma tertiæ & primæ D, ponatur A ſumma omnium: ergo A -- B eſt tertia, & A -- C prima, & A -- D ſecunda. harum aggregatum 3 A -- B -- C -- D æquantur A. & proinde A eſt æqualis $\frac{B + C + D}{2}$

Hinc Canon.

Aggregati ſummarum datarum cape dimidium, & habebis ſummam trium, à qua ſingulæ ſummæ ablatæ exhibebunt quantitates quæſitas.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint datæ tres lineæ quarum quælibet duas ex quæſitis continet: A B quidem primam & ſecundam, B C ſecundam & tertiam, C D autem tertiam & primam: quæruntur prima, ſecunda, & tertia ſigillatim, compoſitis illis tribus indirectum, ſine vllo ſpatio intermedio, fit ſumma A D, qua diuiſa bifariam in E, habetur A E ſumma quæſitarum : nam cum quælibet inter ſummas datas bis accipiatur, certum eſt ſummam A D continere duplum omnium, ergo ſemiſſis A E continebit omnes. ſed A B eſt ſumma ſecundæ & primæ: igitur B E eſt tertia, ſimiliter C D eſt ſumma primæ & tertiæ, ergo cum E D ſit ſumma trium erit E C ſecunda. Clariora ſunt iſta, quam vt fuſiori demonſtratione indigeant.



PROPOSITIO XVII.

Inuenire quatuor quantitates, vi terna iuncta efficiant ſummas poſtulatas.

Sint quatuor numeri inueniendi quorum primus & duo ſequentes efficiant 20; ſecundus & duo ſequentes 22, tertius cumq; quarto

& primo 24. quartus deniquè cum primo & ſecundo 27. Ponatur ſumma quatuor 1 R, ergo 1 R -- 20 erit quartus, 1 R -- 22 primus, 1 R -- 24 ſecundus, & 1 R -- 27 tertius. horum igitur ſumma 4 R -- 93 æquatur 1 R. ac proinde valor illius radicis ſeu ſumma quatuor eſt 31. vnde, ſi tollas ſigillatim datas ſummas erunt ſinguli 9. 7. 4. 11.

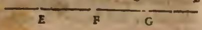
Per Algebram ſpecioſam, datis ſummis B, C, D, F, ponatur A ſumma quatuor quæſitarum, ergo A -- B erit quarta quantitas A -- C. prima, A -- D ſecunda, & A -- F tertia. harum igitur ſumma 4 A -- B -- C -- D -- F æquantur A. ac proinde $\frac{B + C \; D + F}{3}$ eſt valor A.

Hinc Canon.

Aggregati ſummarum datarum cape trientem, & habebis ſummam quatuor quæſitarum quantitatum; ab hac tolle datas ſummas ſigillatim & reſtabunt ſingulæ quantitates quæſitæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ quatuor lineæ data A E ſumma primæ & duarum ſequentium, data E F ſumma ſecundæ & duarum deinceps, data F G ſumma tertiæ quartæ & primæ, data denique G B ſumma quartæ primæ & ſecundæ. Componantur illæ in directum, & ſumma A B diuidatur trifariam in punctis C & D erit A D ſumma quatuor, ſicuti etiam D C & C B. nam cum ſingulæ ter accipiantur erit tota A B tripla ſummæ omnium, ergo ipſius triens A D erit omnium ſumma ſed A E eſt ſumma



trium priorum, igitur E D erit quarta. ſimiliter cum C B ſit ſumma omnium & G B ſumma quartæ primæ & ſecundæ, eſt C G tertia. Denique ſi E F aut F G tollantur ex eodem triente, diſcernentur aliæ. igitur datis ſummis trium inuentæ ſunt ſingulæ, quod erat demonſtrandum.

Propositio XVIII.

Inuenire tres quantitates, vt bine iunctæ reliquam ſuperent imperata quantitate.

Oporteat reperirē tres numeros tales vt duo priores reliquum ſuperent vnitate: duo poſteriores ſuperent primum nouenario: ac tandem tertius & primus ſuperent ſecundum quinario. Ponatur primus 1 R, ergo 1 R † 9 eſt ſumma ſecundi & tertii. igitur ſumma omnium eſt 2 R † 9, ſed ſumma exceſſuum datornm eſt etiam æqualis ſummæ omnium: ergo cum ſumma exceſſuum ſit 15, erit æquatio inter 15 & 2 R † 9. ac proinde 1 R eſt 3. non aliter inuenietur ſecundus 5, & tertius 7.

Per Algebram ſpecioſam datis exceſſibus B, C, D, ponatur A primus, ergo A † B eſt ſumma ſecundæ & tertiæ quantitatis, ac proinde 2 A † B æquantur B † C † D. Igitur A eſt æqualis $\frac{C+D}{2}$

Hinc Canon.

Ab ſumma exceſſuum datorum aufer ſigillatim ipſos exceſſus: reſiduorum ſemiſſes exhibent numeros quæſitos.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ tres lineæ quarum prima & ſecunda ſimul ſumptæ ſuperent tertiam per A B: ſecunda & tertia ſuperent primam per B C: tertia denique & prima ſuperent ſecundam per C D. Componantur illæ omnes differentiæ in vnam lineam quæ ſit A D, & B D diuidatur bifariam in E. Dico E D   A   B   C   E   D

fore tertiam, & ſemiſſem A C fore ſecundam; & ſemiſſem A B & C D ſimul ſumptarum eſſe primam: nam duarum linearum inæqualium differentia cum duplo minoris facit ſumma illarum, ſiquidem maior continet ſemel minorem & differentiam ſui à minore: ergo maior & minor ſimul continet bis minorem & differentiam illarum. Ergo cum A B ſit differentia qua prima & ſecunda ſuperant tertiam, cumque tertia ſit minor reſpectu primæ & ſecundæ ſimul

ſumptarum

& primo 24. quartus denique cum primo & ſecundo 27. Ponatur ſumma quatuor 1 R, ergo 1 R -- 20 erit quartus, 1 R -- 22 primus, 1 R -- 24 ſecundus, & 1 R -- 27 tertius. horum igitur ſumma 4 R -- 93 æquatur 1 R. ac proinde valor illius radicis ſeu ſumma quatuor eſt 31. vnde, ſi tollas ſigillatim datas ſummas erunt ſinguli 9. 7. 4. 11.

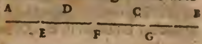
Per Algebram ſpecioſam, datis ſummis B, C, D, F, ponatur A ſumma quatuor quæſitarum, ergo A -- B erit quarta quantitas A -- C, prima, A -- D ſecunda, & A -- F tertia. harum igitur ſumma 4 A -- B -- C -- D -- F æquantur A. ac proinde $\frac{B + C + D + F}{3}$ eſt valor A.

Hinc Canon.

Aggregati ſummarum datarum cape trientem, & habebis ſummam quatuor quæſitarum quantitatum: ab hac tolle datas ſummas ſigillatim & reſtabunt ſingulæ quantitates quæſitæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ quatuor lineæ data A E ſumma primæ & duarum ſequentium, data E F ſumma ſecundæ & duarum deinceps, data F G ſumma tertiæ quartæ & primæ, data denique G B ſumma quartæ primæ & ſecundæ. Componantur illæ in directum, & ſumma A B diuidatur trifariam in punctis C & D erit A D ſumma quatuor, ſicuti etiam D C & C B. nam cum ſingulæ ter accipiantur erit tota A B tripla ſummæ omnium, ergo ipſius triens A D erit omnium ſumma ſed A E eſt ſumma



trium priorum, igitur E D erit quarta. ſimiliter cum C B ſit ſumma omnium & G B ſumma quartæ primæ & ſecundæ, eſt C G tertia. Denique ſi E F aut F G tollantur ex eodem triente, diſcernentur aliæ. igitur datis ſummis trium inuentæ ſunt ſingulæ, quod erat demonſtrandum.

Propositio XVIII.

Inuenire tres quantitates, vt bina iunctæ reliquam ſuperent imperata quantitate.

OPorteat reperire tres numeros tales vt duo priores reliquum ſuperent vnitate: duo poſteriores ſuperent primum nouenario: ac tandem tertius & primus ſuperent ſecundum quinario. Ponatur primus 1 R, ergo 1 R † 9 eſt ſumma ſecundi & tertii. igitur ſumma omnium eſt 2 R † 9, ſed ſumma exceſſuum datornm eſt etiam æqualis ſummæ omnium: ergo cum ſumma exceſſuum ſit 15, erit æquatio inter 15 & 2 R † 9. ac proinde 1 R eſt 3. Non aliter inuenietur ſecundus 5, & tertius 7.

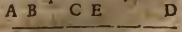
Per Algebram ſpecioſam datis exceſſibus B, C, D, ponatur A primus, ergo A † B eſt ſumma ſecundæ & tertiæ quantitatis, ac proinde 2 A † B æquantur B † C † D. Igitur A eſt æqualis $\frac{C \dagger D}{2}$

Hinc Canon.

Ab ſumma exceſſuum datorum aufer ſigillatim ipſos exceſſus: reſiduorum ſemiſſes exhibent numeros quæſitos.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ tres lineæ quarum prima & ſecunda ſimul ſumptæ ſuperent tertiam per A B: ſecunda & tertia ſuperent primam per B C: tertia denique & prima ſuperent ſecundam per C D. Componantur illæ omnes differentiæ in vnam lineam quæ ſit A D, & B D diuidatur bifariam in E. Dico E D



fore tertiam, & ſemiſſem A C fore ſecundam, & ſemiſſem A B & C D ſimul ſumptarum eſſe primam: nam duarum linearum inæqualium differentia cum duplo minoris facit ſumma illarum, ſiquidem maior continet ſemel minorem & differentiam ſui à minore: ergo maior & minor ſimul continet bis minorem & differentiam illarum. Ergo cum A B ſit differentia qua prima & ſecunda ſuperant tertiam, cumque tertia ſit minor reſpectu primæ & ſecundæ ſimul ſumptarum

ſumptarum (vt pote quæ ſuperetur ab illarum ſumma) erit A B plus dupla tertia æqualis ſummæ trium quæſitarum, ſimiliter cum B C ſit differentia qua ſecunda & tertia ſuperant primam, cumque prima ſit minor reſpectu ſecundæ & tertiæ ſimul ſumptarum (quia ſuperatur ab illarum ſumma) erit B C plus dupla prima æqualis ſummæ trium quæſitarum. Rurſus cum C D ſit differentia per quam ſumma tertiæ & primæ ſuperant ſecundam, cumque ſecunda ſit minor ſumma tertiæ & primæ (quoniam ſuperatur ab aliis duabus ſimul ſumptis) erit C D plus dupla ſecunda æqualis ſummæ trium quæſitarum. ergo tres illæ ſummæ, nempe A B plus dupla tertia, B C plus dupla prima, & C D plus dupla ſecunda, æquantur triplo ſummæ trium quæſitarum. Sed dupla prima, dupla ſecunda, & dupla tertia ſunt æquales duplo ſummæ trium quæſitarum: igitur A B plus B C plus C D æquantur tribus quæſitis. Sed A B plus B C plus C D æquantur A D: ergo A D (ſumma differentiarum datarum) æqualis eſt ſummæ trium quæſitarum, ac proinde cum iam probatum ſit A B plus dupla tertia æquari ſummæ trium quæſitarum, erit A B plus dupla tertia, æqualis A D. igitur ſublata A B vtrinque reſtabit dupla tertia æqualis B D. ac propterea A E ſemiſſis B D æquatur tertiæ. quod erat demonſtrandum. Similiter cum oſtenderimus C D plus dupla ſecunda æquari ſummæ trium quæſitarum, erit C D plus dupla ſecunda æqualis A D. ergo ſublata vtrinque C D reſtabit dupla ſecunda æqualis A C, igitur ſemiſſis A C erit ſecunda. Rurſus cum cum] demonſtratum ſit B C plus dupla prima æquari ſummæ trium quæſitarum hoc eſt A D, ſubducta vtrinque B C reſtabit dupla prima æqualis A B & C D. igitur harum ſemiſſis erit prima quæſita, ergo inuentæ ſunt tres quantitates taliter vt binæ iunctę ſuperent reliquam imperata quantitate, Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Si fuerunt três quantitates, quarum binæ coniunctę ſuperênt reliquam, erunt tres differentiæ æquales ſummæ trium prædictarum quantitatum.

Propositio XIX.

Inuenire quatuor quantitates vt terna iuncta reliquam ſuperent imperata quantitate.

OPorteat inuenire quatuor numeros datis exceſſibus trium iunctorum ſupra reliquum 6. 24. 20. 10. ſumma horum exceſſuum eſt 60 cuius dimidium 30 æqualæ erit ſummæ quatuor quæſitorum. poſito igitur primo I R erunt tres reliqui 30 — I R, ſed tres reliqui æquantur quoque I R † 24. ergo I R † 24 æquatur 30 — I R. ac proinde I R ſiue primus numerus quæſitus eſt 3. reliqui autem 5. 10. 12.

Per Algebram ſpecioſam datis exceſſibus B. C. D. F. ponatur A prima quantitas, ergo reliquarum ſumma erit $\frac{B + C + D + F - A}{2}$ ſed eſt etiam ſumma reliquarum A † C igitur eſt æquatio inter illas duas ſummas. & A æqualis $\frac{B - C + D + F}{4}$.

Hinc Canon.

A ſemiſſe aggregati differentiarum datarum tolle ſigillatim ipſas differentias: reſiduorum ſemiſſes erunt quantitates quæſitæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ quatuor lineæ tales vt prima ſecunda & tertia ſuperent quartam per A B, ſecunda tertia & quarta ſuperent primam per B C. tertia quarta & prima ſuperent ſecundam per C D: ac tandem quarta prima & ſecunda ſuperent tertiam per D E. diuidatur primùm tota A E ex illis quatuor compoſita bifariam in F. ex ſemiſſe A F vel F E tollantur differentiæ datæ ſigillatim, reſidua erunt quæſitæ lineæ vt quia tollendo ex A F lineam A B, reſtat B F, dico ſemiſſem B F fore quartam quæſitam: idem intellige de reliquis. Nam cum probauerimus in præcedente A B C F D E

ſumptarum (vt pote quæ ſuperetur ab illarum ſumma) erit A B plus dupla tertia æqualis ſummæ trium quæſitarum, ſimiliter cum B C ſit differentia qua ſecunda & tertia ſuperant primam, cumque prima ſit minor reſpectu ſecundæ & tertiæ ſimul ſumptarum (quia ſuperatur ab illarum ſumma) erit B C plus dupla prima æqualis ſummæ trium quæſitarum. Rurſus cum C D ſit differentia per quam ſumma tertiæ & primæ ſuperant ſecundam, cumque ſecunda ſit minor ſumma tertiæ & primæ (quoniam ſuperatur ab aliis duabus ſimul ſumptis) erit C D plus dupla ſecunda æqualis ſummæ trium quæſitarum. ergo tres illæ ſummæ, nempe A B plus dupla tertia, B C plus dupla prima, & C D plus dupla ſecunda, æquantur triplo ſummæ trium quæſitarum. Sed dupla prima, dupla ſecunda, & dupla tertia ſunt æquales duplo ſummæ trium quæſitarum: igitur A B plus B C plus C D æquantur tribus quæſitis. Sed A B plus B C plus C D ęquantur A D : ergo A D (ſumma differentiarum datarum) æqualis eſt ſummæ trium quæſitarum, ac proinde cum iam probatum ſit A B plus dupla tertia æquari ſummæ trium quæſitarum, erit A B plus dupla tertia, æqualis A D. igitur ſublata A B vtrinque reſtabit dupla tertia æqualis B D. ac propterea A E ſemiſſis B D æquatur tertiæ. quod erat demonſtrandum. Similiter cum oſtenderimus C D plus dupla ſecunda æquari ſummæ trium quæſitarum, erit C D plus dupla ſecunda æqualis A D. ergo ſublata vtrinque C D reſtabit dupla ſecunda æqualis A C, igitur ſemiſſis A C erit ſecunda. Rurſus cum cum demonſtratum ſit B C plus dupla prima æquari ſummæ trium quæſitarum hoc eſt A D, ſubducta vtrinque B C reſtabit dupla prima æqualis A B & C D. igitur harum ſemiſſis erit prima quæſita, ergo inuentæ ſunt tres quantitates taliter vt binæ iunctę ſuperent reliquam imperata quantitate, Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Si fuerunt tres quantitates, quarum binæ coniunctę ſuperēnt reliquam, erunt tres differentiæ æquales ſummæ trium prædictarum quantitatum.

Propositio XIX.

Inuenire quatuor quantitates vt terna iuncta reliquam ſuperent imperata quantitate.

Oporteat inuenire quatuor numeros datis exceſſibus trium iunctorum ſupra reliquum *6.* 24. 20. 10. ſumma horum exceſſuum eſt *60* cuius dimidium *30* æqualæ erit ſummæ quatuor quæſitorum. poſito igitur primo 1 R erunt tres reliqui *30*—1 R, ſed tres reliqui æquantur quoque 1 R † 24. ergo 1 R † 24 æquatur *30*—1 R. ac proinde 1 R ſiue primus numerus quæſitus eſt *3.* reliqui autem 5. 10. 12.

Per Algebram ſpecioſam datis exceſſibus B. C. D. F. ponatur A prima quantitas, ergo reliquarum ſumma erit $\frac{B + C + D + F}{2}$ — A ſed eſt etiam ſumma reliquarum A † C igitur eſt æquatio inter illas duas ſummas. & A æqualis $\frac{B - C + D + F}{4}$.

Hinc Canon.

A ſemiſſe aggregati differentiarum datarum tolle ſigillatim ipſas differentias: reſiduorum ſemiſſes erunt quantitates quæſitæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ quatuor lineæ tales vt prima ſecunda & tertia ſuperent quartam per A B, ſecunda tertia & quarta ſuperent primam per B C. tertia quarta & prima ſuperent ſecundam per C D : ac tandem quarta prima & ſecunda ſuperent tertiam per D E. diuidatur primùm tota A E ex illis quatuor compoſita biſariam in F. ex ſemiſſe A F vel F E tollantur differentiæ datæ ſigillatim, reſidua erunt quæſitæ lineæ vt quia tollendo ex A F lineam A B, reſtat B F, dico ſemiſſem B F fore quartam quæſitam : idem intellige de reliquis. Nam cum probauerimus in præcedente A B C F D E

propoſitione duarum linearum inæqualium differentiam duplo minoris illarum adiunctam æquari ſummæ illarum ſequitur A B (quæ eſt differentia primæ ſecundæ & tertiæ ſimul ſumptarum ſupra quartam) plus dupla quarta, quæ minor eſt reliquis ſimul ſumptis, quoniam ab illis ſuperatur, æquari ſummæ quatuor quæſitarum: ſimili ratione B C plus dupla prima ęquabitur ſummæ quaſitarum: ſic C D. plus dupla ſecunda æquabitur ſummæ quatuor quæſitarum: ita denique D E plus dupla tertia æquabitur quatuor quæſitarum ſummæ: igitur quatuor illæ ſumm ę æquabuntur quadruplo quatuor quęſitarum. Sed duplum primę, ſecundæ, tertiæ & quartæ efficit duplam quatuor quæſitarum ſummam. Ergo reſiduum quod conflatur ex A B, B C, C D, & D E ſeu tota A E continet etiam duplum quatuor quæſitarum. Ac proinde eius ſemiſſis A F vel F E æquatur quatuor quæſitis. Igitur cum jam oſtenſum ſit A B plus duplo quartæ æquari ſummæ omnium (hoc eſt A F) ſi ex ſumma omnium A F tollatur A B, reſidua B F erit dupla quartæ. Ac propterea eius ſemiſſis erit quarta quæſita. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Si fuerint quatuor quantitates. quarum ternæ coniunctæ ſuperent reliquam, erunt quatuor differentiæ æquales duplo prædictarum quatuor quantitatum.

PROPOSITIO XX.

Quantitatem propoſitam in tres partiri tali ratione, vt vtrauis extremarum ad ſumpta media ad reliquam extremam, datam habeat rationem.

ESto numerus diuidendus hoc modo 55. & detur ratio vnius ſummæ ad vnum extremum 9. ad 2: ratio autem alterius ſummæ ad alium extremum ſit 6. ad 5. Ponatur autem vnus extremus 1 R, ergo reliquorum duorum ſumma erit 55 — 1 R: igitur vt 55 — 1 R ad 1 R ita 9 ad 2. ac proinde productus ſub extremis 110 — 2 R æquatur producto ſub mediis 9 R. Ergo 1 R ſiue vnus extremus eſt 10. ſumma vero aliorum duorum 45. Si igitur nunc ponatur medius 1 R alter

extremus erit 45—I R. igitur 10 † I R ad 45—I R erit vt 6 ad 5: ergo productus ſub extremis 50 † 5 R æqualis erit producto ſub medijs 270—6 R. Et fit I R ſiue medius 20. alter vero extremus 25.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & prima ratione B ad C, ſecunda autem B ad D ponatur A pro vna extrema ergo ſumma reliquarum erit B—A. Ac proinde B—A ad A eſt vt B ad C. Igitur productus ſub extremis C B—C A æquatur producto ſub medijs B A. Et fit A æqualis C B Hunc ſi tollas ex B
B4C
relinquetur B quadr. pro ſumma aliarum quantitatum: poſita ergo
B † C.
A pro quantitate media, erit C B † B A † C A ad B quadr.—B A —C A vt B ad D. Ac ideo productus ſub extremis D C B † B A D † C A D. æquabitur producto ſub mediis B cub.—A B quadr. — B C A. Igitur A eſt æqualis B cub.—D C B
B quadr † B D † C D † B C

Hinc Canon.

Productum ſub terminis conſequentibus rationum datarum adde alteri producto ex quantitate diuidenda in ſummam conſequentium terminorum auctam diuidenda quantitate: & per hanc ſummam diuide cubum quantitatis diuidendæ multatum ſolido ex plano ſub conſequentibus terminis rationum in quantitatem diuidendam: & fiet vna quantitas extrema. Vnde reliquæ non latebunt.

Vel

Quantitatem datã multiplica ſigillatim per conſequẽtes terminos vtriuſque rationis: productoſque diuide per ſummam terminorum rationis illius, per cuius conſequentem terminum procreati ſunt: quotientes enim erunt duæ extremæ quãtitates quæſitæ permutatim.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda taliter in L & I, vt prima pars & ſecunda ſimul ſumptæ A I ſint ad reliquam I B in ratione data C D ad D E at vero ſecunda & tertia ſimul ſumptæ B L ad reliquam A L rationem quoque habeant datam F G ad G H. Fiat vt C E ad D E ita A B ad B I. Deinde fiat iterũu vt F H ad G H ſic A B ad A L, dico

propoſitione duarum linearum inæqualium differentiam duplo minoris illarum adiunctam æquari ſummæ illarum ſequitur A B (quæ eſt differentia primæ ſecundæ & tertiæ ſimul ſumptarum ſupra quartam) plus dupla quarta, quæ minor eſt reliquis ſimul ſumptis, quoniam ab illis ſuperatur, æquari ſummæ quatuor quæſitarum: ſimili ratione B C plus dupla prima æquabitur ſummæ quæſitarum: ſic C D. plus dupla ſecunda æquabitur ſummæ quatuor quæſitarum: ita denique D E plus dupla tertia æquabitur quatuor quæſitarum ſummæ: igitur quatuor illæ ſummę æquabuntur quadruplo quatuor quęſitarum. Sed duplum primę, ſecundæ, tertiæ & quartæ efficit duplam quatuor quæſitarum ſummam. Ergo reſiduum quod conflatur ex A B, B C, C D, & D E ſeu tota A E continet etiam duplum quatuor quæſitarum. Ac proinde eius ſemiſſis A F vel F E æquatur quatuor quæſitis. Igitur cum jam oſtenſum ſit A B plus duplo quartæ æquari ſummæ omnium (hoc eſt A F) ſi ex ſumma omnium A F tollatur A B, reſidua B F erit dupla quartæ. Ac propterea eius ſemiſſis erit quarta quæſita. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Si fuerint quatuor quantitates. quarum ternæ coniunctæ ſuperent reliquam, erunt quatuor differentiæ æquales duplo prædictarum quatuor quantitatum.

PROPOSITIO XX.

Quantitatem propoſitam in tres partiri tali ratione, vt vtrauis extremarum ad ſumpta media ad reliquam extremam, datam habeat rationem.

ESto numerus diuidendus hoc modo 55. & detur ratio vnius ſummæ ad vnum extremum 9. ad 2: ratio autem alterius ſummæ ad alium extremum ſit 6. ad 5. Ponatur autem vnus extremus 1 R, ergo reliquorum duorum ſumma erit 55 — 1 R: igitur vt 55 — 1 R ad 1 R ita 9 ad 2. ac proinde productus ſub extremis 110 — 2 R æquatur producto ſub mediis 9 R. Ergo 1 R ſiue vnus extremus eſt 10. ſumma vero aliorum duorum 45. Si igitur nunc ponatur medius 1 R alter

extremus erit 45 — 1 R. igitur 10 † 1 R ad 45 — 1 R erit vt 6 ad 5: ergo productus ſub extremis 50 † 5 R æqualis erit producto ſub medijs 270 — 6 R. Et fit 1 R ſiue medius 20. alter vero extremus 25.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, & prima ratione B ad C, ſecunda autem B ad D ponatur A pro vna extrema ergo ſumma reliquarum erit B — A. Ac proinde B — A ad A eſt vt B ad C. Igitur productus ſub extremis C B — C A æquatur producto ſub medijs B A. Et fit A æqualis $\frac{\text{C B}}{\text{B} + \text{C}}$ Hunc ſi tollas ex B relinquetur $\frac{\text{B quadr.}}{\text{B} + \text{C.}}$ pro ſumma aliarum quantitatum: poſita ergo A pro quantitate media, erit C B † B A † C A ad B quadr. — B A — C A vt B ad D. Ac ideo productus ſub extremis D C B † B A D † C A D. æquabitur producto ſub mediis B cub. — A B quadr. — B C A. Igitur A eſt æqualis $\frac{\text{B cub.} - \text{D C B}}{\text{B quadr.} + \text{B D} + \text{C D} + \text{B C}}$

Hinc Canon.

Productum ſub terminis conſequentibus rationum datarum adde alteri producto ex quantitate diuidenda in ſummam conſequentium terminorum auctam diuidenda quantitate: & per hanc ſummam diuide cubum quantitatis diuidendæ multatum ſolido ex plano ſub conſequentibus terminis rationum in quantitatem diuidendam: & fiet vna quantitas extrema. Vnde reliquæ non latebunt.

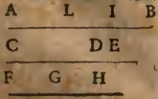
Vel

Quantitatem datã multiplica ſigillatim per conſequẽtes terminos vtriuſque rationis: productoſque diuide per ſummam terminorum rationis illius, per cuius conſequentem terminum procreati ſunt: quotientes enim erunt duæ extremæ quãtitates quæſitæ permutatim.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda taliter in L & I, vt prima pars & ſecunda ſimul ſumptæ A I ſint ad reliquam I B in ratione data C D ad D E at vero ſecunda & tertia ſimul ſumptæ B L ad reliquam A L rationem quoque habeant datam F G ad G H. Fiat vt C E ad D E ita A B ad B I. Deinde fiat iterũ vt F H ad G H ſic A B ad A L, dico

dico A L & I B. fore extremas quæſitas, mediam autem L I cum enim ſit vt C E ad D E ita A B ad I B, Ergo diuidendo vt C D ad D E ita A I ad I B. Cumque ſit vt F H ad G H ita A B ad A L, erit quoque diuidendo vt F G ad G H ita B L ad L A. Ergo tota A B diuiſa eſt in tres partes ad puncta L & I taliter vt ſumma primæ & ſecundæ A I ad reliquam extremam I B ſit in ratione data C D ad D E: ſumma autem ſecundæ & tertiæ B L ad alteram extremam A L ſit etiam in ratione data F G ad G H. Quod erat faciendum & demonſtrandum.



Propositio XXI.

Inuenire tres quantitates tales, vt maior excedat mediam data parte minoris, media minorem data parte majoris, & minor excedat datam partem mediæ quantitate data.

Oporteat inuenire tres numeros ita vt maior excedat medium triente minoris: medius minorem quintante maioris: & minor quadrantem medii quaternario. Ponatur minor ex quæſitis 1 R, ergo quoniam debet excedere quadrantem medii per 4, erit quadrans medii 1 R —— 4. & proinde illius quadruplum 4 R —— *16* erit medius. Et quia medius excedit minorem quintante maioris, tollendo minorem ex medio, exiſtet quintans maioris *3* R —— *16*. & ita maior erit 15 R —— 80. at maior debet excedere medium triente minoris, igitur ſi ex maiore 1*5* R —— 80 tollatur medius 4 R —— *16*, reſiduum 11 R —— *64* æquari debet trienti 1 R, ac propterea multiplicando vtramque partem æquationis per *3*, fient *33* R —— 192 æqualia 1 R. Ergo 1 R eſt *6*. & tres numeri quæſiti ſunt 10. 8. *6*.

Per Algebram ſpecioſam, datis iiſdem partibus, & exceſſu minoris ſupra quadrantẽ medii C. Ponatur A minor, ergo A —— C eſt quadrans medii ac proinde medius 4 A —— 4 C, Et quia medius excedit minorem quintãte maioris tollendo A ex medio, fiet 3 A —— 4 C quintans maioris. & propterea maior erit 15 A —— 20 C. Hinc tolle medium reſtat 11 A —— 1*6* C æqualis trienti minoris, igitur minor

1 R æquabitur 33 A —— 48 C. Et fit A $\frac{48\,C}{32}$.

Hinc Canon.

Quantitatẽm datam diuide per datam mediæ partem, & quotientem per datam partem maioris: ex hoc poſteriore quotiente tolle priorem, & reſiduo per partem minoris diuiſo ſerua quotientem. Tùm diuide vnitatem per datam partem medii, & quotientem vnitate multatum diuide per datam maioris partem, & ex eo quotiente tolle quotientem integrum, qui mox vnitate multatus fuit: reſiduumque diuide per datam partem minoris, & per quotientem hunc vltimum vnitate multatum, partire quotientem, qui ſupra ſeruatus eſt, fietque minor ex tribus quæſitis. Vnde reliqui non latebunt.

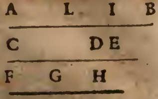
Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ tres lineæ, ita vt maior excedat mediam ſemiſſi minoris, media vero minorem quadrante maioris, minor denique excedat ſextantem mediæ data linea A. Finge lineam A diuiſam pro libito in aliquot partes æquales, puta in ſex tùm beneficio canonis præmiſſi, inueniantur tres numeri cum iiſdem conditionibus quæ hic ſunt annexæ lineis, & minor excedat ſextantem mediæ per 6. ſintq; illi numeri 16. 12. 8. deinde fiat vt 6 ad 8 ita A ad B: D ————
& vt 8 ad 12 ita B ad C & vt 12 ad 16 ita C ad D.   C ———
Dico tres lineas B. C. D. eſſe illas quæ deſiderantur.   B ——
Nam quia B ad C eſt vt 8 ad 12, erit ſemiſſis B triens   A —
ipſius C: quoniam verò C ad D eſt vt 12 ad 16 erit triens C æqualis quadranti D: ergo ſemiſſis B æquatur quadranti D. Sed D major ſuperat mediam C per quadrantem ſui, igitur D ſuperat C per ſemiſſem B quod erat vnum ex demonſtrandis.

Præterea cum B ad C ſit vt 8 ad 12, C ſuperat B per trietem ſui: ſed iam oſtenſum eſt trientem C æqualem eſſe quadranti D: igitur media C excedit minorem B quadrante maioris D quod eſt alterum ex probandis.

Tertio quoniam eſt A ad B vt 6 ad 8, B ſuperabit A quadrantẽ ſui: ſed iam probatum eſt ſemiſſem B æquari trienti C, ergo earum ſemiſſes erunt etiam æquales: at earum ſemiſſes ſunt quadrans B & ſextans C. Igitur ſextans eſt æqualis quadranti B: ac proinde B ſuperabit A ſextante C, ac viciſſim B ſuperabit ſextantem C per A. Quod erat tandem demonſtrandum.

dico A L & I B. fore extremas quæſitas, mediam autem L I cum enim ſit vt C E ad D E ita A B ad I B, Ergo diuidendo vt C D ad D E ita A I ad I B. Cumque ſit vt F H ad G H ita A B ad A L, erit quoque diuidendo vt F G ad G H ita B L ad L A. Ergo tota A B diuiſa eſt in tres partes ad puncta L & I taliter vt ſumma primæ & ſecundæ A I ad reliquam extremam I B ſit in ratione data C D ad D E: ſumma autem ſecundæ & tertiæ B L ad alteram extremam A L ſit etiam in ratione data F G ad G H. Quod erat faciendum & demonſtrandum.



PROPOSITIO XXI.

Innenire tres quantitates tales, vt major excedat mediam data parte minoris, media minorem data parte majoris, & minor excedat datam partem mediæ quantitate data.

OPorteat inuenire tres numeros ita vt maior excedat medium triente minoris: medius minorem quintante maioris: & minor quadrantem medii quaternario. Ponatur minor ex quæſitis I R, ergo quoniam debet excedere quadrantem medii per 4, erit quadrans medii I R —— 4. & proinde illius quadruplum 4 R —— 16 erit medius. Et quia medius excedit minorem quintante maioris, tollendo minorem ex medio, exiſtet quintans maioris 3 R —— 16. & ita maior erit 15 R —— 80. at maior debet excedere medium trientẽ minoris, igitur ſi ex maiore 15 R —— 80 tollatur medius 4 R —— 16, reſiduum 11 R —— 64 æquari debet trienti I R, ac propterea multiplicando vtramque partem æquationis per 3, fient 33 R —— 192 æqualia I R. Ergo I R eſt 6. & tres numeri quæſiti ſunt 10. 8. 6.

Per Algebram ſpecioſam, datis iiſdem partibus, & exceſſu minoris ſupra quadrantẽ medii C. Ponatur A minor, ergo A —— C eſt quadrans medii ac proinde medius 4 A —— 4 C. Et quia medius excedit minorem quintãte maioris tollendo A ex medio, fiet 3 A —— 4 C quintans maioris. & propterea maior erit 15 A —— 20 C. Hinc tolle medium reſtat 11 A —— 16 C æqualis trienti minoris, igitur minor

1 R æquabitur 33 A — 48 C. Et fit A $\frac{48\,C.}{32}$

Hinc Canon.

Quantitatẽm datam diuide per datam mediæ partem, & quotientem per datam partem maioris: ex hoc poſteriore quotiente tolle priorem, & reſiduo per partem minoris diuiſo ſerua quotientem. Tùm diuide vnitatem per datam partem medii, & quotientem vnitate multatum diuide per datam maioris partem, & ex eo quotiente tolle quotientem integrum, qui mox vnitate multatus fuit: reſiduumque diuide per datam partem minoris, & per quotientem hunc vltimum vnitate multatum, partire quotientem, qui ſupra ſeruatus eſt, fietque minor ex tribus quæſitis. Vnde reliqui non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ tres lineæ, ita vt maior excedat mediam ſemiſſi minoris, media vero minorem quadrante maioris, minor denique excedat ſextantem mediæ data linea A. Finge lineam A diuiſam pro libito in aliquot partes æquales, puta in ſex tùm beneficio canonis præmiſſi, inueniantur tres numeri cum iiſdem conditionibus quæ hic ſunt annexæ lineis, & minor excedat ſextantem mediæ per 6. ſintq; illi numeri 16. 12. 8. deinde fiat vt 6 ad 8 ita A ad B: D
& vt 8 ad 12 ita B ad C & vt 12 ad 16 ita C ad D. C
Dico tres lineas B. C. D. eſſe illas quæ deſiderantur. B
Nam quia B ad C eſt vt 8 ad 12, erit ſemiſſis B triens A
ipſius C: quoniam verò C ad D eſt vt 12 ad 16 erit triens C æqualis quadranti D; ergo ſemiſſis B æquatur quadranti D. Sed D maior ſuperat mediam C per quadrantem ſui, igitur D ſuperat C per ſemiſſem B quod erat vnum ex demonſtrandis.

Præterea cum B ad C ſit vt 8 ad 12, C ſuperat B per trientem ſui: ſed iam oſtenſum eſt trientem C æqualem eſſe quadranti D: igitur media C excedit minorem B quadrante maioris D quod eſt alterum ex probandis.

Tertio quoniam eſt A ad B vt 6 ad 8, B ſuperabit A quadrantẽ ſui: ſed iam probatum eſt ſemiſſem B æquari trienti C, ergo earum ſemiſſes erunt etiam æquales: at earum ſemiſſes ſunt quadrans B & ſextans C. Igitur ſextans eſt æqualis quadranti B: ac proinde B ſuperabit A ſextante C, ac viciſſim B ſuperabit ſextantem C per A. Quod erat tandem demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

Inuenire tres quantitates quarum ſi qualibet dederit & acceperit partem imperatam fiat æqualis.

INueniantur res numeri tali rationi vt ſi primus dederit ſecundo $\frac{1}{3}$ ſui, & ſecundus tertio $\frac{1}{4}$ & tertius primo $\frac{1}{5}$ poſt mutuum datum & acceptum fiat æqualitas. Ponatur primus numerus I R, ſecundus I A, tertius I B. Quoniam ergo primi triens & tres quadrantes ſecundi, æquari debent quatuor quintantibus tertii & quadranti ſecundi, ergo $\frac{1R}{3} + \frac{3A}{4}$ æquatur $\frac{4B}{5} + \frac{1A}{2}$ ac proinde poſt debitam reductionem I B æquabitur $\frac{5R}{12} + \frac{5A}{8}$.

Supereſt reducamus I A ad primas radices, quod ita præſtabimus quoniam iubetur iterum trientem primi cum tribus quadrantibus ſecuudi æquari duobus triẽtibus primi & quintanti tertij erunt $\frac{1R}{3} + \frac{3A}{4}$ æqualia $\frac{2R}{3} + \frac{1R}{12}$ & $\frac{1A}{8}$ ac proinde poſt debitam reductionem erit I A æqualis $\frac{2R}{3}$ iuxta quem valorem deprehendes tertium numerum, qui fuit $\frac{5R}{12} + \frac{5A}{8}$ eſſe $\frac{5R}{6}$. Et propterea tres numeri quæſiti erunt I R & $\frac{2R}{3}$ & $\frac{5R}{6}$. Solutaque eſt quæſtio indefinite: & ſumi poteſt primus numerus pro libito vnde reliqui per fractiones adiunctas reperientur vt ſi ſumatur pro primo 12, ſecundus erit 8 &

tertius 10. Deniquè tres numeri quilibet in ratione trium prædictorum exiſtentes ſoluent quæſtionem vt 6 4 5. & 24 16 20. & 15 10 12 $\frac{\text{I.}}{2}$

Per Algebram ſpecioſam procèdemus paulo alitèr & mutando partes dandas & accipiendas & determinando numerum in quo debet fieri æqualitas. Detur ergo quantitas B in qua debet fieri æqualitas poſt quam primus dederit ſecundo tres ſui quadrantes, & ſecundus tertio tres ſui qnintâtes & tertius primo duos ſui trientes. Ponantur pro primo 4 A ab eo ſi tollas tres quadrantes, reſtabit A: & quia debet primus accipere duos trientes a tertio, & cum illis ſit B, ergo B —— A æquatur duobus trientibus tertii. Ergo tertius erit $\frac{3B - 3A}{2}$ quo dante duos ſui trientes, relinquentur $\frac{B - A}{2}$ quæ debent facere B cum tribus quintantibus ſecundi. Igitur $\frac{B + A}{2}$ faciunt $\frac{3}{5}$ ſecundi, ac proinde ſecundus erit $\frac{5B + 5A}{6}$. Hic ſic dederit tres quintantes ſui, habebit tantum poſtea $\frac{2B + 2A}{6}$ quæ cum 3 A faciunt $\frac{2B + 20A}{6}$ æqualia B. Quare A æquatur $\frac{B}{5}$ cape ergo 10 pro B, erit A 2. & primus numerus qui poſitus eſt 4 A èrit 8, ſecundus 10 & tertius 12. Conficiturque 10 ex tribus quadrantibus primi cum duobus quintantibus ſecundi, & ex tribus quintantibus ſecundi cum triente tertii, & ex duobus trientibus tertii cum quadrante primi. Quod eſt propoſitum.

Hinc Canon.

Quantitatem in qua fiat æqualitas, cape quam volueris, & èam diuide per partes tertiæ quantitatis datas (commutato de nominatore partium in differentiam numerorum quibus exprimuntur) quotientis huius primi & quantitatis conficiendæ cape differentiam, quam diuide per partes ſecundæ quantitatis, (commutato ſimilitèr denominatore in differentiam numerorum) hunc ſecundum quotientem

PROPOSITIO XXII.

Inuenire tres quantitates quarum ſi qualibet dederit & acceperit partem imperatam fiat æqualis.

INueniantur tres numeri tali rationi vt ſi primus dederit ſecundo $\frac{1}{3}$ ſui, & ſecundus tertio $\frac{1}{4}$ & tertius primo $\frac{1}{5}$ poſt mutuum datum & acceptum fiat æqualitas. Ponatur primus numerus I R, ſecundus I A, tertius I B. Quoniam ergo primi triens & tres quadrantes ſecundi, æquari debent quatuor quin tantibus tertii & quadranti ſecundi, ergo $\frac{1R}{3} + \frac{3A}{4}$ æquatur $\frac{4B}{5} + \frac{1A}{2}$ ac proinde poſt debitam reductionem I B æquabitur $\frac{5R}{12} + \frac{5A}{8}$.

Supereſt reducamus I A ad primas radices, quod ita præſtabimus quoniam iubetur iterum trientem primi cum tribus quadrantibus ſecuudi æquari duobus triētibus primi & quintanti tertij erunt $\frac{1R}{3} + \frac{3A}{4}$ æqualia $\frac{2R}{3} + \frac{1R}{12}$ & $\frac{1A}{8}$ ac proinde poſt debitam reductionem erit I A æqualis $\frac{2R}{3}$ iuxta quem valorem deprehendes tertium numerum, qui fuit $\frac{5R}{12} + \frac{5A}{8}$ eſſe $\frac{5R}{6}$. Et propterea tres numeri quæſiti erunt IR & $\frac{2R}{3}$ & $\frac{5R}{6}$. Solutaque eſt quæſtio indefinite. & ſumi poteſt primus numerus pro libito vnde reliqui per fractiones adiunctas reperientur vt ſi ſumatur pro primo 12, ſecundus erit 8 &

tertius 10. Deniquè tres numeri quilibet in ratione trium prædictorum exiſtentes ſoluent quæſtionem vt 6 4 5. & 24 16 20. & 15 10 12 $\frac{1}{2}$.

Per Algebram ſpecioſam procedemus paulo aliter & mutando partes dandas & accipiendas & determinando numerum in quo debet fieri æqualitas. Detur ergo quanritas B in qua debet fieri æqualitas poſt quam primus dederit ſecundo tres ſui quadrantes, & ſecundus tertio tres ſui qnintātes & tertius primo duos ſui trientes. Ponantur pro primo 4 A ab eo ſi tollas tres quadrantes, reſtabit A : & quia debet primus accipere duos trientes a tertio, & cum illis fit B, ergo B —— A æquatur duobus trientibus tertii. Ergo tertius erit $\frac{3\,B - 3\,A}{2}$ quo dante duos ſui trientes, relinquentur $\frac{B - A}{2}$ quæ debent facere B cum tribus quintantibus ſecundi. Igitur $\frac{B + A}{2}$ faciunt $\frac{3}{5}$ ſecundi, ac proinde ſecundus erit $\frac{5\,B + 5\,A}{6}$. Hic ſic dederit tres quintantes ſui, habebit tantum poſtea $\frac{2\,B + 2\,A}{6}$ quæ cum 3 A faciunt $\frac{2\,B + 20\,A}{6}$ æqualia B. Quare A æquatur $\frac{B}{5}$ cape ergo 10 pro B, erit A 2. & primus numerus qui poſitus eſt 4 A erit 8, ſecundus 10 & tertius 12. Conficiturque 10 ex tribus quadrantibus primi cum duobus quintantibus ſecundi, & ex tribus quintantibus ſecundi cum triente tertii, & ex duobus trientibus tertii cum quadrante primi. Quod eſt propoſitum.

Hinc Canon.

Quantitatem in qua fiat æqualitas, cape quam volueris, & eam diuide per partes tertiæ quantitatis datas (commutato de nominatore partium in differentiam numerorum quibus exprimuntur) quotientis huius primi & quantitatis conficiendæ cape differentiam, quam diuide per partes ſecundæ quantitatis, (commutato ſimiliter denominatore in differentiam numerorum) hunc ſecundum quotientem

tientem adde vel detrahe quantitati conficiendæ, prout quotiens primus maior vel minor fuit quantitate conficienda, & ſummam vel reſiduum ſerua. Deinde differentiam numerorum exprimentium partes primæ quantitatis diuide per partes tertiæ (commutato vt dictum eſt denominatore) quotientem diuide per partes ſecundæ (facta prius eadem commutatione) quotienti adde numeratorem partium primæ: & per hanc ſummam diuide ſummam vel reſiduum ſeruatum, fietque quantitas quæ ducta in denominatorem primæ fractionis, exhibebit primam quantitatem quæſitam, vnde reliquæ non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ tres lineæ tales vt prima dans ſui trientem ſecundæ, ſecunda ſui quadrantem tertiæ, & tertia ſui quintantem primæ, poſt datum & acceptum fiat æqualitas. Per canonem inueniantur tres numeri cum iiſdem conditionibus, ſintque illi 12 8 10. tum capiatur linea A ad libitum fiatque vt 12 ad 8 ita A ad B & vt 8 ad 10 ſic linea B ad C. Dico A B C eſſe lineas quæſitas nam quia B ad C. eſt vt 8 ad 10. quintans C erit æqualis quadranti B, ergo



tres quintantes C æquabuntur tribus quadrantibus B. & quia eſt vt 12 ad 8 ita A ad C ergo triens A æqualis erit duobus quadrantibus B igitur cum quadrans B æquetur quintanti C erit triens A æqualibus duobus quintantibus C. igitur triens A cum tribus quadrantibus B æquantur quinque quintantibus C, hoc eſt toti C. Præterea cum iam oſtenſum ſit quadrantem B æquari quintanti C, quatuor quintantes C cum quadrante B æquabuntur iterum quinque quintantibus C, ſeu toti C. Ac tandem quoniam probauimus trientem A æquari duobus quadrantibus B, & quadrantem B quintanti C, ſequitur duos trientes A æquales eſſe quatuor quintantibus C, ergo cum quintante C æquabuntur quinque quintantibus C hoc eſt toti C ac proinde inuentæ ſunt tres lineæ A B C tales vt poſt datas & acceptas partes quæ poſtulatæ ſunt, fiat æqualitas, quod erat demonſtrandum.

Propositio XXIII.

Inuenire quatuor quantitates, quarum ſi qualibet dederit & acceperit imperatam partem, fiat æqualitas.

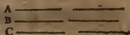
Sint inueniendi quatuor numeri tales, vt triens primi cum tribus quadrantibus ſecundi æquentur quatuor quintantibus tertii & quadranti ſecundi: itemque quinque ſextantibus quarti & quintanti tertii: ac demum duobus trientibus primi & ſextanti quarti. Ponamus quemcumque numerum pro eo, in quo debet fieri æqualitas, verbi gratia *119*, & ſit primus quæſitus *3* R à quo ſi tollas vnum trientem quem debet dare ſecundo, reſtant 2 R qui cum ſextante quarti debent facere 119. igitur 119 — 2 R æquantur ſextanti quarti, ac proinde quartus erit *714* — 12 R. quo dante ſui ſextantem, reſtat *595* — 10 R qui cum quintante tertii facit iterum 119. igitur ſi a 119 tollas *595* — 10 R, reſiduum 10 R — *476* eſt quintans tertii, ideoque tertius erit 50 R — *2380*. à quo ſi tollas quintantem, reſtabit 40 R — 1904, qui cum quadrante ſecundi debet facere 119. ergo ſi a 119 ipſum tollas, remanebit quadrans ſecundi *2023* -- 40 R. ac proinde ſecundus erit 8092 -- 160 R. ſupereſt ergo vt ſecundus dando quadrantem ſui, & accipiendo trientem primi æquetur 119. at poſt datum & acceptum habet *6069* — *119* R. qui propterea æqualis erit 119. & fit 1 R 50. ergo primus qui poſitus eſt *3* R eſt 150. & ita quatuor numeri quæſiti ſunt 150. *92*. 120. 114.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate B pro ea in qua debet fieri æqualitas ponatur A pro prima quæſita. ergo B — 2 A æquantur ſextanti quartæ. ac ideo quarta eſt *6* B -- 12 A quadrante ſextantem ſui, reſtat 5 B — 10 A quæ cum quintante tertiæ facit B. ergo 10 A — 4 B eſt quintans tertiæ quantitatis. igitur tertia quantitas eſt 50 A -- 20 B: hinc ſi tollas quintantem, reſtat 40 A -- 16 B quæ cum quadrante ſecundæ quæſitæ facit B. ergo quadrans ſecundæ eſt 17 B -- 40 A. & ita ſecunda erit *68* B — *160* A quæ poſt datum ſui quadrantem & acceptũ trientem primæ, habet 51 B -- 119 A æqualem B. igitur A æquatur $\frac{50\,B}{119}$

tientem adde vel detrahe quantitati conficiendæ, prout quotiens primus maior vel minor fuit quantitate conficienda, & ſummam vel reſiduum ſerua. Deinde differentiam numerorum exprimentium partes primæ quantitatis diuide per partes tertiæ (commutato vt dictum eſt denominatore) quotientem diuide per partes ſecundæ (facta prius eadem commutatione) quotienti adde numeratorem partium primæ: & per hanc ſummam diuide ſummam vel reſiduum ſeruatum, fietque quantitas quæ ducta in denominatorem primæ fractionis, exhibebit primam quantitatem quæſitam, vnde reliquæ non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ tres lineæ tales vt prima dans ſui trientem ſecundæ, ſecunda ſui quadrantem tertiæ, & tertia ſui quintantem primæ, poſt datum & acceptum fiat æqualitas. Per canonem inueniantur tres numeri cum iiſdem conditionibus, ſintque illi 12 8 10. tum capiatur linea A ad libitum fiatque vt 12 ad 8 ita A ad B & vt 8 ad 10 ſic linea B ad C. Dico A B C eſſe lineas quæſitas nam quia B ad C. eſt vt 8 ad 10. quintans C erit æqualis quadranti B, ergo tres quintantes C æquabuntur tribus quadrantibus B. & quia eſt vt 12 ad 8 ita A ad C ergo triens A æqualis erit duobus quadrantibus B igitur cum quadrans B æquetur quintanti C erit triens A æqualibus duobus quintantibus C. igitur triens A cum tribus quadrantibus B æquantur quinque quintantibus C, hoc eſt toti C. Præterea cum iam oſtenſum ſit quadrantem B æquari quintanti C, quatuor quintantes C cum quadrante B æquabuntur iterum quinque quintantibus C, ſeu toti C. Ac tandem quoniam probauimus trientem A æquari duobus quadrantibus B, & quadrantem B quintanti C, ſequitur duos trientes A æquales eſſe quatuor quintantibus C. ergo cum quintante C æquabuntur quinque quintantibus C hoc eſt toti C ac proinde inuentæ ſunt tres lineæ A B C tales vt poſt datas & acceptas partes quæ poſtulatæ ſunt, fiat æqualitas, quod erat demonſtrandum.



Propositio XXIII.

Inuenire quatuor quantitates, quarum ſi qualibet dederit & acceperit imperatam partem, fiat æqualitas.

SInt inueniendi quatuor numeri tales, vt triens primi cum tribus quadrantibus ſecundi æquentur quatuor quintantibus tertii & quadranti ſecundi: itemque quinque ſextantibus quarti & quintanti tertii: ac demum duobus trientibus primi & ſextanti quarti. Ponamus quemcumque numerum pro eo, in quo debet fieri æqualitas, verbi gratia 119, & ſit primus quæſitus 3 R à quo ſi tollas vnum trientem quem debet dare ſecundo, reſtant 2 R qui cum ſextante quarti debent facere 119. igitur 119 — 2 R æquantur ſextanti quarti, ac proinde quartus erit 714 — 12 R. quo dante ſui ſextantem, reſtat 595 — 10 R qui cum quintante tertii facit iterum 119. igitur ſi a 119 tollas 595 — 10 R, reſiduum 10 R — 476 eſt quintans tertii, ideoque tertius erit 50 R — 2380. à quo ſi tollas quintantem, reſtabit 40 R — 1904, qui cum quadrante ſecundi debet facere 119. ergo ſi a 119 ipſum tollas, remanebit quadrans ſecundi 2023 -- 40 R. ac proinde ſecundus erit 8092 -- 160 R. ſupereſt ergo vt ſecundus dando quadrantem ſui, & accipiendo trientem primi æquetur 119. at poſt datum & acceptum habet 6069 — 119 R. qui propterea æqualis erit 119. & fit 1 R 50. ergo primus qui poſitus eſt 3 R eſt 150. & ita quatuor numeri quæſiti ſunt 150. 92. 120. 114.

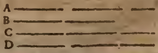
Per Algebram ſpecioſam, data quantitate B pro ea in qua debet fieri æqualitas ponatur A pro prima quæſita. ergo B — 2 A æquantur ſextanti quartæ. ac ideo quarta eſt 6 B -- 12 A quadrante ſextantem ſui, reſtat 5 B — 10 A quæ cum quintante tertiæ facit B. ergo 10 A — 4 B eſt quintans tertiæ quantitatis. igitur tertia quantitas eſt 50 A -- 20 B. hinc ſi tollas quintantem, reſtat 40 A -- 16 B quæ cum quadrante ſecundæ quæſitæ facit B. ergo quadrans ſecundæ eſt 17 B -- 40 A. & ita ſecunda erit 68 B — 160 A quæ poſt datum ſui quadrantem & acceptũ trientem primæ, habet 51 B -- 119 A æqualem B. igitur A æquatur $\frac{50\ B}{119}$

Hinc Canon.

Quantitatem in qua fiat æqualitas, cape quam volueris & hanc diuide per partes datas quartæ quantitatis quæſitæ (commutando prius denominatorem partium in differentiam numerorum, qui illas exprimunt) quotientis iſtius primi & quantitatis conficiendæ differentiam diuide per partes tertiæ quantitatis (commutato ſimiliter denominatore in differentiam numerorum) hunc ſecundum quotientem adde vel detrahe quantitati conficiendæ, prout primus quotiens maior aut minor fuit quantitate conficienda : ſummam vel differentiam diuide per partes ſecundæ (mutando ſemper denominatorem vt dictum eſt) huius quotientis & quantitatis conficiendæ interuallum ſerua. Deinde differentiam numerorum exprimentium partes quantitatis primæ quæſitæ diuide per partes quartæ (commutando vt iam diximus denominatorem) quotientem diuide per partes tertiæ (facta prius ſimili commutatione) quotientem rurſus diuide per partes ſecundæ (commutato ſimiliter denominatore) huius quotientis & numeratoris partium primæ cape differentiam ac per eam diuide interuallum ſupra ſeruatum : habebiſque quantitatem, quæ ducta in denominatorem partium primæ, exhibebit primam quantitatem quæſitam, vnde reliquæ non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ quatuor lineæ tali ratione, vt prima dans ſecundæ trientem ſui, ſecunda quadrantem tertiæ, tertia quintantem quartæ, & quarta ſextantem primæ, poſt datum & acceptum fiat æqualitas. Inueniantur primò per canonem, quatuor numeri cum iiſdem conditionibus, ſintque illi 150. 92. 120. 114. tùm capiatur quæcumque linea pro prima quæſitarum, ſitque A deinde fiat vt 150 ad 92 ita A ad B, & vt 92 ad 120 ita B ad C, & vt 120 ad 114 ita C ad D. Dico A B C D eſſe quatuor lineas quæſitas. nam quia eſt A ad B vt 150 ad 92 & B ad C vt 92 ad 120 : erit A plus B ad C vt 150 plus 92 ad 120. ergo vt triens 150 plus ſemiſſe 92 ad quatuor quintantes 120, ita triens A plus ſemiſſe B ad quatuor quintantes C. ſed triens 150 plus ſemiſſe



92 ad quatuor quintantes 120 habent proportionem æqualitatis, ergo triens A plus ſemiſſe B habebit quoque proportionem æqualitatis ad quatuor quintantes C. & addendo vtrique parti æquationis quadrantem B, erit triens A plus ſemiſſe B plus quadrante B æqualis quadranti B plus quatuor quintantibus C. Similiter quoniam eſt C ad D vt 120 ad 114 ergo erit vt 92 plus 120 ad 114 ita B plus C ad D ac proinde vt quadrans 92 plus tribus quintantibus 120 ad quinque ſextantes 114, ita quadrans B plus tribus quintantibus C ad quinque ſextantes D: ſed quadrans 92 plus tribus quintantibus 120 ad quinque ſextantes 114 habet rationem æqualitatis. igitur quadrans B plus tribus quintantibus C habebit quoque rationem æqualitatis ad quinque ſextantes D, & addendo vtrique parti æquationis quintantem C, erit quadrans B plus quatuor quintantibus C æqualis quintanti C plus quinque ſextantibus D. Sed iam oſtenſum eſt quadrantem B plus quatuor quintantibus C æquari trienti A plus ſemiſſe B plus quadrante B. igitur A plus ſemiſſe B plus quadrante B æquatur quintanti C plus quinque ſextantibus D. ſimili ratione per 22 quinti erit A ad D vt 150 ad 114, & inuertendo erit vt 114 ad 150 vt D ad A ergo cum ſit vt 120 ad 114 ita C ad D, erit vt 120 plus 114 ad 150 ita C plus D ad A. ac proinde vt quintans 120 plus duobus trientibus 114 ad duos trientes 150 ita quintans C plus duobus trientibus D ad duos trientes A. Sed quintãs 120 plus duobus trientibus 114 habet proportionem æqualitatis ad duos trientes 150, igitur quintans C plus duobus trientibus D habet etiam proportionem æqualitatis ad duos trientes A & addendo vtrobique ſextantem D erunt etiam duo trientes A plus ſextante D æquales quintanti C plus duobus trientibus D plus ſextante D. ſed duo trientes D æquantur quatuor ſextantibus D. igitur duo trientes A plus ſextante D æquales ſunt quintanti C plus quinque ſextantibus D. At iam probauimus quintantem C plus quinque ſextantibus D æquari trienti A plus ſemiſſe B plus quadrante B. ergo triens A plus ſemiſſe B plus quadrante B æquantur duobus trientibus A plus ſextante D. Sed ſemiſſis B plus quadrante B æquatur tribus quadrantibus B. igitur triens A plus tribus quadrantibus B æquatur quadranti B plus quatuor quintantibus C, itemque quintanti C plus quinque ſextantibus D, itemque ſextanti D plus duobus trientibus A. Quod erat tandem demonſtrandum.

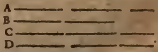
Propoſitio

Hinc Canon.

Quantitatem in qua fiat æqualitas, cape quam volueris & hanc diuide per partes datas quartæ quantitatis quæſitæ (commutando prius denominatorem partium in differentiam numerorum, qui illas exprimunt) quotientis iſtius primi & quantitatis conficiendæ differentiam diuide per partes tertiæ quantitatis (commutato ſimiliter denominatore in differentiam numerorum) hunc ſecundum quotientem adde vel detrahe quantitati conficiendæ, prout primus quotiens maior aut minor fuit quantitate conficienda : ſummam vel differentiam diuide per partes ſecundæ (mutando ſemper denominatorem vt dictum eſt) huius quotientis & quantitatis conficiendæ interuallum ſerua. Deinde differentiam numerorum exprimentium partes quantitatis primæ quæſitæ diuide per partes quartæ (commutando vt iam diximus denominatorem) quotientem diuide per partes tertiæ (facta prius ſimili commutatione) quotientem rurſus diuide per partes ſecundæ (commutato ſimiliter denominatore) huius quotientis & numeratoris partium primæ cape differentiam ac per eam diuide interuallum ſupra ſeruatum : habebiſque quantitatem, quæ ducta in denominatorem partium primæ, exhibebit primam quantitatem quæſitam, vnde reliquæ non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ quatuor lineæ tali ratione, vt prima dans ſecundæ trientem ſui, ſecunda quadrantem tertiæ, tertia quintantem quartæ, & quarta ſextantem primæ, poſt datum & acceptum fiat æqualitas. Inueniantur primò per canonem, quatuor numeri cum iiſdem conditionibus, ſintque illi 150. 92. 120. 114. tùm capiatur quæcumque linea pro prima quæſitarum, ſitque A deinde fiat vt 150 ad 92 ita A ad B, & vt 92 ad 120 ita B ad C, & vt 120 ad 114 ita C ad D. Dico A B C D eſſe quatuor lineas quæſitas. nam quia eſt A ad B vt 150 ad 92 & B ad C vt 92 ad 120 : erit A plus B ad C vt 150 plus 92 ad 120. ergo vt triens 150 plus ſemiſſe 92 ad quatuor quintantes 120, ita triens A plus ſemiſſe B ad quatuor quintantes C. ſed triens 150 plus ſemiſſe



92 ad quatuor quintantes 120 habent proportionem æqualitatis, ergo triens A plus ſemiſſe B habebit quoque proportionem æqualitatis ad quatuor quintantes C. & addendo vtrique parti æquationis quadrantem B, erit triens A plus ſemiſſe B plus quadrante B æqualis quadranti B plus quatuor quintantibus C. Similiter quoniam eſt C ad D vt 120 ad 114 ergo erit vt 92 plus 120 ad 114 ita B plus C ad D ac proinde vt quadrans 92 plus tribus quintantibus 120 ad quinque ſextantes 114, ita quadrans B plus tribus quintantibus C ad quinque ſextantes D: ſed quadrans 92 plus tribus quintantibus 120 ad quinque ſextantes 114 habet rationem æqualitatis. igitur quadrans B plus tribus quintantibus C habebit quoque rationem æqualitatis ad quinque ſextantes D, & addendo vtrique parti æquationis quintantem C, erit quadrans B plus quatuor quintantibus C æqualis quintanti C plus quinque ſextantibus D. Sed iam oſtenſum eſt quadrantem B plus quatuor quintantibus C æquari trienti A plus ſemiſſe B plus quadrante B. igitur A plus ſemiſſe B plus quadrante B æquatur quintanti C plus quinque ſextantibus D. ſimili ratione per 22 quinti erit A ad D vt 150 ad 114, & inuertendo erit vt 114 ad 150 vt D ad A ergo cum ſit vt 120 ad 114 ita C ad D, erit vt 120 plus 114 ad 150 ita C plus D ad A. ac proinde vt quintans 120 plus duobus trientibus 114 ad duos trientes 150 ita quintans C plus duobus trientibus D ad duos trientes A. Sed quintãs 120 plus duobus trientibus 114 habet proportionem æqualitatis ad duos trientes 150, igitur quintans C plus duobus trientibus D habet etiam proportionem æqualitatis ad duos trientes A & addendo vtrobique ſextantem D erunt etiam duo trientes A plus ſextante D æquales quintanti C plus duobus trientibus D plus ſextante D. ſed duo trientes D æquantur quatuor ſextantibus D. igitur duo trientes A plus ſextante D æquales ſunt quintanti C plus quinque ſextantibus D. At iam probauimus quintantem C plus quinque ſextantibus D æquari trienti A plus ſemiſſe B plus quadrante B. ergo triens A plus ſemiſſe B plus quadrante B æquantur duobus trientibus A plus ſextante D. Sed ſemiſſis B plus quadrante B æquatur tribus quadrantibus B. igitur triens A plus tribus quadrantibus B æquatur quadranti B plus quatuor quintantibus C, itemque quintanti C plus quinque ſextantibus D, itemque ſextanti D plus duobus trientibus A. Quod erat tandem demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Inuenire tres quantitates tales vt ſi qualibet iungatur parti præſcripta duarum aliarum ſimul fiat æqualitas.

SInt inueniendi tres numeri tali ratione vt ſi primus iungatur trienti ſummæ aliorum, ſecundus quadranti ſummæ aliorum tertius aliorum quintanti fiat æqualitas. Ponantur tres illi numeri 1R 1A 1B ergo $1R + \frac{1A}{3} + \frac{1B}{3}$ æquatur $1A + \frac{1B}{4} + \frac{1A}{4}$ igitur poſt debitam metatheſim 1B æqualis erit $8A - 9R$. Ponantur ergo iterum tres numeri 1R 1A $8A - 9R$. Ergo $8A - 9R + \frac{1R}{5} + \frac{1A}{5}$ æquatur $1A + \frac{1R}{4} + \frac{8A - 9R}{4}$. Et fit 1A æqualis $\frac{17R}{13}$. Igitur tres numeri 1R. $\frac{17R}{13}$. $\frac{19R}{13}$ & eſt ſoluta quæſtio indefinitè. Poteſtquē ſumi quilibet numerus pro valore 1R. Secundum quem examinatæ reliquæ fractiones exhibebunt reliquos : vt ſi ſumas 13 pro primo numero 1R, reliqui duo erunt 17. 19. Si ſumas 39 reliqui duo erunt 51. 57. & ſic de aliis.

Per Algebram ſpecioſam, alia progrediar methodo data quantitate B in qua debet fieri æqualitas, & datis $\frac{2}{3}$ ſummæ aliarum cum prima, $\frac{3}{4}$ ſummæ aliarum cum ſecunda, & $\frac{4}{5}$ ſummæ aliarum cum tertia. Nam poſita prima quantitate A, erit $B - A$ æqualis $\frac{2}{3}$ reliquarum, ac proinde reliquæ ērunt $\frac{3B - 3A}{2}$, quibus ſi

M

iungas primam A fiet ſumma omnium $\frac{3B - A}{2}$. Quoniam vero B continet ſecundam cum $\frac{3}{4}$ reliquarum, multiplicando B per 4 fient 4 B æquales quadruplo ſecundæ & triplo reliquarum: ergo ſi triplices ſummam omnium & productum $\frac{9B - 3A}{2}$ tollas ex 4 B remanebit ſecunda $\frac{3A - B}{2}$. Similiter quia B continet tertiam cum $\frac{4}{5}$ reliquarum, multiplicando B per 5, fiunt 5 B æquales quintuplo tertiæ, & quadruplo reliquarum: ergo ſi quadruples ſummam omnium, & productum 6 B — 2 A tollas ex 5 B, remanebit tertia 2 A — B. Hanc autem tertiam alio modo inuenies, tollendo ſecundam iam inuentam ex ſumma ſecundæ & tertiæ iam inuenta, erit enim 2 B — 3 A, quæ ideo æquabitur 2 A — B & fit A æqualis $\frac{3B}{5}$. Inde autem innenies quantitates 6. 4. 2. & quotlibet volueris alias ſatisfacientes quæſtioni. Similiter ſi prima quantitas cum $\frac{4}{7}$ reliquarum, ſecunda cum $\frac{3}{5}$ reliquarum, & tertia cum $\frac{2}{3}$ reliquarum debeant, habere æqualitatem deprehendes 38. 34. 22. & quotcunque volueris alias.

Hinc Canon.

Tranſpone numeros primæ fractionis datæ, faciendo de numeratore denominatorem; & contra: huic fractioni adde vel detrahe quotientem qui fit multiplicando duas priores fractiones per crucem & productorum differentiam diuidendo per productum ex primo numeratore in differentiam numerorum ſecundæ fractionis datæ

PROPOSITIO XXIV.

Inuenire tres quantitates tales vt ſi qualibet iungatur parti præſcriptæ duarum aliarum ſimul fiat æqualitas.

SInt inueniendi tres numeri tali ratione vt ſi primus iungatur trienti ſummæ aliorum, ſecundus quadranti ſummæ aliorum tertius aliorum quintanti fiat æqualitas. Ponantur tres illi numeri 1R 1A 1B ergo 1R † $\frac{1A}{3}$ † $\frac{1B}{3}$ æquatur 1A † $\frac{1B}{4}$ † $\frac{1A}{4}$ igitur poſt debitam metatheſim 1B æqualis erit 8A — 9R. Ponantur ergo iterum tres numeri 1R 1A 8A — 9R. Ergo 8A -- 9R † $\frac{1R}{5}$ † $\frac{1A}{5}$ æquatur 1A † $\frac{1R}{4}$ † $\frac{8A — 9R}{4}$. Et fit 1A æqualis $\frac{17R}{13}$. Igitur tres numeri 1R. $\frac{17R}{13}$. $\frac{19R}{13}$ & eſt ſoluta quæſtio indefinitè. Poteſtque ſumi quilibet numerus pro valore 1R. Secundum quem examinatæ reliquæ fractiones exhibebunt reliquos: vt ſi ſumas 13 pro primo numero 1R, reliqui duo erunt 17. 19. Si ſumas 39 reliqui duo erunt 51. 57. & ſic de aliis.

Per Algebram ſpecioſam, alia progrediar methodo data quantitate B in qua debet fieri æqualitas, & datis $\frac{2}{3}$ ſummæ aliarum cum prima, $\frac{3}{4}$ ſummæ aliarum cum ſecunda, & $\frac{4}{5}$ ſummæ aliarum cum tertia. Nam poſita prima quantitate A, erit B —— A æqualis $\frac{2}{3}$ reliquarum, ac proinde reliquæ erunt $\frac{3B —— 3A}{2}$, quibus ſi

iungas primam A fiet ſumma omnium $\frac{3\,B - A}{2}$. Quoniam vero B continet ſecundam cum $\frac{3}{4}$ reliquarum, multiplicando B per 4 fient 4 B æquales quadruplo ſecundæ & triplo reliquarum : ergo ſi triplices ſummam omnium & productum $\frac{9\,B - 3\,A}{2}$ tollas ex 4 B remanebit ſecunda $\frac{3\,A - B}{2}$. Similiter quia B continet tertiam cum $\frac{4}{5}$ reliquarum, multiplicando B per 5, fiunt 5 B æquales quintuplo tertiæ, & quadruplo reliquarum : ergo ſi quadruples ſummam omnium, & productum 6 B —— 2 A tollas ex 5 B, remanebit tertia 2 A —— B. Hanc autem tertiam alio modo inuenies, tollendo ſecundam iam inuentam ex ſumma ſecundæ & tertiæ iam inuenta, erit enim 2 B —— 3 A, quæ ideo æquabitur 2 A —— B & fit A æqualis $\frac{3\,B}{5}$. Inde autem innenies quantitates 6. 4. 2 & quotlibet volueris alias ſatisfacientes quæſtioni. Similiter ſi prima quantitas cum $\frac{4}{7}$ reliquarum, ſecunda cum $\frac{3}{5}$ reliquarum, & tertia cum $\frac{2}{3}$ reliquarum debeant, habere æqualitatem deprehendes 38. 34. 22. & quotcumque volueris alias.

Hinc Canon.

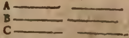
Tranſpone numeros primæ fractionis datæ, faciendo de numeratore denominatorem, & contra : huic fractioni adde vel detrahe quotientem qui fit multiplicando duas priores fractiones per crucem & productorum differentiam diuidendo per productum ex primo numeratore in differentiam numerorum ſecundæ fractionis datæ

(prout productus ex numeratore primo in denominatorem ſecundum minor eſt vel maior producto ex numeratore ſecundo in denominatorem primum) & ſummam vel reſiduum conſerua. Tum multiplica primam & tertiam fractionem per crucem, & productorum differentiam diuide per productum ex primo numeratore in differentiam numerorum tertiæ fractionis. Hunc quotientem & ſummam vel reſiduum conſeruatum multiplica per crucem (reductis, ſi opus eſt, integris in fractionem) & productorum differentiam vel ſummam (iuxta conditionem iam explicatam) duc in quemlibet numerum, in quo volueris fieri æqualitatem, productumque ſerua.

Deinde fractioni per tranſpoſitionem factæ adde id quod fit multiplicando fractionem per tranſpoſitionem factam vnitate multatam, per ſecundam fractionem datam (commutato prius eius denominatore in differentiam numerorum, ex quibus componitur) & ſummam nota. Præterea differentiam numerorum primæ fractionis datæ duc in tertium numeratorem & productum diuide per id quod fit ex primo numeratore in differentiam numerorum tertiæ fractionis. Hanc fractionem & ſummam mox notatam multiplica per crucem, & per productorum aggregatum diuide productum ſupra ſeruatum, fietque prima quantitas quæſita: cum autem qualibet poſſit poni pro libito prima, tres quæſitæ non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ tres lineæ tales vt prima cum duobus trientibus reliquarum, ſecunda cum tribus reliquarum quadrantibus, tertia vero cum quatuor reliquarum quintantibus, faciant æqualitatem. Inueniantur primò tres numeri cum iiſdem omnino conditionibus, per canonem: ſintque illi 6 4 2. Tum accipiatur A linea pro libito. Fiatque vt 6 ad 4 ita A ad B, & vt 4 ad 2 ita B ad C. Dico tres lineas A B C eſſe illas quæ poſtulantur. Nam cum ſit vt 6 ad 4 ita A ad B erit ſemiſſis B æqualis trienti A cumque ſit vt 4 ad 2 ſic B ad C, erit C ſemiſſis B, ergo triens B & C ſimul iunctarum æquabitur C, ac proinde duo trientes B C æquales erunt B. Igitur A cum duobus trientibus B & C æqualis erit A & B ſimul.



Sed iiſdem æquatur B cum tribus quadrantibus A & C, ſiquidem

cum ſit vt 6 ad 4 ita A ad B, ſemiſſis B erit æqualis trienti, ergo cum iam oſtenſum ſit C eſſe æqualem ſemiſſi B, erit etiam C æqualis trienti A, ergo tres quadrantes A C æquantur A ergo B cum tribus quadrantibus A C æquatur A & B.

Similiter, cum iam oſtenderimus C eſſe ſemiſſem B & trientem A, erit C quintans A & B ſimul, igitur A & B ſimul ſunt quintuplæ C, ac proinde A & ſemiſſis B faciunt quatuor quintantes A B. Ergo cum C ſit æqualis ſemiſſi B, erit C cum quatuor quintantibus A B æqualis A B, ergo cum A plus B æquetur A plus duobus trientibus B C, itemque B cum tribus quadrantibus C A, itemque C cum quatuor quintantibus A B, ſequitur A plus duobus trientibus B C, & B plus tribus quadrantibus C A, & C plus quatuor quintantibus A B eſſe inter ſe æquales. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

Inuenire quatuor quantitates, quarum qualibet cum partibus praſcriptis aliarum iunctâ, fiat aqualitas.

SInt inueniendi quatuor numeri tales, vt primus cum triente aliorum; ſecundus cum aliorum quadrante, tertius cum quintante, & quartus cum cæterorum ſextante faciant ſummas æquales. Ponatur 1 R ſecundus 1 A, tertius 1 B, quartus 1 C. Procedatur eodem modo, quo proceſſimus in ſuperiori & tandem inuenientur numeri 47. 77. 92. 101. ſatisfacientes quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, ſi iubeatur inquiri quatuor quantitates, ita vt prima cum $\frac{4}{7}$ reliquarum, ſecunda cum $\frac{2}{3}$, tertia cum $\frac{5}{8}$ quarta denique cum $\frac{6}{11}$ faciant ſummas æquales: pono A eſſe primam, & B quantitatem in qua debet fieri æqualitas. Ergo B — A æquatur $\frac{4}{7}$ reliquarum ac proinde $\frac{7B - 7A}{4}$ ſunt

æquales

(prout productus ex numeratore primo in denominatorem ſecundum minor eſt vel maior producto ex numeratore ſecundo in denominatorem primum) & ſummam vel reſiduum conſerua. Tum multiplica primam & tertiam fractionem per crucem, & productorum differentiam diuide per productum ex primo numeratore in differentiam numerorum tertiæ fractionis. Hunc quotientem & ſummam vel reſiduum conſeruatum multiplica per crucem (reductis, ſi opus eſt, integris in fractionem) & productorum differentiam vel ſummam (iuxta conditionem iam explicatam) duc in quemlibet numerum, in quo volueris fieri æqualitatem, productumque ſerua.

Deinde fractioni per tranſpoſitionem factæ adde id quod fit multiplicando fractionem per tranſpoſitionem factam vnitate multatam, per ſecundam fractionem datam (commutato prius eius denominatore in differentiam numerorum, ex quibus componitur) & ſummam nota. Præterea differentiam numerorum primæ fractionis datæ duc in tertium numeratorem & productum diuide per id quod fit ex primo numeratore in differentiam numerorum tertiæ fractionis. Hanc fractionem & ſummam mox notatam multiplica per crucem, & per productorum aggregatum diuide productum ſupra ſeruatum, fietque prima quantitas quæſita: cum autem quælibet poſſit poni pro libito prima, tres quæſitæ non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ tres lineæ tales vt prima cum duobus trientibus reliquarum, ſecunda cum tribus reliquarum quadrantibus, tertia vero cum quatuor reliquarum quintantibus, faciant æqualitatem. Inueniantur primò tres numeri cum iiſdem omnino conditionibus, per canonem: ſintque illi 6. 4 2. Tum accipiatur A linea pro libito. Fiatque vt 6 ad 4 ita A ad B, & vt 4 ad 2 ita B ad C. Dico tres lineas A B C eſſe illas quæ poſtulantur. Nam cum ſit vt 6 ad 4 ita A ad B erit ſemiſſis B æqualis trienti A cumque ſit vt 4 ad 2 ſic B ad C, erit C ſemiſſis B, ergo triens B & C ſimul iunctarum æquabitur C, ac proinde duo trientes B C æquales erunt B. Igitur A cum duobus trientibus B & C æqualis erit A & B ſimul.



Sed iiſdem æquatur B cum tribus quadrantibus A & C, ſiquidem

cum ſit vt 6 ad 4 ita A ad B, ſemiſſis B erit æqualis trienti, ergo cum iam oſtenſum ſit C eſſe æqualem ſemiſſi B, erit etiam C æqualis trienti A, ergo tres quadrantes A C æquantur A ergo B cum tribus quadrantibus A C æquatur A & B.

Similiter, cum iam oſtenderimus C eſſe ſemiſſem B & trientem A, erit C quintans A & B ſimul, igitur A & B ſimul ſunt quintuplæ C, ac proinde A & ſemiſſis B faciunt quatuor quintantes A B. Ergo cum C ſit æqualis ſemiſſi B, erit C cum quatuor quintantibus A B æqualis A B, ergo cum A plus B æquetur A plus duobus trientibus B C, itemque B cum tribus quadrantibus C A, itemque C cum quatuor quintantibus A B, ſequitur A plus duobus trientibus B C, & B plus tribus quadrantibus C A, & C plus quatuor quintantibus A B eſſe inter ſe æquales. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XXV.

Inuenire quatuor quantitates, quarum qualibet cum partibus præſcriptis aliarum iunctâ, fiat æqualitas.

Sint inueniendi quatuor numeri tales, vt primus cum triente aliorum, ſecundus cum aliorum quadrante, tertius cum quintante, & quartus cum cæterorum ſextante faciant ſummas æquales. Ponatur I R ſecundus I A, tertius I B, quartus I C. Procedatur eodem modo, quo proceſſimus in ſuperiori & tandem inuenientur numeri 47. 77. 92. 101. ſatisfacientes quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, ſi iubeatur inquiri quatuor quantitates, ita vt prima cum $\frac{4}{7}$ reliquarum, ſecunda cum $\frac{2}{3}$, tertia cum $\frac{5}{8}$ quarta denique cum $\frac{6}{11}$ faciant ſummas æquales : pono A eſſe primam, & B quantitatem in qua debet fieri æqualitas. Ergo B — A æquatur $\frac{4}{7}$ reliquarum ac proinde $\frac{7\,B - 7\,A}{4}$ ſunt

æquales

æquales aggregato ſecundæ tertiæ & quartæ. Igitur ſumma quatuor quæſitarum erit $\frac{7B - 3A}{4}$. Et quoniam B continet ſecunda & $\frac{2}{3}$ reliquarum 3B continebit ter ſecundam & bis reliquas, ac proinde ſi duplam omnium ſummam $\frac{14B - 6A}{4}$ tollas ex 3B remanebit ſecunda $\frac{6A - 2B}{4}$. Similiter quia B continet tertiam & $\frac{5}{8}$ reliquarum, multiplicando B per 8, erunt 8B æquales octuplo tertiæ & quintuplo reliquarum: Igitur ſi quintuplam omnium ſummam $\frac{35B - 15A}{4}$ tollas ex 8B, remanebit triplum tertiæ, quod triplum ſi diuidas per 3, fiet tertia $\frac{15A - 3B}{12}$. Denique cum B contineat quartam & $\frac{6}{11}$ cæterarum, 11B continebit quartam vndecies & reliquas ſexies. Ergo ſi ex 11B tollas ſextuplam omnium ſummam $\frac{42B - 18A}{4}$, remanebit quintuplam quartæ: ac proinde ſi illud quintuplum diuidas per 5, reſtabit quarta $\frac{2B + 18A}{20}$. Sed illa eadem quarta obtinebitur alio modo tollendo ex ſumma ſecundæ tertiæ & quartæ, $\frac{7B - 7A}{4}$ ſummam ſecundæ & tertiæ $\frac{33A - 9B}{12}$. Relinquetur enim iterum quarta $\frac{30B - 54A}{12}$.

Quæ proinde æquabuntur $2B + 18\frac{A}{20}$. Et ſit A æqualis $\frac{576\,B}{1296}$.

Ergo ſi capias quemcumque numerum pro eo, in quo volueris fieri æqualitatem, deprehendes quatuor quantitates quæſitas: vt ſi capias 972, multiplicando valorem A per 972. fiet prima quantitas 432. Secunda 162, tertia 297, & quarta 486. Et ſatisfaciunt quæſtioni. Si capias 36, fient 16. 6. 11. 18.

Hinc Canon.

Multiplica per crucem primam fractionem datam in tres alias ſigillatim & productorum differentiam diuide per productum ex numeratore primæ in differentiam numerorum qui tres fractiones ſequentes componunt duos priores quotientes inde natos adde vel detrahe (prout producti ex primæ numeratore in denominatores ſequentium minores ſunt aut maiores productis ex denominatore primæ in ſequentium numeratores) primæ fractionis datæ, poſtquam inuerteris eius numeros: ſummam vel reſiduum & tertium quotientem multiplica per crucem ac productorum ſummam vel interuallum (iuxta conditionem ſupra explicatam) duc in quemcumque numerum, in quo volueris fieri æqualitatem, productumque conſerua. Deinde differentiam numerorum primæ fractionis duc ſigillatim, in numeratores trium poſteriorum fractionum, & productis ſuppone denominatores trium quotientum præcedentium: duos priores quotientes de nouo factos adde cum prima fractione imerſis prius eius numeris: ſummam hanc & tertium quotientem mox factum multiplica per crucem, ac per productorum aggregatum diuide productum, quem ſupra iuſſimus conſeruari, fietque prima quantitas quæſita: cum autem quælibet poſſit poni prima ad libitum, quatuor quæſitæ non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ quatuor lineæ tales vt prima cum quatuor ſeptantibus reliquarum, ſecunda cum duobus trientibus reliquarum tertia cum quinque cæterarum octantibus ac denique quarta cum ſex vndecimus reliquarum ſint æquales inter ſe inueniantur primo per ca-

æquales aggregato ſecundæ tertiæ & quartæ. Igitur ſumma quatuor quæſitarum erit $\frac{7B - 3A}{4}$. Et quoniam B continet ſecunda & $\frac{2}{3}$ reliquarum 3 B continebit ter ſecundam & bis reliquas, ac proinde ſi duplam omnium ſummam $\frac{14B - 6A}{4}$ tollas ex 3 B remanebit ſecunda $\frac{6A - 2B}{4}$. Similiter quia B continet tertiam & $\frac{5}{8}$ reliquarum, multiplicando B per 8, erunt 8 B æquales octuplo tertiæ & quintuplo reliquarum : Igitur ſi quintuplam omnium ſummam $\frac{35B - 15A}{4}$ tollas ex 8 B, remanebit triplum tertiæ, quod triplum ſi diuidas per 3, fiet tertia $\frac{15A - 3B}{12}$. Denique cum B contineat quartam & $\frac{6}{11}$ cæterarum, 11 B continebit quartam vndecies & reliquas ſexies. Ergo ſi ex 11 B tollas ſextuplam omnium ſummam $\frac{42B - 18A}{4}$, remanebit quintuplam quartæ : ac proinde ſi illud quintuplum diuidas per 5, reſtabit quarta $\frac{2B + 18A}{20}$. Sed illa eadem quarta obtinebitur alio modo tollendo ex ſumma ſecundæ tertiæ & quartæ, $\frac{7B - 7A}{4}$ ſummam ſecundæ & tertiæ $\frac{33A - 9B}{12}$. Relinquetur enim iterum quarta $\frac{30B - 54A}{12}$.

Quæ proinde æquabuntur $\frac{2\,B + 18\,A}{20}$. Et fit A æqualis $\frac{576\,B}{1296}$. Ergo ſi capias quemcumque numerum pro eo, in quo volueris fieri æqualitatem, deprehendes quatuor quantitates quæſitas: vt ſi capias 972, multiplicando valorem A per 972. fiet prima quantitas 432. Secunda 162, tertia 297, & quarta 486. Et ſatisfaciunt quæſtioni. Si capias 36, fient 16. 6. 11. 18.

Hinc Canon.

Multiplica per crucem primam fractionem datam in tres alias ſigillatim & productorum differentiam diuide per productum ex numeratore primæ in differentiam numerorum qui tres fractiones ſequentes componunt duos priores quotientes inde natos adde vel detrahe (prout producti ex primæ numeratore in denominatores ſequentium minores ſunt aut maiores productis ex denominatore primæ in ſequentium numeratores) primæ fractionis datæ, poſtquam inuerteris eius numeros: ſummam vel reſiduum & tertium quotientem multiplica per crucem ac productorum ſummam vel interuallum (iuxta conditionem ſupra explicatam) duc in quemcumque numerum, in quo volueris fieri æqualitatem, productumque conſerua. Deinde differentiam numerorum primæ fractionis duc ſigillatim, in numeratores trium poſteriorum fractionum, & productis ſuppone denominatores trium quotientum præcedentium: duos priores quotientes de nouo factos adde cum prima fractione imerſis prius eius numeris: ſummam hanc & tertium quotientem mox factum multiplica per crucem, ac per productorum aggregatum diuide productum, quem ſupra iuſſimus conſeruari, fietque prima quantitas quæſita: cum autem quælibet poſſit poni prima ad libitum, quatuor quæſitæ non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ quatuor lineæ tales vt prima cum quatuor ſeptantibus reliquarum, ſecunda cum duobus trientibus reliquarum tertia cum quinque cæterarum octantibus ac denique quarta cum ſex vndecimus reliquarum ſint æquales inter ſe inueniantur primo per ca-



nonem quatuor numeri cum iiſdem omninò conditionibus: ſintque illi 16. 6. 11. 18. Tum capiatur A linea ad libitum, fiatque vt 16 ad 6 ita A ad B. Deinde fiat quoque vt 6 ad 11 ita B ad C. Rurſus fiat vt 11 ad 18 ita C ad D. Dico A B C D eſſe lineas quæſitas. Cum enim ſit vt 6 ad 11 ita B ad C, erunt ſex vndecimæ C æquales B, ſicut 6 vndecimæ 11 æquantur C. Sed quoniam eſt vt 6 ad 11 ita B ad C & vt 11 ad 18 ita C ad D erit etiam vt 6 ad 18 ita B ad D. Ergo B eſt triens D ac propterea D eſt tripla B. At quia eſt vt 16 ad 6 ita A ad B & vt 6 ad 11 ita B ad C, erit quoque vt 16 plus 6 ad 11, ita A plus B ad C. Sed 16 plus 6 æquantur duplo 11 ergo A plus B æquabuntur duplo C. Ac proinde cum ſex vndecimæ C æquentur B, erunt ſex vndecimæ A plus B æquales duplo B. Igitur ſex vndecimæ A B C æquales ſunt triplo B ergo cum iam oſtenſum ſit D eſſe triplam B, ſequitur D plus ſex vndecimis A B C æquari duplo D.

Sed eidem duplo D æquatur A plus quatuor ſeptimis B C D, item B cum duobus trientibus C D A, & C cum quinque octantibus D A B, ſiquidem propter proportionem prædictam erit vt 16 ad 6 11 & 18 ita A ad B C D. Sed quatuor ſeptimæ 6 11 18 ſimul æquales ſunt 18 plus triente 6, igitur quatuor ſeptimæ B C D æquantur D plus triente B. At 16 plus triente 6 æquales ſunt 18. Ergo A plus triente B æquales ſunt D. & ita A plus quatuor ſeptimis B C D æquantur duplo D.

Similiter duo trientes 16 11 18 æquantur quintuplo 6, ergo duo trientes A C D æquales erunt quintuplo B. Sed iam oſtendi triplum B æquari D, igitur duo trientes A C D æquantur D plus dupla B. Ac proinde duo trientes A C D plus B æquantur duplo D.

Denique ne fuſior ſim in re facili, quinque octantes 16 6 18 ſimul cum 11 æquales ſunt duplo 18. Igitur quinque octantes A B D cum C æquales erunt duplo D. Ergo cum duplum D æquetur ſingulis lineis cum partibus præſcriptis reliquarum, ſequitur ſingulas cum præſcriptis reliquarum partibus æquales eſſe inter ſe. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XXVI.

Data ſumma duarum quantitatum & plano illarum, diſtinguere ſingulas.

ESto ſumma 10 & productus ſiue planus 16. Ponatur 1 R pro vno illorum duorum numerorum, ergo alter erit 10 —— 1 R. Productus eſt 10 R —— 1 Q. Ergo 16 æquatur 10 R —— 1 Q. Ac proinde 1 R eſt 2 vel 8.

Per Algebram ſpecioſam, data ſumma B & plano C. Ponatur A pro differentia quantitatum. Igitur $\frac{B + A}{2}$ & $\frac{B - A}{2}$ erunt quantitates quæſitæ per Propoſ. I huius. Harũ planus $\frac{B \text{ quadr.} - A \text{ quadr.}}{4}$ æqualis C. Ac propterea B quadr. —— 4 C æquatur A quadr.

Hinc Canon.

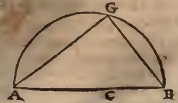
Ex quadrato dimidiæ ſummæ tolle planum datum: reſidui radix quadrata eidem dimidiæ ſummæ addita & detracta exhibebit duas quantitates ſigillatim.

Vel

Quadruplum plani dati tolle de quadrato ſummæ datæ, & reſtabit quadratum differentiæ quantitatum. Vnde per Canonem propoſ. I. ſingulæ quantitates non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Detur A B ſumma duarum linearum, & B C potens planum datum: ſuper A B fiat circulus, in quo inſcribatur A G dupla ipſius B C. Dico B G fore differentiam duarum linearum quæſitarum. Nam cum A G ſit dupla B C erit quadratum A G quadruplum lineæ B C. At quadratum A G cum quadrato B G æquatur quadrato A B ergo per 8 ſecundi linea B G duarum linearum quarum B C eſt planum.



Aliam



nonem quatuor numeri cum iiſdem omninò conditionibus: ſintque illi 16. 6. 11. 18. Tum capiatur A linea ad libitum, fiatque vt 16 ad 6 ita A ad B. Deinde fiat quoque vt 6 ad 11 ita B ad C. Rurſus fiat vt 11 ad 18 ita C ad D. Dico A B C D eſſe lineas quæſitas. Cum enim ſit vt 6 ad 11 ita B ad C, erunt ſex vndecimæ C æquales B, ſicut 6 vndecimæ 11 æquantur C. Sed quoniam eſt vt 6 ad 11 ita B ad C & vt 11 ad 18 ita C ad D erit etiam vt 6 ad 18 ita B ad D. Ergo B eſt triens D ac propterea D eſt tripla B. At quia eſt vt 16 ad 6 ita A ad B & vt 6 ad 11 ita B ad C, erit quoque vt 16 plus 6 ad 11, ita A plus B ad C. Sed 16 plus 6 æquantur duplo 11 ergo A plus B æquabuntur duplo C. Ac proinde cum ſex vndecimæ C æquentur B, erunt ſex vndecimæ A plus B æquales duplo B. Igitur ſex vndecimæ A B C æquales ſunt triplo B ergo cum iam oſtenſum ſit D eſſe triplam B, ſequitur D plus ſex vndecimis A B C æquari duplo D.

Sed eidem duplo D æquatur A plus quatuor ſeptimis B C D, item B cum duobus trientibus C D A, & C cum quinque octantibus D A B, ſiquidem propter proportionem prædictam erit vt 16 ad 6 11 & 18 ita A ad B C D. Sed quatuor ſeptimæ 6 11 18 ſimul æquales ſunt 18 plus triente 6, igitur quatuor ſeptimæ B C D æquantur D plus triente B. At 16 plus triente 6 æquales ſunt 18. Ergo A plus triente B æquales ſunt D. & ita A plus quatuor ſeptimis B C D æquantur duplo D.

Similiter duo trientes 16 11 18 æquantur quintuplo 6, ergo duo trientes A C D æquales erunt quintuplo B. Sed iam oſtendi triplum B æquari D, igitur duo trientes A C D æquantur D plus dupla B. Ac proinde duo trientes A C D plus B æquantur duplo D.

Denique ne fuſior ſim in re facili, quinque octantes 16 6 18 ſimul cum 11 æquales ſunt duplo 18. Igitur quinque octantes A B D cum C æquales erunt duplo D. Ergo cum duplum D æquetur ſingulis lineis cum partibus præſcriptis reliquarum, ſequitur ſingulas cum præſcriptis reliquarum partibus æquales eſſe inter ſe. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XXVI.

Data ſumma duarum quantitatum & plano illarum, diſtinguere ſingulas.

Eſto ſumma 10 & productus ſiue planus 16. Ponatur 1 R pro vno illorum duorum numerorum, ergo alter erit 10 — 1 R. Productus eſt 10 R — 1 Q. Ergo 16 æquatur 10 R — 1 Q. Ac proinde 1 R eſt 2 vel 8.

Per Algebram ſpecioſam, data ſumma B & plano C. Ponatur A pro differentia quantitatum. Igitur $\frac{B+A}{2}$ & $\frac{B-A}{2}$ erunt quantitates quæſitæ per Propoſ. 1 huius. Harũ planus $\frac{B\ quadr. - A\ quadr.}{4}$ æqualis C. Ac propterea B quadr. — 4 C æquatur A quadr.

Hinc Canon.

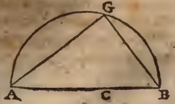
Ex quadrato dimidiæ ſummæ tolle planum datum: reſidui radix quadrata eidem dimidiæ ſummæ addita & detracta exhibebit duas quantitates ſigillatim.

Vel

Quadruplum plani dati tolle de quadrato ſummæ datæ, & reſtabit quadratum differentiæ quantitatum. Vnde per Canonem propoſ. 1. ſingulæ quantitates non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Detur A B ſumma duarum linearum, & B C potens planum datum: ſuper A B fiat circulus, in quo inſcribatur A G, dupla ipſius B C. Dico B G fore differentiam duarum linearum quæſitarum. Nam cum A G ſit dupla B C erit quadratum A G quadruplum lineæ B C. At quadratum A G cum quadrato B G æquatur quadrato A B ergo per 8 ſecundi linea B G duarum linearum quarum B C eſt planum.



Aliam dedimus demonſtrationem & effectionem eiuſdem rei propoſ. 2. lib. 1. nouæ clauis ad geometriam. Enimuerò, hæc propoſitio reuocatur ad illam, data media proportionali ex tribus geometricè proportionalibus, & ſumma extremarum, diſcernere extremas.

Scholium.

Quadratum differentiæ duarum linearum plus quadruplo ipſarum rectangulo, æquatur quadrato ſummæ illarum. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

Propositio XXVII.

Data ſumma duarum quantitatum & aggregato quadratorum ab illis ortorum, diſtinguere ſingulas.

ESto data ſumma duorum numerorum 8, & ſumma quadratorum 34. Ponatur I R pro vno numero. Igitur alter erit 8 -- I R. Horum quadrata ſunt I Q & *64* † I Q —— *16* R. Ergo illorum ſumma *64* † 2 Q —— 16 R æquatur 34. Ac proinde 14 æquale eſt 8 R —— 15. Et fit I R 5 vel 3. Tales-que erunt numeri quæſiti.

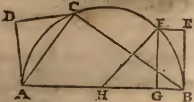
Per Algebram ſpecioſam data ſumma duarum quantitatum B & ſumma quadratorum C. Ponatur A vna ex quantitatibus quæſitis. Ergo B —— A erit altera. Harum quadrata ſimul iuncta faciunt. B quadr. † 2 A quadr. —— B A bis æqualia C. Igitur I Q eſt æquale $\frac{\text{B A bis} \dagger \text{C} - \text{B quadr.}}{2}$

Hinc Canon.

Tolle aggregatum quadratorum à quadrato ſummæ quantitatum datarum: reſidui dimidium aufer ex quadrato dimidiæ ſummæ quantitatum: illius enim poſterioris relicti radix quadrata ſupradictæ dimidiæ ſummæ addita & detracta, exhibebit quæſitas quantitates.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data A B ſumma linearum: B C autem ſit potens illarum quadrata. Diuidatur A B bifariam in H, fiatque ſuper illam ſemicirculus, cui inſcribatur B C, nectatur que A C. Tum ſuper A C fiat triangulum rectangulum & iſoſceles, cuius angulus rectus ſit D. Tum ponatur B E perpendicularis A B, & æqualis A D aut D C, ductaque E F parallela B A occurrat ſemicirculo in F, ex quo demittatur perpendiculariter F G. Dico A G G B eſſe lineas quæſitas. Nam quadratum A B per quartam ſecundi æquatur quadratis partium & duplo rectanguli ſub partibus: ſed quadratum A B



æquatur quadratis B C & A C per 31 tertii & 47 primi. Ergo cum B C poſſit quadrata partium erit A C æquale duplo rectanguli ſub partibus ſed dimidium quadrati A C eſt quadratum D C, quia triangulum A D C eſt rectangulum & iſoſceles. Eſt vero quadratum D C æquale quadrato B E ſeu G F ſeu rectangulo A G B. Ergo quadratum A B æquatur quadratis partium A G G B plus duplo quadrato D C hoc eſt plus quadrato A C. Sed æquatur etiam quadratis A C & C B. Ergo ſi dematur commune quadratum A C relinquetur quadratum C B æquale quadratis partium A G G B. Ac proinde diuiſa eſt linea A B in duas partes quarum quadrata æquantur quadrato B C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Poteſt aliis viis procedi in ſolutione huius problematis ponendo I R pro differentia quantitatum quæſitarum, vel I R pro dimidia differẽtia, vnde orirẽtur noui canones & noua effectiones. Enimuero duplum quadratum differentiæ duarum quantitatum plus duplo ſummæ illarum quadrato, æquatur quadruplo aggregato quadratorum ab illis ortorum.

Aliam dedimus demonſtrationem & effectionem eiuſdem rei propoſ. 2. lib. 1. nouæ clauis ad geometriam. Enimuerò, hæc propoſitio reuocatur ad illam, data media proportionali ex tribus geometricè proportionalibus, & ſumma extremarum, diſcernere extremas.

Scholium.

Quadratum differentiæ duarum linearum plus quadruplo ipſarum rectangulo, æquatur quadrato ſummæ illarum. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO XXVII.

Data ſummæ duarum quantitatum & aggregato quadratorum ab illis ortorum, diſtinguere ſingulas.

ESto data ſumma duorum numerorum 8, & ſumma quadratorum 34. Ponatur 1R pro vno numero. Igitur alter erit 8 -- 1R. Horum quadrata ſunt 1Q & 64 † 1Q —— 16R. Ergo illorum ſumma 64 † 2Q —— 16R æquatur 34. Ac proinde 14 æquale eſt 8R —— 15. Et fit 1R 5 vel 3. Tales-que erunt numeri quæſiti.

Per Algebram ſpecioſam data ſumma duarum quantitatum B & ſumma quadratorum C. Ponatur A vna ex quantitatibus quæſitis. Ergo B —— A erit altera. Harum quadrata ſimul iuncta faciunt. B quadr. † 2 A quadr. —— B A bis æqualia C. Igitur 1Q eſt æquale

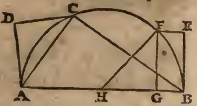
$$\frac{\text{B A bis} \dagger \text{C} - \text{B quadr.}}{2}$$

Hinc Canon.

Tolle aggregatum quadratorum à quadrato ſummæ quantitatum datarum: reſidui dimidium aufer ex quadrato dimidiæ ſummæ quantitatum: illius enim poſterioris relicti radix quadrata ſupradictæ dimidiæ ſummæ addita & detracta, exhibebit quæſitas quantitates.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data A B ſumma linearum : B C autem ſit potens illarum quadrata. Diuidatur A B bifariam in H, fiatque ſuper illam ſemicirculus, cui inſcribatur B C, nectatur que A C. Tum ſuper A C fiat triangulum rectangulum & iſoſceles, cuius angulus rectus ſit D. Tùm ponatur B E perpendicularis A B, & æqualis A D aut D C, ductaque E F parallela B A occurrat ſemicirculo in F, ex quo demittatur perpendiculariter F G. Dico A G G B eſſe lineas quæſitas. Nam quadratum A B per quartam ſecundi æquatur quadratis partium & duplo rectanguli ſub partibus : ſed quadratum A B æquatur quadratis B C & A C per 31 tertii & 47 primi. Ergo cum B C poſſit quadrata partium erit A C æquale duplo rectanguli ſub partibus ſed dimidium quadrati A C eſt quadratum D C, quia triangulum A D C eſt rectangulum & iſoſceles. Eſt vero quadratum D C æquale quadrato B E ſeu G F ſeu rectangulo A G B. Ergo quadratum A B æquatur quadratis partium A G G B plus duplo quadrato D C hoc eſt plus quadrato A C. Sed æquatur etiam quadratis A C & C B. Ergo ſi dematur commune quadratum A C relinquetur quadratum C B æquale quadratis partium A G G B. Ac proinde diuiſa eſt linea A B in duas partes quarum quadrata æquantur quadrato B C. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Poteſt aliis viis procedi in ſolutione huius problematis ponendo 1 R pro differentia quantitatum quæſitarum, vel 1 R pro dimidia differētia, vnde orirētur noui canones & noua effectiones. Enimuerò duplum quadratum differentiæ duarum quantitatum plus duplo ſummæ illarum quadrato, æquatur quadruplo aggregato quadratorum ab illis ortorum.

Propositio XXVIII.

Data ſumma duarum quantitatum & interuallo quadratorum ab illis ortorum, diſcernere ambas.

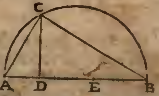
SIt numerus datus 20 pro ſumma & 80 pro interuallo. Ponatur 1 R pro vno ex illis, ergo alter erit 20 —— 1 R. Horum quadrata ſunt 1 Q & 400 † 1 Q — 40 R. interuallum verò quadratorum eſt 400 -- 40 R. Proinde eſt æquatio inter 80 & 400 -- 40 R. Igitur 1 R eſt 8, quem ſi tollas a 20, alter quæſitus erit 12.

Per Algebram ſpecioſam, data ſumma B, interuallo autem C, ponatur A pro vna quantitate, ergo altera eſt B — A. Harum quadrata ſunt A quadr. & B quadr. † A quadr. —— B A bis. Interuallum quadratorum B quadr. —— B A bis erit æquale C. Ac proinde A æquatur. $\frac{\text{B quadr.} - \text{C}}{\text{2 B}}$

Hinc Canon.

Ex quadrato ſummæ quantitatum datarum tolle interuallum quadratorum: reſiduum diuide per duplam ſummam datam, & habebis vnam ex quæſitis, vnde altera non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



Eſto data linea A B pro ſumma, linea vero A C poſſit interuallum quadratorum. Super A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C & demittatur C D perpendicularis ad A B. Dico D B eſſe duplam vnius ex quæſitis, & diuiſa D B bifariam in E duas lineas quæſitas eſſe A E & E B nam quadratum A E æquatur quadratis A D D E & duplo rectanguli A D E ſed iſtud duplum rectangulum æquatur rectangulo A D B, hoc eſt quadrato D C. Igitur quadratum A E æqua-

tur quadratis A D D E & D C. Ergo quadratum E B (quod eſt æquale quadrato D E differt à quadrato A E. Per duo quadrata A D D C. Sed duo quadrata A D D C æquantur quadrato A C. Igitur diuiſa eſt linea data A B in duas A E E B quarum quadrata differunt quadrato A C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Differentia quadratorum à duabus quantitatibus ortorum diuiſa per ſummam illarum exhibet earum differentiam: nam tres illæ lineæ A B A C A D ſunt proportionales, ergo quadratum mediæ A C quod æquatur differentiæ quadratorum, diuiſum per ſummam A B, exhibet differentiam A D pro quotiente Geometrico.

Propositio XXIX.

Data differentia duarum quantitatum, & ipſarum plano, inuenire illas.

Esto datus numerus 3 pro differentia duorum numerorum, & 10 pro ipſorum producto. Ponatur 1 R pro minore, ergo 1 R † 3 erit maior productus illorum eſt 1 Q † 3 R. Igitur 1 Q † 3 R æquantur 10. & ſit 1 R æqualis 2. maior itaque eſt 5.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia B, producto autem C, ponatur A minor. Ergo A † B æquabitur maiori. Horum productus eſt A quadr. † A B æqualis C. Igitur A quadr. æquatur C —— A B.

Hinc Canon.

Quadrato dimidiæ differentiæ adde productum datum: huius enim aggregati radix quadrata dimidio eiuſdem differentiæ multata, exhibebit minorem ex quæſitis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data differentia duarum linearum A B, & B C poſſit planum rectangulum ab ipſis ortum. Ponatur B C perpendicularis A B.

tum

Propositio XXVIII.

Data ſumma duarum quantitatum & interuallo quadratorum ab illis ortorum, diſcernere ambas.

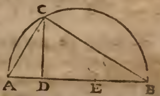
Sit numerus datus 20 pro ſumma & 80 pro interuallo. Ponatur 1 R pro vno ex illis, ergo alter erit 20 — 1 R. Horum quadrata ſunt 1 Q & 400 † 1 Q — 40 R. interuallum verò quadratorum eſt 400 -- 40 R. Proinde eſt æquatio inter 80 & 400 -- 40 R. Igitur 1 R eſt 8, quem ſi tollas a 20, alter quæſitus erit 12.

Per Algebram ſpecioſam, data ſumma B, interuallo autem C, ponatur A pro vna quantitate, ergo altera eſt B — A. Harum quadrata ſunt A quadr. & B quadr. † A quadr. — B A bis. Interuallum quadratorum B quadr. — B A bis erit æquale C. Ac proinde A æquatur. $\frac{\text{B quadr.} - \text{C.}}{2\text{B}}$

Hinc Canon.

Ex quadrato ſummæ quantitatum datarum tolle interuallum quadratorum: reſiduum diuide per duplam ſummam datam, & habebis vnam ex quæſitis, vnde altera non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



Eſto data linea A B pro ſumma, linea vero A C poſſit interuallum quadratorum. Super A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C & demittatur C D perpendicularis ad A B. Dico D B eſſe duplam vnius ex quæſitis, & diuiſa D B bifariam in E duas lineas quæſitas eſſe A E & E B nam quadratum A E æquatur quadratis A D D E & duplo rectanguli A D E ſed iſtud duplum rectangulum æquatur rectangulo A D B, hoc eſt quadrato D C. Igitur quadratum A E æqua-

tur quadratis A D D E & D C. Ergo quadratum E B (quod eſt æquale quadrato D E differt à quadrato A E. Per duo quadrata A D D C. Sed duo quadrata A D D C æquantur quadrato A C. Igitur diuiſa eſt linea data A B in duas A E E B quarum quadrata differunt quadrato A C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Differentia quadratorum à duabus quantitatibus ortorum diuiſa per ſummam illarum exhibet earum differentiam: nam tres illæ lineæ A B A C A D ſunt proportionales, ergo quadratum mediæ A C quod æquatur differentiæ quadratorum, diuiſum per ſummam A B, exhibet differentiam A D pro quotiente Geometrico.

Propositio XXIX.

Data differentia duarum quantitatum, & ipſarum plano, inuenire illas.

Esto datus numerus 3 pro differentia duorum numerorum, & 10 pro ipſorum producto. Ponatur 1 R pro minore, ergo 1 R + 3 erit maior productus illorum eſt 1 Q + 3 R. Igitur 1 Q + 3 R æquantur 10. & fit 1 R æqualis 2. maior itaque eſt 5.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia B, producto autem C, ponatur A minor. Ergo A + B æquabitur maiori. Horum productus eſt A quadr. + A B æqualis C. Igitur A quadr. æquatur C — A B.

Hinc Canon.

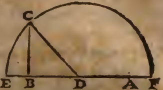
Quadrato dimidiæ differentiæ adde productum datum: huius enim aggregati radix quadrata dimidio eiuſdem differentiæ multata, exhibebit minorem ex quæſitis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data differentia duarum linearum A B, & B C poſſit planum rectangulum ab ipſis ortum. Ponatur B C perpendicularis A B.

tum

tùm diuiſa A B biſariam in D, centro D interuallo D C fiat ſemicirculus ſecans productam A B in punctis E F, Dico lineas B E B F eſſe quæſitas. Cum enim duæ D E & D B ſint æquales duabus D F D A, erunt etiam E B & A F æquales. Ergo differentia F B & E B eſt A B. Sed quadratum B C æquatur rectangulo E B F per 13 & 18 ſexti.



Ergo inuentæ ſunt duæ lineæ quarum differentia ſit A B & planum æquale quadrato B C quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Potuit ſolui idem problema ponendo I R pro maiore, vel pro ſumma duarum quantitatum, vel pro ſumma quadratorum quæ à quantitatibus datis oriuntur. Vnde noui canones & nouæ effectiones geometricæ manarent.

PROPOSITIO XXX.

Datis duabus quantitatibus inuenire tertiam talem vt ſumma quarumlibet duarum per reliquam multiplicata, fiant tres producti æqualis interualli: quorum productorum maior ſit ex maiori data in duas reliquas, minor verò ex inuenienda in ſummam duarum datarum.

DEntur duo numeri *6* & 4, ponaturque tertius I R. Productus ex *6* in reliquos eſt 24 + *6* R. Productus eſt 4 in reliquos eſt 24 + 4 R. Productus ex I R in 10 eſt 10 R. Productorum priorum differentia eſt 2 R. Productorum poſteriorũ differentia eſt 24 − *6* R. Ergo hæ differentiæ ſunt æquales. Ac proinde I R eſt *3* & ſatisfaciunt quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, datis B & C ponatur A pro tertia quantitate. Ergo productus ex B in reliquas eſt B C + B A. Productus ex C in reliquas eſt B C + C A. Productus ex A in reliquas eſt A B + A C. Differentia duorum priorum productorum eſt

PROPOSITIO XXVI.

Data ſumma duarum quantitatum & plano illarum, diſtinguere ſingulas.

ESto ſumma 10 & productus ſiue planus 16. Ponatur 1 R pro vno illorum duorum numerorum, ergo alter erit 10 — 1 R. Productus eſt 10 R — 1 Q. Ergo 16 æquatur 10 R — 1 Q. Ac proinde 1 R eſt 2 vel 8.

Per Algebram ſpecioſam, data ſumma B & plano C. Ponatur A pro differentia quantitatum. Igitur $\frac{B + A}{2}$ & $\frac{B - A}{2}$ erunt quantitates quæſitæ per Propoſ. 1 huius. Harũ planus $\frac{B \text{ quadr.} - A \text{ quadr.}}{4}$ æqualis C. Ac propterea B quadr. — 4 C æquatur A quadr.

Hinc Canon.

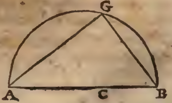
Ex quadrato dimidiæ ſummæ tolle planum datum: reſidui radix quadrata eidem dimidiæ ſummæ addita & detracta exhibebit duas quantitates ſigillatim.

Vel

Quadruplum plani dati tolle de quadrato ſummæ datæ, & reſtabit quadratum differentiæ quantitatum. Vnde per Canonem propoſ. 1. ſingulæ quantitates non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Detur A B ſumma duarum linearum, & B C potens planum datum: ſuper A B fiat circulus, in quo inſcribatur A G, dupla ipſius B C. Dico B G fore differentiam duarum linearum quæſitarum. Nam cum A G ſit dupla B C erit quadratum A G quadruplum lineæ B C. At quadratum A G cum quadrato B G æquatur quadrato A B ergo per 8 ſecundi linea B G duarum linearum quarum B C eſt planum.



Aliam

Aliam dedimus demonſtrationem & effectionem eiuſdem rei propoſ. 2. lib. 1. nouæ clauis ad geometriam. Enimuerò, hæc propoſitio reuocatur ad illam, data media proportionali ex tribus geometricè proportionalibus, & ſumma extremarum, diſcernere extremas.

Scholium.

Quadratum differentiæ duarum linearum plus quadruplo ipſarum rectangulo, æquatur quadrato ſummæ illarum. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO XXVII.

Data ſumma duarum quantitatum & aggregato quadratorum ab illis ortorum, diſtinguere ſingulas.

ESto data ſumma duorum numerorum 8, & ſumma quadratorum 34. Ponatur 1 R pro vno numero. Igitur alter erit 8 -- 1R. Horum quadrata ſunt 1 Q & 64 † 1 Q —— 16 R. Ergo illorum ſumma 64 † 2 Q —— 16 R æquatur 34. Ac proinde 14 æquale eſt 8 R —— 15. Et fit 1 R 5 vel 3. Tales-que erunt numeri quæſiti.

Per Algebram ſpecioſam data ſumma duarum quantitatum B & ſumma quadratorum C. Ponatur A vna ex quantitatibus quæſitis. Ergo B —— A erit altera. Harum quadrata ſimul iuncta faciunt. B quadr. † 2 A quadr. —— B A bis æqualia C. Igitur 1 Q eſt æquale

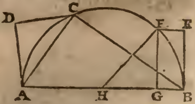
$$\frac{\text{B A bis} \dagger \text{C} - \text{B quadr.}}{2}$$

Hinc Canon.

Tolle aggregatum quadratorum à quadrato ſummæ quantitatum datarum: reſidui dimidium aufer ex quadrato dimidiæ ſummæ quantitatum: illius enim poſterioris relicti radix quadrata ſupradictæ dimidiæ ſummæ addita & detracta, exhibebit quæſitas quantitates.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data A B ſumma linearum: B C autem ſit potens illarum quadrata. Diuidatur A B bifariam in H, fiatque ſuper illam ſemicirculus, cui inſcribatur B C, nectatur que A C. Tum ſuper A C fiat triangulum rectangulum & iſoſceles, cuius angulus rectus ſit D. Tùm ponatur B E perpendicularis A B, & æqualis A D aut D C, ductaque E F parallela B A occurrat ſemicirculo in F, ex quo demittatur perpendiculariter F G. Dico A G G B eſſe lineas quæſitas. Nam quadratum A B per quartam ſecundi æquatur quadratis partium & duplo rectanguli ſub partibus: ſed quadratum A B



æquatur quadratis B C & A C per 31 tertii & 47 primi. Ergo cum B C poſſit quadrata partium erit A C æquale duplo rectanguli ſub partibus ſed dimidium quadrati A C eſt quadratum D C, quia triangulum A D C eſt rectangulum & iſoſceles. Eſt vero quadratum D C æquale quadrato B E ſeu G F ſeu rectangulo A G B. Ergo quadratum A B æquatur quadratis partium A G G B plus duplo quadrato D C hoc eſt plus quadrato A C. Sed æquatur etiam quadratis A C & C B. Ergo ſi dematur commune quadratum A C relinquetur quadratum C B æquale quadratis partium A G G B. Ac proinde diuiſa eſt linea A B in duas partes quarum quadrata æquantur quadrato B C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Poteſt aliis viis procedi in ſolutione huius problematis ponendo 1 R pro differentia quantitatum quæſitarum, vel 1 R pro dimidia differẽtia, vnde orirẽtur noui canones & noua effectiones. Enimuerò duplum quadratum differentiæ duarum quantitatum plus duplo ſummæ illarum quadrato, æquatur quadruplo aggregato quadratorum ab illis ortorum.

Aliam dedimus demonſtrationem & effectionem eiuſdem rei propoſ. 2. lib. 1. nouæ clauis ad geometriam. Enimuerò, hæc propoſitio reuocatur ad illam, data media proportionali ex tribus geometricè proportionalibus, & ſumma extremarum, diſcernere extremas.

Scholium.

Quadratum differentiæ duarum linearum plus quadruplo ipſarum rectangulo, æquatur quadrato ſummæ illarum. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

Propositio XXVII.

Data ſumma duarum quantitatum & aggregato quadratorum ab illis ortorum, diſtinguere ſingulas.

Esto data ſumma duorum numerorum 8, & ſumma quadratorum 34. Ponatur 1 R pro vno numero. Igitur alter erit 8 -- 1R. Horum quadrata ſunt 1 Q & 64 † 1 Q —— 16 R. Ergo illorum ſumma 64 † 2 Q —— 16 R æquatur 34. Ac proinde 14 æquale eſt 8 R —— 15. Et fit 1 R 5 vel 3. Tales-que erunt numeri quæſiti.

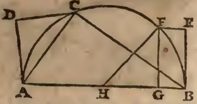
Per Algebram ſpecioſam data ſumma duarum quantitatum B & ſumma quadratorum C. Ponatur A vna ex quantitatibus quæſitis. Ergo B —— A erit altera. Harum quadrata ſimul iuncta faciunt. B quadr. † 2 A quadr. —— B A bis æqualia C. Igitur 1 Q eſt æquale $\frac{\text{B A bis} \dagger \text{C} - \text{B quadr.}}{2}$

Hinc Canon.

Tolle aggregatum quadratorum à quadrato ſummæ quantitatum datarum: reſidui dimidium aufer ex quadrato dimidiæ ſummæ quantitatum: illius enim poſterioris relicti radix quadrata ſupradictæ dimidiæ ſummæ addita & detracta, exhibebit quæſitas quantitates.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data A B ſumma linearum: B C autem ſit potens illarum quadrata. Diuidatur A B bifariam in H, fiatque ſuper illam ſemicirculus, cui inſcribatur B C, nectatur que A C. Tum ſuper A C fiat triangulum rectangulum & iſoſceles, cuius angulus rectus ſit D. Tùm ponatur B E perpendicularis A B, & æqualis A D aut D C, ductaque E F parallela B A occurrat ſemicirculo in F, ex quo demittatur perpendiculariter F G. Dico A G G B eſſe lineas quæſitas. Nam quadratum A B per quartam ſecundi æquatur quadratis partium & duplo rectanguli ſub partibus: ſed quadratum A B



æquatur quadratis B C & A C per 31 tertii & 47 primi. Ergo cum B C poſſit quadrata partium erit A C æquale duplo rectanguli ſub partibus ſed dimidium quadrati A C eſt quadratum D C, quia triangulum A D C eſt rectangulum & iſoſceles. Eſt vero quadratum D C æquale quadrato B E ſeu G F ſeu rectangulo A G B. Ergo quadratum A B æquatur quadratis partium A G G B plus duplo quadrato D C hoc eſt plus quadrato A C. Sed æquatur etiam quadratis A C & C B. Ergo ſi dematur commune quadratum A C relinquetur quadratum C B æquale quadratis partium A G G B. Ac proinde diuiſa eſt linea A B in duas partes quarum quadrata æquantur quadrato B C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Poteſt aliis viis procedi in ſolutione huius problematis ponendo 1 R pro differentia quantitatum quæſitarum, vel 1 R pro dimidia differētia, vnde orirētur noui canones & noua effectiones. Enimuerò duplum quadratum differentiæ duarum quantitatum plus duplo ſummæ illarum quadrato, æquatur quadruplo aggregato quadratorum ab illis ortorum.

Propositio XXVIII.

Data ſumma duarum quantitatum & interuallo quadratorum ab illis ortorum, diſcernere ambas.

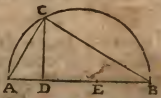
SIt numerus datus 20 pro ſumma & 80 pro interuallo. Ponatur 1 R pro vno ex illis, ergo alter erit 20 —— 1 R. Horum quadrata ſunt 1 Q & 400 † 1 Q — 40 R. interuallum verò quadratorum eſt 400 -- 40 R. Proinde eſt æquatio inter 80 & 400 -- 40 R. Igitur 1 R eſt 8, quem ſi tollas a 20, alter quæſitus erit 12.

Per Algebram ſpecioſam, data ſumma B, interuallo autem C, ponatur A pro vna quantitate, ergo altera eſt B — A. Harum quadrata ſunt A quadr. & B quadr. † A quadr. —— B A bis. Interuallum quadratorum B quadr. —— B A bis erit æquale C. Ac proinde A æquatur. B quadr. -- C.
2 B

Hinc Canon.

Ex quadrato ſummæ quantitatum datarum tolle interuallum quadratorum: reſiduum diuide per duplam ſummam datam, & habebis vnam ex quæſitis, vnde altera non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



Eſto data linea A B pro ſumma, linea vero A C poſſit interuallum quadratorum. Super A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C & demittatur C D perpendicularis ad A B, Dico D B eſſe duplam vnius ex quæſitis, & diuiſa D B bifariam in E duas lineas quæſitas eſſe A E & E B nam quadratum A E æquatur quadratis A D D E & duplo rectanguli A D E ſed iſtud duplum rectangulum æquatur rectangulo A D B, hoc eſt quadrato D C. Igitur quadratum A E æqua-

tur quadratis A D D E & D C. Ergo quadratum E B (quod eſt æquale quadrato D E differt à quadrato A E. Per duo quadrata A D D C. Sed duo quadrata A D D C æquantur quadrato A C. Igitur diuiſa eſt linea data A B in duas A E E B quarum quadrata differunt quadrato A C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Differentia quadratorum à duabus quantitatibus ortorum diuiſa per ſummam illarum exhibet earum differentiam: nam tres illæ lineæ A B A C A D ſunt proportionales, ergo quadratum mediæ A C quod æquatur differentiæ quadratorum, diuiſum per ſummam A B, exhibet differentiam A D pro quotiente Geometrico.

Propositio XXIX.

Data differentia duarum quantitatum, & ipſarum plano, inuenire illas.

Esto datus numerus 3 pro differentia duorum numerorum, & 10 pro ipſorum producto. Ponatur 1 R pro minore, ergo 1 R + 3 erit maior productus illorum eſt 1 Q + 3 R. Igitur 1 Q + 3 R æquantur 10. & fit 1 R æqualis 2. maior itaque eſt 5.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia B, producto autem C, ponatur A minor. Ergo A + B æquabitur maiori. Horum productus eſt A quadr. + A B æqualis C. Igitur A quadr. æquatur C —— A B.

Hinc Canon.

Quadrato dimidiæ differentiæ adde productum datum: huius enim aggregati radix quadrata dimidio eiuſdem differentiæ multata, exhibebit minorem ex quæſitis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data differentia duarum linearum A B, & B C poſſit planum rectangulum ab ipſis ortum. Ponatur B C perpendicularis A B.

tum

Propositio XXVIII.

Data ſumma duarum quantitatum & interuallo quadratorum ab illis ortorum, diſcernere ambas.

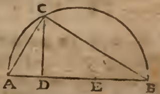
SIt numerus datus 20 pro ſumma & 80 pro interuallo. Ponatur 1 R pro vno ex illis, ergo alter erit 20 —— 1 R. Horum quadrata ſunt 1 Q & 400 † 1 Q — 40 R. interuallum verò quadratorum eſt 400 -- 40 R. Proinde eſt æquatio inter 80 & 400 -- 40 R. Igitur 1 R eſt 8, quem ſi tollas a 20, alter quæſitus erit 12.

Per Algebram ſpecioſam, data ſumma B, interuallo autem C, ponatur A pro vna quantitate, ergo altera eſt B — A. Harum quadrata ſunt A quadr. & B quadr. † A quadr. —— B A bis. Interuallum quadratorum B quadr. —— B A bis erit æquale C. Ac proinde A æquatur. $\frac{\text{B quadr.} - \text{C.}}{2\,\text{B}}$

Hinc Canon.

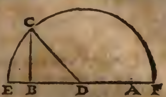
Ex quadrato ſummæ quantitatum datarum tolle interuallum quadratorum: reſiduum diuide per duplam ſummam datam, & habebis vnam ex quæſitis, vnde altera non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



Eſto data linea A B pro ſumma, linea vero A C poſſit interuallum quadratorum. Super A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A C & demittatur C D perpendicularis ad A B. Dico D B eſſe duplam vnius ex quæſitis, & diuiſa D B bifariam in E duas lineas quæſitas eſſe A E & E B nam quadratum A E æquatur quadratis A D D E & duplo rectanguli A D E ſed iſtud duplum rectangulum æquatur rectangulo A D B, hoc eſt quadrato D C. Igitur quadratum A E æqua-

tâm diuiſa A B biſariam in D, centro D interuallo D C fiat ſemicirculus ſecans productam A B in punctis E F, Dico lineas B E B F eſſe quæſitas. Cum enim duæ D E & D B ſint æquales duabus D F D A, erunt etiam E B & A F æquales. Ergo differentia F B & E B eſt A B. Sed quadratum B C æquatur rectangulo E B F per 13 & 18 ſexti.



Ergo inuentæ ſunt duæ lineæ quarum differentia ſit A B & planum æquale quadrato B C quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Potuit ſolui idem problema ponendo I R pro maiore, vel pro ſumma duarum quantitatum, vel pro ſumma quadratorum quæ à quantitatibus datis oriuntur. Vnde noui canones & nouæ effectiones geometricæ manarent.

PROPOSITIO XXX.

Datis duabus quantitatibus inuenire tertiam talem vt ſumma quarumlibet duarum per reliquam multiplicata, fiant tres producti æqualis interualli: quorum productorum maior ſit ex maiori data in duas reliquas, minor verò ex inuenienda in ſummam duarum datarum.

Dentur duo numeri *6* & 4, ponaturque tertius I R. Productus ex *6* in reliquos eſt 24 † *6* R. Productus eſt 4 in reliquos eſt 24 † 4 R. Productus ex I R in 10 eſt 10 R. Productorum priorum differentia eſt 2 R. Productorum poſteriorũ differentia eſt 24 - 6 R. Ergo hæ differentiæ ſunt æquales. Ac proinde I R eſt *3* & ſatisfaciunt quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, datis B & C ponatur A pro tertia quantitate. Ergo productus ex B in reliquas eſt B C † B A. Productus ex C in reliquas eſt B C † C A. Productus ex A in reliquas eſt A B † A C. Differentia duorum priorum productorum eſt

P

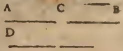
B A .. C A. Differentia duorum poſteriorum eſt B C —— A B igitur illæ duæ differentia ſunt æquales. Ac ideo A æquatur $\frac{B\,C}{2\,B\,..\,C}$

Hinc Canon.

Differentiam duarum quantitatum datarum adde maiori illarum, & per hanc ſummam diuide productum ſub quantitatibus datis, fietque minor quantitas quæſita.

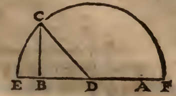
Hinc Effectio Geometrica.

Sint datæ lineæ A B B C & oporteat inuenire tertiam D taliter vt rectangulum ſub A B in ſummam B C & D differat à rectangulo ſub B C in ſummam A B & D, per eamdem quantitatem qua rectangulum poſterius differt à rectangulo ex D in ſummam A B &



B C. & primum rectangulum ſit maius reliquis, tertium autem reliquis minus. Fiat vt A B plus A C ad A B ita B C ad D. Dico factum eſſe quod poſtulatur, nam primum rectangulum æquatur rectangulo A B C plus rectangulo A B in D. Secundum vero rectangulum æquale eſt rectangulis A B C & B C D. Horum vero rectangulorum differentia eſt A B D minus B C D. Tertium autem rectangulum æquatur rectangulis A B D & B C D, cuius differentia à ſecundo eſt A B C minus A B D. At quoniam factum eſt vt A B plus A C ad A B ita B C ad D, erit rectangulum ſub extremis A B D plus A C D æquale rectangulo ſub mediis A B C. Igitur ſecunda differentia æquatur rectangulo A B D plus rectangulo A C D minus rectangulo A B D, cum autem duo rectangula extrema ſe deſtruant, ſequitur ſecundam differentiam æquari rectangulo A C D. At eidem æquatur prima differentia, ſiquidem A B D minus B C D propter eamdem altitudinem D, æquatur rectangulo D in differentiam A B & B C, illa autem differentia eſt A C. Ergo differentia prima æquatur rectangulo A C D. Igitur duorum priorum rectangulorum differentia æqualis eſt differentiæ duorum rectangulorum poſteriorum. Quod erat demonſtrandum.

tùm diuiſa A B biſariam in D, centro D interuallo D C fiat ſemicirculus ſecans productam A B in punctis E F, Dico lineas B E B F eſſe quæſitas. Cum enim duæ D E & D B ſint æquales duabus D F D A, erunt etiam E B & A F æquales. Ergo differentia F B & E B eſt A B. Sed quadratum B C æquatur rectangulo E B F per 13 & 18 ſexti.



Ergo inuentæ ſunt duæ lineæ quarum differentia ſit A B & planum æquale quadrato B C quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Potuit ſolui idem problema ponendo I R pro maiore, vel pro ſummâ duarum quantitatum, vel pro ſumma quadratorum quæ à quantitatibus datis oriuntur. Vnde noui canones & nouæ effectiones geometricæ manarent.

PROPOSITIO XXX.

Datis duabus quantitatibus inuenire tertiam talem vt ſumma quarumlibet duarum per reliquam multiplicata, fiant tres producti æqualis interualli: quorum productorum maior ſit ex maiori data in duas reliquas, minor verò ex inuenienda in ſummam duarum datarum.

DEntur duo numeri 6 & 4, ponaturque tertius I R. Productus ex 6 in reliquos eſt 24 + 6 R. Productus eſt 4 in reliquos eſt 24 + 4 R. Productus ex I R in 10 eſt 10 R. Productorum priorum differentia eſt 2 R. Productorum poſteriorũ differentia eſt 24 -- 6 R. Ergo hæ differentiæ ſunt æquales. Ac proinde I R eſt 3 & ſatisfaciunt quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, datis B & C ponatur A pro tertia quantitate. Ergo productus ex B in reliquas eſt B C + B A. Productus ex C in reliquas eſt B C + C A. Productus ex A in reliquas eſt A B + A C. Differentia duorum priorum productorum eſt

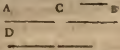
B A -- C A. Differentia duorum poſteriorum eſt B C —— A B igitur illæ duæ differentiæ ſunt æquales. Ac ideo A æquatur $\frac{B\,C}{2\,B \text{ -- } C}$

Hinc Canon.

Differentiam duarum quantitatum datarum adde maiori illarum, & per hanc ſummam diuide productum ſub quantitatibus datis, fietque minor quantitas quæſita.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint datæ lineæ A B B C & oporteat inuenire tertiam D taliter vt rectangulum ſub A B in ſummam B C & D differat à rectangulo ſub B C in ſummam A B & D, per eamdem quantitatem qua rectangulum poſterius differt à rectangulo ex D in ſummam A B & B C. & primum rectangulum ſit maius reliquis, tertium autem reliquis minus. Fiat vt A B plus A C ad A B ita B C ad D. Dico factum eſſe quod poſtulatur, nam primum rectangulum æquatur rectangulo A B C plus rectangulo A B in D. Secundum vero rectangulum æquale eſt rectangulis A B C & B C D. Horum vero rectangulorum differentia eſt A B D minus B C D. Tertium autem rectangulum æquatur rectangulis A B D & B C D, cuius differentia à ſecundo eſt A B C minus A B D. At quoniam factum eſt vt A B plus A C ad A B ita B C ad D, erit rectangulum ſub extremis A B D plus A C D æquale rectangulo ſub mediis A B C. Igitur ſecunda differentia æquatur rectangulo A B D plus rectangulo A C D minus rectangulo A B D, cum autem duo rectangula extrema ſe deſtruant, ſequitur ſecundam differentiam æquari rectangulo A C D. At eidem æquatur prima differentia, ſiquidem A B D minus B C D propter eamdem altitudinem D, æquatur rectangulo D in differentiam A B & B C, illa autem differentia eſt A C. Ergo differentia prima æquatur rectangulo A C D. Igitur duorum priorum rectangulorum differentia æqualis eſt differentiæ duorum rectangulorum poſteriorum. Quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO XXXI.

Data differentia duarum quantitatum, & differentia quadratorum ab illis ortorum, inuenire illas.

ESto data differentia numerorum 2 & differentia quadratorum 12. Ponatur ſumma I R. Ergo maior erit $\frac{IR + 2}{2}$ & minor $\frac{IR - 2}{2}$. Horum quadrata ſunt $\frac{IQ + 4 + 4R}{4}$ & $\frac{IQ + 44 - 4R}{4}$. Et horum quadratorum differentia $\frac{2R}{4}$ æquari debet 12. Igitur ſumma numerorum eſt 6. Ac per propoſitionem primam huius, numeri erunt 2 & 4.

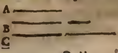
Per Algebram ſpecioſam, data differentia quantitatum B & differentia quadratorum C, ponatur ſumma quantitatum A ergo $\frac{A + B}{2}$ eſt maior & $\frac{A - B}{2}$ minor. Harum quadratorum differentia eſt A B æqualis C. Igitur A eſt æqualis $\frac{C}{B}$.

Hinc Canon.

Differentiam quadratorum datam diuide pēr differentiam numērorum & orietur ſumma quantitatum. Data autem ſumma & differentia duarum quantitatum, diſcernuntur ambæ per Propoſitionem primam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data differentia duarum linearum A & differentia quadratorum quæ ab illis fiunt, ſit æqualis quadrato C. Vt inueniantur duæ illæ lineæ ſigillatim, fiat vt A ad B ita B ad C. Dico C eſſe ſummam



illarum. Nam vt olim demonſtrauimus in noua Geometriæ claui rectangulum ſub ſumma duarum linearum in illarum differentiam æquatur differentiæ quadratorum ab illis ſed quoniam eſt vt A ad B ita B ad C rectangulum ex C in A æquatur quadrato B. Ergo cum B quadratum ſit æquale differentiæ quadratorum & A ſit differentia linearum, erit C ſumma linearum, quod erat demonſtrandum. Data autem ſumma C & differentia A inueniantur ſingulæ per primam huius.

Scholium.

Quæſtio ſexta & ſeptima Diophanti iuxta interpretationem Gaſparis Bacheti longe alium habet ſenſum : ſed quoniam Steuinus ita ſentit, hic eam attexere libuit.

Propositio XXXII.

Diuidere quantitatem datam in tres partes taliter vt qualibet dante alteri imperatam ſui partem, & inſuper datam quantitatem, fiat æqualitas.

IMperatum ſit diuidi 90 in tres numeros, ita vt ſi primus dederit ſecundo trientem ſui & præterea 5 : ſecundus tertio ſui quintantem & præterea 7 : tertius primo ſextantem ſui & præterea 13, poſt mutuum acceptum & datum, fiat æqualitas. Nota debere neceſſariò æqualitatem fieri in triente numeri diuidendi, ſiquidem dum partes adduntur detrahunturque, nihil quidquam huic ſummæ decedit : igitur cùm poſt tributionem & acceptionem mutuam, numeri fiant inter ſe æquales, & ſimul ſumpti ſint eliam æquales numero diuidendo, neceſſe eſt vt æqualitas fiat in 30 qui eſt triens numeri diuidendi 90.

Ponatur ergo primus 3 R, inde ſi tollas ipſius trientem & inſuper 5, reſtabunt 2 R — 5 quæ cum ſextante tertii & inſuper 13, debent æquari 30 : igitur ſi ex 30 auferas 2 R — 5 reſiduum 35--2R æquatur ſextanti tertii & 13. Sublatis igitur 13 ex hoc reſiduo, relinquentur

Propositio XXXI.

Data differentia duarum quantitatum, & differentia quadratorum ab illis ortorum, inuenire illas.

ESto data differentia numerorum 2 & differentia quadratorum 12. Ponatur ſumma 1R. Ergo maior erit $\frac{1R \dagger 2}{2}$ & minor $\frac{1R -- 2}{2}$. Horum quadrata ſunt $\frac{1Q \dagger 4 \dagger 4R}{4}$ & $\frac{1Q \dagger 4 --- 4R}{4}$. Et horum quadratorum differentia 2 R æquari debet 12. Igitur ſumma numerorum eſt 6. Ac per propoſitionem primam huius, numeri erunt 2 & 4.

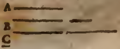
Per Algebram ſpecioſam, data differentia quantitatum B & differentia quadratorum C, ponatur ſumma quantitatum A ergo $\frac{A \dagger B}{2}$ eſt maior & $\frac{A -- B}{2}$ minor. Harum quadratorum differentia eſt A B æqualis C. Igitur A eſt æqualis $\frac{C}{B}$.

Hinc Canon.

Differentiam quadratorum datam diuide per differentiam numerorum & orietur ſumma quantitatum. Data autem ſumma & differentia duarum quantitatum, diſcernuntur ambæ per Propoſitionem primam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data differentia duarum linearum A & differentia quadratorum quæ ab illis fiunt, ſit æqualis quadrato C. Vt inueniantur duæ illæ lineæ ſigillatim, fiat vt A ad B ita B ad C. Dico C eſſe ſummam



illarum. Nam vt olim demonſtrauimus in noua Geometriæ claui rectangulum ſub ſumma duarum linearum in illarum differentiam æquatur differentiæ quadratorum ab illis ſed quoniam eſt vt A ad B ita B ad C rectangulum ex C in A æquatur quadrato B. Ergo cum B quadratum ſit æquale differentiæ quadratorum & A ſit differentia linearum, erit C ſumma linearum, quod erat demonſtrandum. Data autem ſumma C & differentia A inueniantur ſingulæ per primam huius.

Scholium.

Quæſtio ſexta & ſeptima Diophanti iuxta interpretationem Gaſparis Bacheti longe alium habet ſenſum : ſed quoniam Steuinus ita ſentit, hic eam attexere libuit.

Propositio XXXII.

Diuidere quantitatem datam in tres partes taliter vt qualibet dante alteri imperatam ſui partem, & inſuper datam quantitatem, fiat æqualitas.

IMperatum ſit diuidi 90 in tres numeros, ita vt ſi primus dederit ſecundo trientem ſui & præterea 5 : ſecundus tertio ſui quintantem & præterea 7 : tertius primo ſextantem ſui & præterea 13, poſt mutuum acceptum & datum, fiat æqualitas. Notá debere neceſſariò æqualitatem fieri in triente numeri diuidendi, ſiquidem dum partes adduntur detrahunturque, nihil quidquam huic ſummæ decedit : igitur cum poſt tributionem & acceptionem mutuam, numeri fiant inter ſe æquales, & ſimul ſumpti ſint etiam æquales numero diuidendo, neceſſe eſt vt æqualitas fiat in 30 qui eſt triens numeri diuidendi 90.

Ponatur ergo primus 3 R, inde ſi tollas ipſius trientem & inſuper 5, reſtabunt 2 R — 5 quæ cum ſextante tertii & inſuper 13, debent æquari 30 : igitur ſi ex 30 auferas 2 R — 5 reſiduum 35 -- 2R æquatur ſextanti tertii & 13. Sublatis igitur 13 ex hoc reſiduo, relinquentur

quentur 22 -- 2 R æquales ſextanti tertii, vnde tertius erit 132 -- 12 R. Hoc amittente ſextantem ſui & præterea 13, reſtant 97 — 10 R, quæ cum quintante ſecundi & 7, debent æquari 30. Ergo ex 30 tollendo 97 — 10 R & 7, reſtabit 10 R — 74 æqualis quintanti ſecundi, ac proinde ſecundus eſt 50 R — 370. Hoc rurſus amittente quintantem ſui & 7, relinquitur 40 R — 303, qui cum triente primi 1 R & 5, æquari debet 30: proinde eſt æquati inter 41 R -- 298 & 30. Fitque 1 R æqualis 8. Ergo primus eſt 24. Secundus 30. Tertius 36. *S*i iubeatur diuidi 80 in tres, ita vt ſi primus daret ſecundo quintantem ſui & inſuper 6. Secundus tertio ſextantem ſui & inſuper 7. Tertius primo ſui ſeptantem & inſuper 8, poſt mutuam acceptionem & tributionem fiat æqualitas, primas eſſet $\frac{9440}{363}$, ſecundus $\frac{9786}{363}$ tertius $\frac{9814}{363}$.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B in tres taliter vt prima ſecundæ det trientem ſui plus C : ſecunda tertiæ quintantem ſui plus D : tertia primæ ſextantem ſui plus F. Et poſt datum & acceptum fiat æqualitas in $\frac{B}{3}$. Ponatur A pro prima quantitate integra, & quoniam F ſupponitur maior quam C, ergo earum differentia F — C ſublata de $\frac{B}{3}$ relinquit $\frac{B \dagger 3C — 3F}{3}$ æqualem $\frac{2}{3}$ primæ & $\frac{1}{6}$ tertiæ quantitatis. Ac proinde ſi hunc multiplices per 6, fiet 2 B † 6 C --- 6 F æqualis tertiæ quantitati & quadruplo primæ. Ergo 2 B † 6 C -- 6 F -- 4 A æquatur tertiæ. Igitur ſi prima cum tertia tollatur ex B reſtabit ſecunda 3 A † 6 F — 6 C -- B. Hanc eamdem ſecundam alio modo ſic reperies: prima dat C, ſecunda D, & quia D ſupponitur maior: harum differentia D — C iuncta trienti B facit $\frac{B \dagger 3D -- 3C}{3}$ pro triente primæ & quatuor quintantibus ſecundæ. Ergo reductis illis fient 5 B † 15 D — 15 C æquales quintuplo primæ & duodecuplo ſecundæ. Sed prima eſt A, Igitur 5 B † 15 D -- 15 C --- 5 A æquantur ſecundæ iam inuen-

32

cæ 3 A † 6 F —— 6 C —— B. Ac proinde A ërit æqualis

$$\frac{17B \dagger 15D - 57C - 72F}{41}.$$

Hinc Canon.

Si danda quantitas tertiæ partis maior eſt danda quantitate primæ, detrahatur ipſarum interuallum trienti quantitatis diuidendæ: ſin contra, addatur. Reſiduum vel ſumma multiplicetur per productum ex primo denominatore in tertium: producti huius & illius qui fit ducendo quantitatem diuidendam in productum ex primo denominatore per tertium numeratorem differentia ducatur in productum ex primo denominatore in differentiam numerorum ſecundæ fractionis, & productus iſte poſtremus ſeruetur. Præterea ſi quantitas danda primæ partis maior eſt quantitate danda ſecundæ, harum interuallum detrahatur trienti quantitatis diuidendæ: ſin contra addatur. Reſiduum vel ſumma multiplicetur per productum ex primo denominatore in ſecundum: productuſque ille ducatur in productum ex primo denominatore in tertium numeratorem. Atque huius producti & illius qui ſeruatus eſt, differentia vel ſumma (prout ſecundus productus minor fuit vel maior producto quantitatis diuidendæ per productum ex primo denominatore in tertium numeratorem) conſeruetur. Deinde differentiam numerorum primæ fractionis duc in denominatorẽ tertiũ & denominatorẽ primæ in tertiũ numeratorẽ: Horum duorũ productorũ differentiã multiplica per productum ex primo denominatore in differentiam numerorum ſecundæ fractionis. Hic productus detrahatur vel addatur (prout ex duobus præcedentibus productis primus eſt maior vel minor ſecundo) & qui fit multiplicando productum ex primo denominatore in tertium numeratorem, per productum ex primo numeratore in ſecundum denominatorem: ac per reſiduum vel ſummam diuidatur differentia vel ſumma conſeruata: fietque prima ex tribus quantitatibus quæſitis, vnde reliquæ non latebunt.

Voco hic primam fractionem eam partem, quam primum ſegmentum debet dare: ſecundam, quam ſecundum: tertium, quam tertium. Similiter voco primum numeratorem vel denominatorem, eum qui pertinet ad primam fractionem: ſecundum, qui ad ſecundam: tertium, qui ad tertiam.

quentur 22 -- 2 R æquales ſextanti tertii, vnde tertius erit 132 -- 12 R. Hoc amittente ſextantem ſui & præterea 13, reſtant 97 —— 10 R, quæ cum quintante ſecundi & 7, debent æquari 30. Ergo ex 30 tollendo 97 —— 10 R & 7, reſtabit 10 R —— 74 æqualis quintanti ſecundi, ac proinde ſecundus eſt 50 R —— 370. Hoc rurſus amittente quintantem ſui & 7, relinquitur 40 R —— 303, qui cum triente primi I R & 5, æquari debet 30: proinde eſt æquari inter 41 R -- 298 & 30. Fitque I R æqualis 8. Ergo primus eſt 24. Secundus 30. Tertius 36. Si iubeatur diuidi 80 in tres, ita vt ſi primus daret ſecundo quintantem ſui & inſuper 6. Secundus tertio ſextantem ſui & inſuper 7. Tertius primo ſui ſeptantem & inſuper 8, poſt mutuam acceptionem & tributionem fiat æqualitas, primus eſſet $\frac{9440}{363}$, ſecundus $\frac{9786}{363}$ tertius $\frac{9814}{363}$.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitatē diuidenda B in tres taliter vt prima ſecundæ det trientem ſui plus C : ſecunda tertiæ quintantem ſui plus D : tertia primæ ſextantem ſui plus F. Et poſt datum & acceptum fiat æqualitas in $\frac{B}{3}$. Ponatur A pro prima quantitatē integra, & quoniam F ſupponitur maior quam C, ergo earum differentia F —— C ſublata de $\frac{B}{3}$ relinquit $\frac{B + 3C - 3F}{3}$ æqualem $\frac{2}{3}$ primæ & $\frac{1}{6}$ tertiæ quantitatis. Ac proinde ſi hunc multiplices per 6, fiet 2 B + 6 C --- 6 F æqualis tertiæ quantitati & quadruplo primæ. Ergo 2 B + 6 C -- 6 F -- 4 A æquatur tertiæ. Igitur ſi prima cum tertia tollatur ex B reſtabit ſecunda 3 A + 6 F —— 6 C -- B. Hanc eamdem ſecundam alio modo ſic reperies: prima dat C, ſecunda D, & quia D ſupponitur maior : harum differentia D —— C iuncta trienti B facit $\frac{B + 3D - 3C}{3}$ pro triente primæ & quatuor quintantibus ſecundæ. Ergo reductis illis fient 5 B + 15 D —— 15 C æquales quintuplo primæ & duodecuplo ſecundæ. Sed prima eſt A, Igitur $\frac{5B + 15D - 15C - 5A}{32}$ æquantur ſecundæ iam inuen-

tæ 3 A † 6 F —— 6 C —— B. Ac proinde A erit æqualis 17 B † 15 D —— 57 C —— 72 F.

41

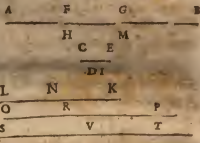
Hinc Canon.

Si danda quantitas tertiæ partis maior eſt danda quantitate primæ, detrahatur ipſarum interuallum trienti quantitatis diuidendæ: ſin contra, addatur. Reſiduum vel ſumma multiplicetur per productum ex primo denominatore in tertium: producti huius & illius qui fit ducendo quantitatem diuidendam in productum ex primo denominatore per tertium numeratorem differentia ducatur in productum ex primo denominatore in differentiam numerorum ſecundæ fractionis, & productus iſte poſtremus ſeruetur. Præterea ſi quantitas danda primæ partis maior eſt quantitate danda ſecundæ, harum interuallum detrahatur trienti quantitatis diuidendæ: ſin contra addatur. Reſiduum vel ſumma multiplicetur per productum ex primo denominatore in ſecundum: productuſque ille ducatur in productum ex primo denominatore in tertium numeratorem. Atque huius producti & illius qui ſeruatus eſt, differentia vel ſumma (prout ſecundus productus minor fuit vel maior producto quantitatis diuidendæ per productum ex primo denominatore in tertium numeratorem) conſeruetur. Deinde differentiam numerorum primæ fractionis duc in denominatorē tertiū & denominatorē primæ in tertiū numeratorē: Horum duorū productorū differentiā multiplica per productum ex primo denominatore in differentiam numerorum ſecundæ fractionis. Hic productus detrahatur vel addatur (prout ex duobus præcedentibus productis primus eſt maior vel minor ſecundo) & qui fit multiplicando productum ex primo denominatore in tertium numeratorem, per productum ex primo numeratore in ſecundum denominatorem: ac per reſiduum vel ſummam diuidatur differentia vel ſumma conſeruata :. fietque prima ex tribus quantitatibus quæſitis, vnde reliquæ non latebunt.

Voco hic primam fractionem eam partem, quam primum ſegmentum debet dare: ſecundam, quam ſecundum: tertium, quam tertium. Similiter voco primum numeratorem vel denominatorem, eum qui pertinet ad primam fractionem: ſecundum, qui ad ſecundam: tertium, qui ad tertiam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda in tria ſegmenta taliter vt ſi primum ſegmentum dederit ſecundo tres ſui quadrantes & inſuper lineam C D: ſecundum tertio duos quintantes ſui & inſuper lineam C E: tertium denique primo quatuor ſui ſeptantes, & præterea lineam C I, poſt datum & acceptum fiat æqualitas: Diuidatur primò linea A B trifariam in punctis F & G. Et quoniam C D minor eſt C I, primum ſegmentum plus accipit à tertio, quam tribuat ſecundo: propterea de triente A F tollatur F H æqualis D I. Similiter quoniam C I minor eſt C E, tertium ſegmentum plus accipit a ſecundo quam tribuat primo, propterea de triente G B tollatur G M æqualis I E (ſecus faciendum eſt ſi ſegmenta plus accipiant quam tribuant) deinde accipiantur tres numeri quicumque habentes partes præſcriptas, quæ in noſtro problemate ſunt quadrantes, quintantes, ſeptantes: ſintque illi numeri 4 5 7. & quia partes dandæ primi ſegmenti ſunt $\frac{3}{4}$ & partes relictæ ſecundi $\frac{3}{5}$ ſumantur $\frac{3}{4}$ primi numeri & $\frac{3}{5}$ ſecundi, & fiat vt horum ſumma 6 ad ſummam duorum priorum numerorum 9 ita H M ad L K: ſeceturque L K in N per propoſ. V huius tali ratione vt $\frac{3}{4}$ L N cum $\frac{3}{5}$ N K æquentur H M. Similiter quoniam partes dandæ ſecundi ſegmenti ſunt $\frac{2}{5}$ & partes relictæ tertii $\frac{3}{7}$, ſumantur $\frac{2}{5}$ ſecundi numeri & $\frac{3}{7}$ tertii, & fiat vt illorum ſumma 5 ad ſummam duorum poſteriorum numerorum 12,



ita BM ad OP: & ſecetur OP in R per V huius taliter vt $\frac{2}{5}$ OR & $\frac{5}{7}$ RP æquales ſint BM. Pari modo quia partes dandæ tertii ſunt $\frac{4}{7}$ & partes relictæ primi $\frac{1}{4}$, ſumantur $\frac{4}{7}$ tertii numeri & $\frac{1}{4}$ primi: Fiatque vt horum ſumma 5 ad ſummam tertij & primi numeri 11, ita AH ad ST, & ſecetur ST in V ita vt $\frac{4}{7}$ SV & $\frac{1}{4}$ VT æquentur AH. Dico LN OR SV eſſe ſegmenta quæſita lineæ AB: ſicuti etiam VT NK RP.

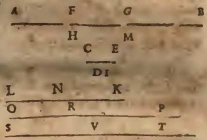
Nam quia AB ſecta eſt trifariam in F & G, erit triens AF aut FG vel GB id in quo debet fieri æqualitas, (vt demonſtratum eſt in operatione Algebrica) & quoniam ex triente AF ſublata eſt HF æqualis DI, idem eſt ac ſi tolleretur CI minus CD. Igitur cum AF debeat æquari $\frac{4}{7}$ tertii ſegmenti plus $\frac{1}{4}$ primi plus CI minus CD, auferendo ex AF lineam CI minus CD, relinquetur AH æqualis $\frac{1}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{4}{7}$ tertii. Sed factum eſt vt $\frac{1}{4}$ primi numeri plus $\frac{4}{7}$ tertii ad ſummam tertii & primi, ſic AH ad ST. Ergo ST eſt ſumma primi & tertii ſegmenti AB. Igitur cum ſecta ſit ST in V taliter vt $\frac{1}{4}$ TV & $\frac{4}{7}$ SV æquentur AH ſequitur TV eſſe primum ſegmentum AB quæſitum & SV tertium: ſiquidem $\frac{1}{4}$ TV minus CD plus $\frac{4}{7}$ SV plus CI æquantur AE. Quod erat vnum ex demonſtrandis.

Deinde quoniam ſecundum ſegmentum dat $\frac{2}{5}$ ſui & CE, ter-

tium

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda in tria ſegmenta taliter vt ſi primum ſegmentum dederit ſecundo tres ſui quadrantes & inſuper lineam C D : ſecundum tertio duos quintantes ſui & inſuper lineam C E : tertium denique primo quatuor ſui ſeptantes, & præterea lineam C I, poſt datum & acceptum fiat æqualitas. Diuidatur primò linea A B trifariam in punctis F & G. Et quoniam C D minor eſt C I, primum ſegmentum plus accipit à tertio, quam tribuat ſecundo : propterea de triente A F tollatur F H æqualis D I. Similiter quoniam C I minor eſt C E, tertium ſegmentum plus accipit a ſecundo quam tribuat primo, propterea de triente G B tollatur G M æqualis I E (ſecus faciendum eſt ſi ſegmenta plus accipiant quam tribuant) deinde accipiantur tres numeri quicumque habentes partes præſcriptas, quæ in noſtro problemate ſunt quadrantes, quintantes, ſeptantes : ſintque illi numeri 4 5 7. & quia partes dandæ primi ſegmenti ſunt $\frac{3}{4}$ & partes relictæ ſecundi $\frac{3}{5}$ ſumantur $\frac{3}{4}$ primi numeri & $\frac{3}{5}$ ſecundi, & fiat vt horum ſumma 6 ad ſummam duorum priorum numerorum 9 ita H M ad L K : ſeceturque L K in N per propoſ. V huius tali ratione vt $\frac{3}{4}$ L N cum $\frac{3}{5}$ N K æquentur H M. Similiter quoniam partes dandæ ſecundi ſegmenti ſunt $\frac{2}{5}$ & partes relictæ tertii $\frac{3}{7}$, ſumantur $\frac{2}{5}$ ſecundi numeri & $\frac{3}{7}$ tertii, & fiat vt illorum ſumma 5 ad ſummam duorum poſteriorum numerorum 12,



ita BM ad OP: & ſecetur OP in R per V huius taliter vt $\frac{2}{5}$ OR & $\frac{5}{7}$ RP æquales ſint BM. Pari modo quia partes dandæ tertii ſunt $\frac{4}{7}$ & partes relictæ primi $\frac{1}{4}$, ſumantur $\frac{4}{7}$ tertii numeri & $\frac{1}{4}$ primi: Fiatque vt horum ſumma 5 ad ſummam tertij & primi numeri 11, ita AH ad ST, & ſecetur ST in V ita vt $\frac{4}{7}$ SV & $\frac{1}{4}$ VT æquentur AH. Dico LN OR SV eſſe ſegmenta quæſita lineæ AB: ſicuti etiam VT NK RP.

Nam quia AB ſecta eſt trifariam in F & G, erit triens AF aut FG vel GB id in quo debet fieri æqualitas, (vt demonſtratum eſt in operatione Algebrica) & quoniam ex triente AF ſublata eſt HF æqualis DI, idem eſt ac ſi tolleretur CI minus CD. Igitur cum AF debeat æquari $\frac{4}{7}$ tertii ſegmenti plus $\frac{1}{5}$ primi plus CI minus CD, auferendo ex AF lineam CI minus CD, relinquetur AH æqualis $\frac{1}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{4}{7}$ tertii. Sed factum eſt vt $\frac{1}{4}$ primi numeri plus $\frac{4}{7}$ tertii ad ſummam tertii & primi, ſic AH ad ST. Ergo ST eſt ſumma primi & tertii ſegmenti AB. Igitur cum ſecta ſit ST in V taliter vt $\frac{1}{4}$ TV & $\frac{4}{7}$ SV æquentur AH ſequitur TV eſſe primum ſegmentum AB quæſitum & SV tertium: ſiquidem $\frac{1}{4}$ TV minus CD plus $\frac{4}{7}$ SV plus CI æquantur AE. Quod erat vnum ex demonſtrandis.

Deinde quoniam ſecundum ſegmentum dat $\frac{2}{5}$ ſui & CE, ter-

tium

tium autem ſegmentum retinet $\frac{3}{7}$ dando C I, & fieri debet æqualitas in triente G B, ſequitur G B æquari $\frac{2}{3}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{3}{7}$ tertii plus C E minus C I, hoc eſt I E. Sed G M ſumpta eſt æqualis I E, igitur G B æquatur I E plus $\frac{2}{5}$ ſecundi & $\frac{3}{7}$ tertii. Ergo M B æqualis eſt $\frac{2}{5}$ ſecundi & $\frac{3}{7}$ tertii. Sed factum eſt vt $\frac{2}{5}$ ſecundi numeri plus $\frac{3}{7}$ tertii ad ſummam ſecundi & tertii numeri, ita B M ad O P. Ergo O P eſt ſumma ſecundi & tertii ſegmenti A B. Quia ergo ſecta eſt linea O P in R, taliter vt $\frac{2}{5}$ O R & $\frac{3}{7}$ R P æquentur B M, erit O R ſecundum ſegmentum A B quæſitum, & R P tertium: ſiquidem $\frac{2}{5}$ O R plus C E plus $\frac{3}{7}$ R P — C I æquantur G B. Quod eſt alterum ex demonſtrandis.

Præterea cum primum ſegmentum det ſecundo $\frac{3}{4}$ ſui plus C D & ſecundum retineat $\frac{3}{5}$ ſui dando C E, & fieri debeat æqualitas in triente F G & differentia C E & C D ſit D E, ſequitur lineam illam quæ continebit trientem A B plus D E æquari $\frac{3}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{3}{5}$ ſecundi ſed talis eſt linea H M, nam H F ſumpta eſt æqualis D I, & G M æqualis I E, eſt autem D I & I E æqualis D E, igitur H M æquatur $\frac{3}{4}$ primi ſegmenti A B & $\frac{3}{5}$ ſecundi. Quod etiam

R.

aliter demonſtrabitur hoc pacto : nam quatuor quadrantes primi ſegmenti plus quinque quintantibus ſecundi plus ſeptem ſeptantibus tertii æquantur toti A B, ſed A H continet $\frac{1}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{4}{7}$ tertii : B M vero continet $\frac{2}{5}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{3}{7}$ tertii. Ergo H M continet $\frac{3}{4}$ primi & $\frac{3}{5}$ ſecundi. Sed factum eſt vt $\frac{3}{4}$ primi numeri plus $\frac{3}{5}$ ſecundi ad ſummam primi & ſecundi numeri, ſic H M ad L K: ergo L K eſt ſumma primi & ſecundi ſegmenti AB. Quia igitur LK ſecta eſt in N taliter vt $\frac{3}{4}$ L N cum $\frac{3}{5}$ N K æquentur H M, erit L N primùm ſegmentum A B quæſitum, & N K ſecundum : ſiquidem $\frac{3}{4}$ L N plus C D plus $\frac{3}{5}$ N K minus C E æquatur F G. Quod eſt tertium ex demonſtrandis.

Scholium.

Videbitur fortaſſe alicui non ſatisfieri omnibus conditionibus problematis propoſiti cum non ſit oſtenſum directè tria illa ſegmenta æquari A B. Verum ſi res attentius conſideretur, illud non fuit prætermiſſum: cum ſegmenta quorum meminimus, ſint ſegmenta ipſius A B Tamen ne vllus hæreat menti ſcrupulus, dico tria illa ſegmenta L N O R S V æquari A B, nam quia factum eſt vt partes numerorum ad ſummam numerorum, ita partes linearum ad ſummam linearum : erit vt partes omnes numerorum ad ſummas omnes numerorum ſimul ſumptas, ita partes omnes linearum ad ſummas omnes linearum ſimul ſumptas. Sed partes omnes numerorum æquantur ſummæ numerorum : ſummæ autem tres numerorum æquantur duplæ numerorum ſummæ, (quia quilibet numerus ſumptus eſt bis) ergo cum partes omnes linearum ſint oſtenſæ æ-

tium autem ſegmentum retinet $\frac{3}{7}$ dando CI, & fieri debet æqualitas in triente GB, ſequitur GB æquari $\frac{2}{3}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{3}{7}$ tertii plus CE minus CI, hoc eſt IE. Sed GM ſumpta eſt æqualis IE, igitur GB æquatur IE plus $\frac{2}{5}$ ſecundi & $\frac{3}{7}$ tertii. Ergo MB æqualis eſt $\frac{2}{5}$ ſecundi & $\frac{3}{7}$ tertii. Sed factum eſt vt $\frac{2}{5}$ ſecundi numeri plus $\frac{3}{7}$ tertii ad ſummam ſecundi & tertii numeri, ita BM ad OP. Ergo OP eſt ſumma ſecundi & tertii ſegmenti AB. Quia ergo ſecta eſt linea OP in R, taliter vt $\frac{2}{5}$ OR & $\frac{3}{7}$ RP æquentur BM, erit OR ſecundum ſegmentum AB quæſitum, & RP tertium: ſiquidem $\frac{2}{5}$ OR plus CE plus $\frac{3}{7}$ RP — CI æquantur GB. Quod eſt alterum ex demonſtrandis.

Præterea cum primum ſegmentum det ſecundo $\frac{3}{4}$ ſui plus CD & ſecundum retineat $\frac{3}{5}$ ſui dando CE, & fieri debeat æqualitas in triente FG & differentia CE & CD ſit DE, ſequitur lineam illam quæ continebit trientem AB plus DE æquari $\frac{3}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{3}{5}$ ſecundi ſed talis eſt linea HM, nam HF ſumpta eſt æqualis DI, & GM æqualis IE, eſt autem DI & IE æqualis DE, igitur HM æquatur $\frac{3}{4}$ primi ſegmenti AB & $\frac{3}{5}$ ſecundi, Quod etiam

aliter demonſtrabitur hoc pacto : nam quatuor quadrantes primi ſegmenti plus quinque quintantibus ſecundi plus ſeptem ſeptantibus tertii æquantur toti A B, ſed A H continet $\frac{1}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{4}{7}$ tertii : B M vero continet $\frac{2}{5}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{3}{7}$ tertii. Ergo H M continet $\frac{3}{4}$ primi & $\frac{3}{5}$ ſecundi. Sed factum eſt vt $\frac{3}{4}$ primi numeri plus $\frac{3}{5}$ ſecundi ad ſummam primi & ſecundi numeri, ſic H M ad L K : ergo L K eſt ſumma primi & ſecundi ſegmenti AB. Quia igitur L K ſecta eſt in N taliter vt $\frac{3}{4}$ L N cum $\frac{3}{5}$ N K æquentur H M, erit L N primum ſegmentum A B quæſitum, & N K ſecundum : ſiquidem $\frac{3}{4}$ L N plus C D plus $\frac{3}{5}$ N K minus C E æquatur F G. Quod eſt tertium ex demonſtrandis.

Scholium.

Videbitur fortaſſe alicui non ſatisfieri omnibus conditionibus problematis propoſiti cum non ſit oſtenſum directè tria illa ſegmenta æquari A B. Verum ſi res attentius conſideretur, illud non fuit prætermiſſum : cum ſegmenta quorum meminimus, ſint ſegmenta ipſius A B. Tamen ne vllus hæreat menti ſcrupulus, dico tria illa ſegmenta L N O R S V æquari A B, nam quia factum eſt vt partes numerorum ad ſummam numerorum, ita partes linearum ad ſummam linearum : erit vt partes omnes numerorum ad ſummas omnes numerorum ſimul ſumptas, ita partes omnes linearum ad ſummas omnes linearum ſimul ſumptas. Sed partes omnes numerorum æquantur ſummæ numerorum : ſummæ autem tres numerorum æquantur duplæ numerorum ſummæ, (quia quilibet numerus ſumptus eſt bis) ergo cum partes omnes linearum ſint oſtenſæ æ-

quales toti A B, erunt ſummæ linearum, nempe L K O P S T duplum ipſius A B. Igitur cum quodlibet ſegmentum bis repetatur, manifeſtum eſt illarum linearum L K O P S T ſemiſſem æquari A B. Sed L N O R S T ſunt ſemiſſis trium prædictarum: ergo L N O R S T æquuntur A B quod erat demonſtrandum.

Propositio XXXIII.

Data ſumma duarum quantitatum, & aggregato cuborum ab ipſis ortorum, illas diſcernere.

ESto data ſumma duorum numerorum 10, & aggregatum cuborum ab ipſis 370. Ponatur vnus numerus 1 R ergo alter erit 10 — 1 R. Horum cubi ſint 1 C & 1000 — 1 C † 30 Q — 300 R. Et horum cuborum ſumma 1000 † 30 Q — 300 R æquantur 370. Igitur 1 Q æquale eſt 10 R — 21. Et 1 R æquantur 3. vel 7.

Per Algebram ſpecioſam data ſumma duarum quantitatum B & aggregato cuborum C, ponatur vna quantitatum quæſitarum A. Igitur altera erit B — A. Harum cubi ſunt A cub. Itemque B cub. — 3 A B quadr. — A. cub. † 3 B A Q & poſt debitam reductionem, fit A quadratum æquale.

$$\frac{3\ \text{A B. quadr.} + \text{C} - \text{B cub.}}{3\ \text{B}}$$

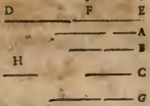
Hinc Canon.

Tolle aggregatum cuborum de cubo ſummæ quantitatum datæ: reſiduum diuide per triplam quantitatum ſummam, & fiet productus ſub quantitatibus quæſitis. Data autem ſumma duarum quantitatum, & producto illarum, diſcernentur ambæ per Propoſ. XXVI huius.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A continens duas lineas quarum cubi æquantur

cubo lineæ B. Duabus A & B inueniantur vtrinque tertiæ proportionales C & DE. Tum ex DE abſcindatur FE æqualis C, ſumaturque G media proportionalis inter A & B. Ac tandem fiat vt tripla A ad DF ita quadratum G ad quadratum H. Dico quadratum H æquari rectangulo duarum linearum quæſitarum. Nam cum B A DE ſint tres proportionales, cubus A æquatur ſolido BA DE per 36 vndecimi : & propter



eamdem rationem cubus B æquatur ſolido ABC: illa autem ſolida habent pro baſe communi rectangulum BA, igitur cum C ſit æqualis FE, ſequitur ſolidum ſub AB rectangulo in DF æquari differentiæ cuborum A & B. At G eſt media proportionalis inter A & B. Ergo quadratum G æquatur rectangulo A B. Ac proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato G & linea DF æquale eſt differentiæ cuborum A & B. Sed cubus A æquatur cubis partium & triplo ſolidi ex rectangulo partium in A (per 34 ſecundi nouæ clauis ad Geometriam) ſed quoniam factum eſt vt tripla A ad FD ita quadratum G ad quadratum H, erit quoque ſolidum ſub quadrato H in triplam A æquale triplo ſolido ſub rectangulo in A ſeu ſolido ſub rectangulo partium in triplam A. Ergo ſolidum ſub quaquadrato H in A eſt æquale ſolido ſub rectangulo partium in A. Igitur quadratum H æquatur rectangulo partium quæſitarum, quod erat demonſtrandum.

Data autem A ſumma duarum linearum & H potente rectangulum illarum, diſcernuntur ambæ lineæ per XXVI huius.

Scholium.

Potuit alio modo ſolui idem problema ponendo vnam radicem pro differentia quantitatum vnde nouus canon & noua effectio Geometrica naſcerentur : Enimuero, ſi de octupla cuborum à partibus ſumma tollatur duplus cubus ſummæ partium, reſiduum diuiſum per ſextuplam partium ſummam, dabit quadratum differentiæ partium. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

Propoſitio

quales toti A B, erunt ſummæ linearum, nempe L K O P S T duplum ipſius A B. Igitur cum quodlibet ſegmentum bis repetatur, manifeſtum eſt illarum linearum L K O P S T ſemiſſem æquari A B. Sed L N O R S T ſunt ſemiſſis trium prædictarum: ergo L N O R S T æquuntur A B quod erat demonſtrandum.

Propositio XXXIII.

Data ſumma duarum quantitatum, & aggregato cuborum ab ipſis ortorum, illas diſcernere.

Esto data ſumma duorum numerorum 10, & aggregatum cuborum ab ipſis 370. Ponatur vnus numerus 1 R ergo alter erit 10 — 1 R. Horum cubi ſint 1 C & 1000 — 1 C † 30 Q — 300 R. Et horum cuborum ſumma 1000 † 30 Q — 300 R æquantur 370. Igitur 1 Q æquale eſt 10 R — 21. Et 1 R æquantur 3. vel 7.

Per Algebram ſpecioſam data ſumma duarum quantitatum B & aggregato cuborum C, ponatur vna quantitatum quæſitarum A. Igitur altera erit B — A. Harum cubi ſunt A cub. Itemque B cub. — 3 A B quadr. — A. cub. † 3 B A Q & poſt debitam reductionem, fit A quadratum æquale.

$$\frac{3\ \text{A B. quadr.} + \text{C} - \text{B cub.}}{3\ \text{B}}$$

Hinc Canon.

Tolle aggregatum cuborum de cubo ſummæ quantitatum datæ: reſiduum diuide per triplam quantitatum ſummam, & fiet productus ſub quantitatibus quæſitis. Data autem ſumma duarum quantitatum, & producto illarum, diſcernentur ambæ per Propoſ. XXVI huius.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A continens duas lineas quarum cubi æquantur

ita B M ad O P: & ſecetur O P in R per V huius taliter vt $\frac{2}{5}$ O R & $\frac{5}{7}$ R P æquales ſint B M. Pari modo quia partes dandæ tertii ſunt $\frac{4}{7}$ & partes relictæ primi $\frac{1}{4}$, ſumantur $\frac{4}{7}$ tertii numeri & $\frac{1}{4}$ primi: Fiatque vt horum ſumma 5 ad ſummam tertij & primi numeri 11, ita A H ad S T, & ſecetur S T in V ita vt $\frac{4}{7}$ S V & $\frac{1}{4}$ V T æquentur A H. Dico L N O R S V eſſe ſegmenta quæſita lineæ A B: ſicuti etiam V T N K R P.

Nam quia A B ſecta eſt trifariam in F & G, erit triens A F aut F G vel G B id in quo debet fieri æqualitas, (vt demonſtratum eſt in operatione Algebrica) & quoniam ex triente A F ſublata eſt H F æqualis D I, idem eſt ac ſi tolleretur C I minus C D. Igitur cum A F debeat æquari $\frac{4}{7}$ tertii ſegmenti plus $\frac{1}{5}$ primi plus C I minus C D, auferendo ex A F lineam C I minus C D, relinquetur A H æqualis $\frac{1}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{4}{7}$ tertii. Sed factum eſt vt $\frac{1}{4}$ primi numeri plus $\frac{4}{4}$ tertii ad ſummam tertii & primi, ſic A H ad S T. Ergo S T eſt ſumma primi & tertii ſegmenti A B. Igitur cum ſecta ſit S T in V taliter vt $\frac{1}{4}$ T V & $\frac{4}{7}$ S V æquentur A H ſequitur T V eſſe primum ſegmentum A B quæſitum & S V tertium: ſiquidem $\frac{1}{4}$ T V minus C D plus $\frac{4}{7}$ S V plus C I æquantur A E. Quod erat vnum ex demonſtrandis.

Deinde quoniam ſecundum ſegmentum dat $\frac{2}{5}$ ſui & C E, ter-

tium

tium autem ſegmentum retinet $\frac{3}{7}$ dando C I, & fieri debet æqualitas in triente G B, ſequitur G B æquari $\frac{2}{5}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{3}{7}$ tertii plus C E minus C I, hoc eſt I E. Sed G M ſumpta eſt æqualis I E, igitur G B æquatur I E plus $\frac{2}{5}$ ſecundi & $\frac{3}{7}$ tertii. Ergo M B æqualis eſt $\frac{2}{5}$ ſecundi & $\frac{3}{7}$ tertii. Sed factum eſt vt $\frac{2}{5}$ ſecundi numeri plus $\frac{3}{7}$ tertii ad ſummam ſecundi & tertii numeri, ita B M ad O P. Ergo O P eſt ſumma ſecundi & tertii ſegmenti A B. Quia ergo ſecta eſt linea O P in R, taliter vt $\frac{2}{5}$ O R & $\frac{3}{7}$ R P æquentur B M, erit O R ſecundum ſegmentum A B quæſitum, & R P tertium: ſiquidem $\frac{2}{5}$ O R plus C E plus $\frac{3}{7}$ R P — C I æquantur G B. Quod eſt alterum ex demonſtrandis.

Præterea cum primum ſegmentum det ſecundo $\frac{3}{4}$ ſui plus C D & ſecundum retineat $\frac{3}{5}$ ſui dando C E, & fieri debeat æqualitas in triente F G & differentia C E & C D ſit D E, ſequitur lineam illam quæ continebit trientem A B plus D E æquari $\frac{3}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{3}{5}$ ſecundi ſed talis eſt linea H M, nam H F ſumpta eſt æqualis D I, & G M æqualis I E, eſt autem D I & I E æqualis D E, igitur H M æquatur $\frac{3}{4}$ primi ſegmenti A B & $\frac{3}{5}$ ſecundi. Quod etiam

aliter demonſtrabitur hoc pacto : nam quatuor quadrantes primi ſegmenti plus quinque quintantibus ſecundi plus ſeptem ſeptantibus tertii æquantur toti A B, ſed A H continet $\frac{1}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{4}{7}$ tertii : B M vero continet $\frac{2}{5}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{3}{7}$ tertii. Ergo H M continet $\frac{3}{4}$ primi & $\frac{3}{5}$ ſecundi. Sed factum eſt vt $\frac{3}{4}$ primi numeri plus $\frac{3}{5}$ ſecundi ad ſummam primi & ſecundi numeri, ſic H M ad L K: ergo L K eſt ſumma primi & ſecundi ſegmenti AB. Quia igitur L K ſecta eſt in N taliter vt $\frac{3}{4}$ L N cum $\frac{3}{5}$ N K æquentur H M, erit L N primùm ſegmentum A B quæſitum, & N K ſecundum : ſiquidem $\frac{3}{4}$ L N plus C D plus $\frac{3}{5}$ N K minus C E æquatur F G. Quod eſt tertium ex demonſtrandis.

Scholium.

Videbitur fortaſſe alicui non ſatisfieri omnibus conditionibus problematis propoſiti cum non ſit oſtenſum directè tria illa ſegmenta æquari A B. Verum ſi res attentius conſideretur, illud non fuit prætermiſſum: cum ſegmenta quorum meminimus, ſint ſegmenta ipſius A B Tamen ne vllus hæreat menti ſcrupulus, dico tria illa ſegmenta L N O R S V æquari A B, nam quia factum eſt vt partes numerorum ad ſummam numerorum, ita partes linearum ad ſummam linearum : erit vt partes omnes numerorum ad ſummas omnes numerorum ſimul ſumptas, ita partes omnes linearum ad ſummas omnes linearum ſimul ſumptas. Sed partes omnes numerorum æquantur ſummæ numerorum : ſummæ autem tres numerorum æquantur duplæ numerorum ſummæ, (quia quilibet numerus ſumptus eſt bis) ergo cum partes omnes linearum ſint oſtenſæ æ-

tium autem ſegmentum retinet $\frac{3}{7}$ dando CI, & fieri debet æqualitas in triente GB, ſequitur GB æquari $\frac{2}{5}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{3}{7}$ tertii plus CE minus CI, hoc eſt IE. Sed GM ſumpta eſt æqualis IE, igitur GB æquatur IE plus $\frac{2}{5}$ ſecundi & $\frac{3}{7}$ tertii. Ergo MB æqualis eſt $\frac{2}{5}$ ſecundi & $\frac{3}{7}$ tertii. Sed factum eſt vt $\frac{2}{5}$ ſecundi numeri plus $\frac{3}{7}$ tertii ad ſummam ſecundi & tertii numeri, ita BM ad OP. Ergo OP eſt ſumma ſecundi & tertii ſegmenti AB. Quia ergo ſecta eſt linea OP in R, taliter vt $\frac{2}{5}$ OR & $\frac{3}{7}$ RP æquentur BM, erit OR ſecundum ſegmentum AB quæſitum, & RP tertium: ſiquidem $\frac{2}{5}$ OR plus CE plus $\frac{3}{7}$ RP — CI æquantur GB. Quod eſt alterum ex demonſtrandis.

Præterea cum primum ſegmentum det ſecundo $\frac{3}{4}$ ſui plus CD & ſecundum retineat $\frac{3}{5}$ ſui dando CE, & fieri debeat æqualitas in triente FG & differentia CE & CD ſit DE, ſequitur lineam illam quæ continebit trientem AB plus DE æquari $\frac{3}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{3}{5}$ ſecundi ſed talis eſt linea HM, nam HF ſumpta eſt æqualis DI, & GM æqualis IE, eſt autem DI & IE æqualis DE, igitur HM æquatur $\frac{3}{4}$ primi ſegmenti AB & $\frac{3}{5}$ ſecundi. Quod etiam

aliter demonſtrabitur hoc pacto : nam quatuor quadrantes primi ſegmenti plus quinque quintantibus ſecundi plus ſeptem ſeptantibus tertii æquantur toti A B, ſed A H continet $\frac{1}{4}$ primi ſegmenti & $\frac{4}{7}$ tertii : B M vero continet $\frac{2}{5}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{3}{7}$ tertii. Ergo H M continet $\frac{3}{4}$ primi & $\frac{3}{5}$ ſecundi. Sed factum eſt vt $\frac{3}{4}$ primi numeri plus $\frac{3}{5}$ ſecundi ad ſummam primi & ſecundi numeri, ſic H M ad L K : ergo L K eſt ſumma primi & ſecundi ſegmenti A B. Quia igitur L K ſecta eſt in N taliter vt $\frac{3}{4}$ L N cum $\frac{3}{5}$ N K æquentur H M, erit L N primum ſegmentum A B quæſitum, & N K ſecundum : ſiquidem $\frac{3}{4}$ L N plus C D plus $\frac{3}{5}$ N K minus C E æquatur F G. Quod eſt tertium ex demonſtrandis.

Scholium.

Videbitur fortaſſe alicui non ſatisfieri omnibus conditionibus problematis propoſiti cum non ſit oſtenſum directè tria illa ſegmenta æquari A B. Verum ſi res attentius conſideretur, illud non fuit prætermiſſum : cum ſegmenta quorum meminimus, ſint ſegmenta ipſius A B. Tamen ne vllus hæreat menti ſcrupulus, dico tria illa ſegmenta L N O R S V æquari A B, nam quia factum eſt vt partes numerorum ad ſummam numerorum, ita partes linearum ad ſummam linearum : erit vt partes omnes numerorum ad ſummas omnes numerorum ſimul ſumptas, ita partes omnes linearum ad ſummas omnes linearum ſimul ſumptas. Sed partes omnes numerorum æquantur ſummæ numerorum : ſummæ autem tres numerorum æquantur duplæ numerorum ſummæ, (quia quilibet numerus ſumptus eſt bis) ergo cum partes omnes linearum ſint oſtenſæ æ-

quales toti A B, erunt ſummæ linearum, nempe L K O P S T duplum ipſius A B. Igitur cum quodlibet ſegmentum bis repetatur, manifeſtum eſt illarum linearum L K O P S T ſemiſſem æquari A B. Sed L N O R S T ſunt ſemiſſis trium prædictarum: ergo L N O R S T æquuntur A B quod erat demonſtrandum.

Propositio XXXIII.

Data ſummâ duarum quantitatum, & aggregato cuborum ab ipſis ortorum, illas diſcernere.

Esto data ſumma duorum numerorum 10, & aggregatum cuborum ab ipſis 370. Ponatur vnus numerus 1 R ergo alter erit 10 — 1 R. Horum cubi ſint 1 C & 1000 — 1 C † 30 Q — 300 R. Et horum cuborum ſumma 1000 † 30 Q — 300 R æquantur 370. Igitur 1 Q æquale eſt 10 R — 21. Et 1 R æquantur 3. vel 7.

Per Algebram ſpecioſam data ſumma duarum quantitatum B & aggregato cuborum C, ponatur vna quantitatum quæſitarum A. Igitur altera erit B — A. Harum cubi ſunt A cub. Itemque B cub. — 3 A B quadr. — A. cub. † 3 B A Q & poſt debitam reductionem, fit A quadratum æquale.

$$\frac{3\ A\ B.\ \text{quadr.} + C - B\ \text{cub.}}{3\ B}$$

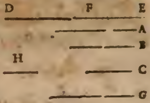
Hinc Canon.

Tolle aggregatum cuborum de cubo ſummæ quantitatum datæ: reſiduum diuide per triplam quantitatum ſummam, & fiet productus ſub quantitatibus quæſitis. Data autem ſumma duarum quantitatum, & producto illarum, diſcernentur ambæ per Propoſ. XXVI huius.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A continens duas lineas quarum cubi æquantur

cubo lineæ B. Duabus A & B inueniantur vtrinque tertiæ proportionales C & DE. Tum ex DE abſcindatur FE æqualis C, ſumaturque G media proportionalis inter A & B. Ac tandem fiat vt tripla A ad DF ita quadratum G ad quadratum H. Dico quadratum H æquari rectangulo duarum linearum quæſitarum. Nam cum B A DE ſint tres proportionales, cubus A æquatur ſolido BA DE per 36 vndecimi: & propter eamdem rationem cubus B æquatur ſolido A B C: illa autem ſolida habent pro baſe communi rectangulum B A, igitur cum C ſit æqualis FE, ſequitur ſolidum ſub A B rectangulo in DF æquari differentiæ cuborum A & B. At G eſt media proportionalis inter A & B. Ergo quadratum G æquatur rectangulo A B. Ac proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato G & linea DF æquale eſt differentiæ cuborum A & B. Sed cubus A æquatur cubis partium & triplo ſolidi ex rectangulo partium in A (per 34 ſecundi nouæ clauis ad Geometriam) ſed quoniam factum eſt vt tripla A ad FD ita quadratum G ad quadratum H, erit quoque ſolidum ſub quadrato H in triplam A æquale triplo ſolido ſub rectangulo in A ſeu ſolido ſub rectangulo partium in triplam A. Ergo ſolidum ſub quadrato H in A eſt æquale ſolido ſub rectangulo partium in A. Igitur quadratum H æquatur rectangulo partium quæſitarum, quod erat demonſtrandum.



Data autem A ſumma duarum linearum & H potente rectangulum illarum, diſcernuntur ambæ lineæ per XXVI huius.

Scholium.

Potuit alio modo ſolui idem problema ponendo vnam radicem pro differentia quantitatum vnde nouus canon & noua effectio Geometrica naſcerentur: Enimuero, ſi de octupla cuborum à partibus ſumma tollatur duplus cubus ſummæ partium, reſiduum diuiſum per ſextuplam partium ſummam, dabit quadratum differentiæ partium. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

Propoſitio

quales toti A B, erunt ſummæ linearum, nempe L K O P S T duplum ipſius A B. Igitur cum quodlibet ſegmentum bis repetatur, manifeſtum eſt illarum linearum L K O P S T ſemiſſem æquari A B. Sed L N O R S T ſunt ſemiſſis trium prædictarum: ergo L N O R S T æquuntur A B quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

Data ſumma duarum quantitatum, & aggregato cuborum ab ipſis ortorum, illas diſcernere.

Esto data ſumma duorum numerorum 10, & aggregatum cuborum ab ipſis 370. Ponatur vnus numerus I R ergo alter erit 10 —— I R. Horum cubi ſint I C & 1000 --- I C † 30 Q --- 300 R. Et horum cuborum ſumma 1000 † 30 Q —— 300 R æquantur 370. Igitur I Q æquale eſt 10 R —— 21. Et I R æquantur 3. vel 7.

Per Algebram ſpecioſam data ſumma duarum quantitatum B & aggregato cuborum C, ponatur vna quantitatum quæſitarum A. Igitur altera erit B —— A. Harum cubi ſunt A cub. Itemque B cub. —— 3 A B quadr. —— A. cub. † 3 B A Q & poſt debitam reductionem, fit A quadratum æquale.

$$\frac{3\ AB.\ \text{quadr.} + C - B\ \text{cub.}}{3\ B}$$

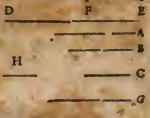
Hinc Canon.

Tolle aggregatum cuborum de cubo ſummæ quantitatum datæ: reſiduum diuide per triplam quantitatum ſummam, & fiet productus ſub quantitatibus quæſitis. Data autem ſumma duarum quantitatum, & producto illarum, diſcernentur ambæ per Propoſ. XXVI huius.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A continens duas lineas quarum cubi æquantur

cubo lineæ B. Duabus A & B inueniantur vtrinque tertiæ proportionales C & DE. Tum ex DE abſcindatur FE æqualis C, ſumaturque G media proportionalis inter A & B. Ac tandem fiat vt tripla A ad DF ita quadratum G ad quadratum H. Dico quadratum H æquari rectangulo duarum linearum quæſitarum. Nam cum BA DE ſint tres proportionales, cubus A æquatur ſolido BA DE per 36 vndecimi: & propter eamdem rationem cubus B æquatur ſolido ABC: illa autem ſolida habent pro baſe communi rectangulum BA, igitur cum C ſit æqualis FE, ſequitur ſolidum ſub AB rectangulo in DF æquari differentiæ cuborum A & B. At G eſt media proportionalis inter A & B. Ergo quadratum G æquatur rectangulo A B. Ac proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato G & linea DF æquale eſt differentiæ cuborum A & B. Sed cubus A æquatur cubis partium & triplo ſolidi ex rectangulo partium in A (per 34 ſecundi nouæ clauis ad Geometriam) ſed quoniam factum eſt vt tripla A ad FD ita quadratum G ad quadratum H, erit quoque ſolidum ſub quadrato H in triplam A æquale triplo ſolido ſub rectangulo in A ſeu ſolido ſub rectangulo partium in triplam A. Ergo ſolidum ſub quaquadrato H in A eſt æquale ſolido ſub rectangulo partium in A. Igitur quadratum H æquatur rectangulo partium quæſitarum, quod erat demonſtrandum.



Data autem A ſumma duarum linearum & H potente rectangulum illarum, diſcernuntur ambæ lineæ per XXVI huius.

Scholium.

Potuit alio modo ſolui idem problema ponendo vnam radicem pro differentia quantitatum vnde nouus canon & noua effectio Geometrica naſcerentur: Enimuero, ſi de octupla cuborum à partibus ſumma tollatur duplus cubus ſummæ partium, reſiduum diuiſum per ſextuplam partium ſummam, dabit quadratum differentiæ partium. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

Propoſitio

Propositio XXXIV.

Data differentia duarum quantitatum & interuallo cuborum ab ipſis ortorum, illas inuenire.

Eſto data differentia duorum numerorum 4, & interuallum cuborum ab ipſis *316*. Ponatur minor quæſitorum 1 R. Ergo alter erit 1 R + 4. Horum cubi ſunt 1 C & *64* + 1 C + 12 Q + 48 R & cuborum iſtorum differentia *64* + 12 Q + 48 R æquabitur *316*. Igitur 1 Q æquatur 21 — 4 R. Et ita 1 R eſt æqualis *3*, taliſque erit minor quæſitus, cui ſi addas 4, fiet alter quæſitus *7*.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia duarum quantitatum B & cuborum C, ponatur A minor: igitur maior erit A + B. Horum cubi ſunt A cubus & *3* B A quadr. + B cub. + A cub. + *3* A B quadr. Ergo horum cuborum differentia *3* B A quadr. + B cub. + *3* A B quadr. æquatur C. Et fit A quadratum æquale $\frac{\text{C} - \text{B cub.} - 3\text{ A B quadr.}}{3\text{ B}}$

Hinc Canon.

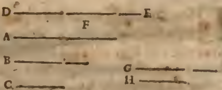
Ex interuallo cuborum tolle cubum interualli quantitatum datarum: reſiduum diuide per triplum interualli quantitatum, habebiſque productum ſub quantitatibus, ac proinde ipſas quantitates per XXIX huius.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A pro interuallo duarum linearum & B poſſit interuallum cuborum. Duabus A B inueniantur vtrinque tertiæ proportionales C & D E. Tum ex D E abſcindatur F E æqualis C: ſumptaque G media proportionali inter A & B: fiat vt tripla A ad D F ita quadratum G ad quadratum H. Dico quadratum H æquari rectangulo ſub lineis quæſitis. Nam ſolido ſub quadrato G in lineam D E æquatur cubus A: & ſolido ſub quadrato G in F E æquatur cubus B. Ergo cum illa ſolida habeant eamdem baſim, differentia illorum erit ſolidum ſub quadrato G in D F. Sed quoniam factum eſt vt

S

tripla A ad DF ita quadratum G ad quadratum, H eidem differentiæ cuborum A & B æquale erit ſolidum ſub quadrato H in triplam A. Sed interuallum cuborum à duabus lineis æquatur cubo interualli linearum & triplo ſolido ex rectangulo ſub lineis in interuallum linearum, vt olim dixi in Propoſ. XXXV. Lib. II. nouæ clauis ad Geometriam: Ergo ſolidum triplum ſub quadrato H in A, æquatur triplo ſolido ex rectangulo ſub lineis in A. Igitur quadratum H æquatur rectangulo ſub linæis quæſitis.



Data autem linea pro differentia duarum linearum & H quadrato, pro ipſarum rectangulo, diſcernuntur ipſæ lineæ per XXIX huius.

Scholium.

Potuit aliter ſolui hoc problema ponendo vnam radicem pro ſumma quantitatum: atque hinc orietur nouus Canon, & noua effectio Geometrica: Enimuero, ſi ex octupla differentia cuborum tollatur duplum cubum differentiæ quantitatum, reſiduum diuiſum per ſextuplam quantitatum differentiam exhibet quadratum ſummæ quantitatum. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO XXXV.

Inuenire tria quadrata quæ coniuncta æquentur interuallis ipſorum coniunctis.

Ponatur minimus numerus quadratus 1 maximus autem ſit 1 Q + 2 R + 1. Horum interuallum eſt 1 Q + 2 R cuius duplum 2 Q + 4 R æquari debet tribus interuallis (quia ſumptis tribus imo quotlibet numeris, differentis maximi & minimi eſt æqualis differentiis omnium mediorum) ergo tres numeri quadrati quæſiti debent quoque æquari 2 Q + 4 R inde tollantur maximus & medius qui iam habentur, reſiduum 1 Q + 2 R — 2 erit æquale quadra-

PROPOSITIO XXXIV.

Data differentia duarum quantitatum & interuallo cuborum ab ipſis ortorum, illas inuenire.

ESto data differentia duorum numerorum 4, & interuallum cuborum ab ipſis 316. Ponatur minor quæſitorum I R. Ergo alter erit I R † 4. Horum cubi ſunt I C & 64 † I C † 12 Q † 48 R & cuborum iſtorum differentia 64 † 12 Q † 48 R æquabitur 316. Igitur I Q æquatur 21 — 4 R. Et ita I R eſt æqualis 3, taliſque erit minor quæſitus, cui ſi addas 4. fiet alter quæſitus 7.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia duarum quantitatum B & cuborum C, ponatur A minor: igitur maior erit A † B. Horum cubi ſunt A cubus & 3 B A quadr. † B cub. † A cub. † 3 A B quadr. Ergo horum cuborum differentia 3 B A quadr. † B cub. † 3 A B quadr. æquatur C. Et fit A quadratum æquale $\frac{C \text{ -- } B \text{ cub.} - 3 \text{ A B quadr.}}{3\text{ B}}$

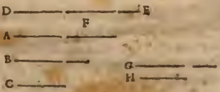
Hinc Canon.

Ex interuallo cuborum tolle cubum interualli quantitatum datarum: reſiduum diuide per triplum interualli quantitatum, habebiſque productum ſub quantitatibus, ac proinde ipſas quantitates per XXIX huius.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A pro interuallo duarum linearum & B poſſit interuallum cuborum. Duabus A B inueniantur vtrinque tertiæ proportionales C & D E. Tum ex D E abſcindatur F E æqualis C: ſumptaque G media proportionali inter A & B: fiat vt tripla A ad D F ita quadratum G ad quadratum H. Dico quadratum H æquari rectangulo ſub lineis quæſitis. Nam ſolido ſub quadrato G in lineam D E æquatur cubus A: & ſolido ſub quadrato G in F E æquatur cubus B. Ergo cum illa ſolida habeant eamdem baſim, differentia illorum erit ſolidum ſub quadrato G in D F. Sed quoniam factum eſt vt

tripla A ad DF ita quadratum G ad quadratum, H eidem differentiæ cuborum A & B æquale erit ſolidum ſub quadrato H in triplam A. Sed interuallum cuborum à duabus lineis æquatur cubo interualli linearum & triplo ſolido ex rectangulo ſub lineis in interuallum linearum, vt olim dixi in Propoſ. XXXV. Lib. II. nouæ clauis ad Geometriam: Ergo ſolidum triplum ſub quadrato H in A, æquatur triplo ſolido ex rectangulo ſub lineis in A. Igitur quadratum H æquatur rectangulo ſub linæis quæſitis.



Data autem linea pro differentia duarum linearum & H quadrato, pro ipſarum rectangulo, diſcernuntur ipſæ lineæ per XXIX huius.

Scholium.

Potuit aliter ſolui hoc problema ponendo vnam radicem pro ſumma quantitatum: atque hinc orir etur nouus Canon, & noua effectio Geometrica: Enimuero, ſi ex octupla differentia cuborum tollatur duplum cubum differentiæ quantitatum, reſiduum diuiſum per ſextuplam quantitatum differentiam exhibet quadratum ſummæ quantitatum. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

Propositio XXXV.

Inuenire tria quadrata quæ coniuncta æquentur interuallis ipſorum coniunctis.

Ponatur minimus numerus quadratus I maximus autem ſit I Q + 2 R + I. Horum interuallum eſt I Q + 2 R cuius duplum 2 Q + 4 R æquari debet tribus interuallis (qua ſumptis tribus imo quotlibet numeris, differentis maximi & minimi eſt æqualis differentiis omnium mediorum) ergo tres numeri quadrati quæſiti debent quoque æquari 2 Q + 4 R inde tollantur maximus & medius qui iam habentur, reſiduum I Q + 2 R — 2 erit æquale quadra-

to medio. Fingatur latus huius quadrati I R --- 4 ergo eius quadratum I Q † 16 — 8 R æquatur I Q † 2 R -- 2 & fit I R æqualis $\frac{9}{5}$ vnde vitando fractiones, inuenientur tres numeri quadrati 196. 121. 25. ſatisfacientes quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, ponatur minimus quadratus B, maximus vero A quadr. † 2 A † B. Horum dupla differentia eſt 2 A quadr. † 4 A æquari debet tribus quadratis quæſitis. Ergo ſi inde tollas maximum & minimum, habebis medium A quadr. † 2 A —— 2 B. Huius latus fingatur A —— C. Ergo eius quadratum A quadr. C quadr. —— 2 C A æquatur quadrato medio mox inuento, & fit A æqualis $\frac{2\,B \dagger C \text{ quadr.}}{2\,C \dagger 2}$

Hinc Canon.

Binarium iunge cuicumque quadrato, cuius latus ſuper ipſum binarium: ſummam diuide per duplam radicem huius quadrati binario auctam: & fiet numerus cuius duplum additum ipſius quadrato vnitate aucto, dabit maximum quadratum quæſitum: ſumma autem ex eodem duplo eodemque quadrato multata binario, exhibebit medium quadratum, minimo exiſtente vnitate.

Hinc Effectio Geometrica.

Cape tres numeros quadratos ſatisfacientes quæſtioni: vt 196. 121. 25. tum aſſume tres lineas, eamdem cum radicibus numerorum 14, 11, 5, proportionem habentes: Harum linearum quadrata ſimul coniuncta æqualia erunt tribus differentiis quadratorum. Enimuero cum quadrata habeant rationem duplicatam laterum tum in numeris tum in lineis, ſequitur quadrata linearum aſſumptarum fore vt quadrati radicum 14. 11. 5. At iſti quadrati ſimul coniuncti æquales ſunt differentiis numerorum quadratorum. Ergo & quadrata linearum differentiis ſuis æqualia erunt. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Inuenire tres quantitates quarum bina qualibet coniuncta & in reliquam ducta faciant quantitates datas.

SInt inueniendi tres numeri tales vt ſumma primi & ſecundi in tertium faciat 35. Summa ſecundi & tertii in primum 27. Et ſumma tertii & primi in ſecundum faciat 32. Ponatur tertius I R. Ergo primus & ſecundus ſimul erunt 35. Iam 35 diuidatur in duo

IR

ſegmenta taliter vt eorum differentia æquetur 5 (differentiæ aliorum duorum productorum qui dati ſunt) ſegmenta illa erunt 15 & 20. Quare primus erit 15 & ſecundus 20. Ergo ſumma primi &

IR · IR

tertii in ſecundum facit 20 † 300 æqualia 32. Ac proinde I R eſt æ-

IQ

qualis 5. Igitur primus erit 3, ſecundus 4, & tertius 5.

Per Algebram ſpecioſam, dato producto ex ſumma primi & ſecundi in tertium B, ex ſumma ſecundi & tertii in primum C, ex ſumma tertii & primi in ſecundum D, ponatur A tertius. Ergo B eſt ſum-

A

ma primi & ſecundi. Diuidatur B in duo ſegmenta quorum differentia ſit æqualis D —— C ſintque illa duo F & G. Igitur F erit

A

primus & G ſecundus & proinde ſumma primi & tertii in ſecun-

A

dum GF † G A quadr. æquatur D. Et fit A quadratũ æquale G F

A quadr. D---G

Hinc

to medio. Fingatur latus huius quadrati I R ---- 4 ergo eius quadratum I Q † 16 — 8 R æquatur I Q † 2 R -- 2 & fit I R æqualis $\frac{9}{5}$ vnde vitando fractiones, inuenientur tres numeri quadrati 196, 121. 25. ſatisfacientes quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, ponatur minimus quadratus B, maximus vero A quadr. † 2 A † B. Horum dupla differentia eſt 2 A quadr. † 4 A æquari debet tribus quadratis quæſitis. Ergo ſi inde tollas maximum & minimum, habebis medium A quadr. † 2 A —— 2 B. Huius latus fingatur A —— C. Ergo eius quadratum A quadr. C quadr. —— 2 C A æquatur quadrato medio mox inuento, & fit A æqualis $\frac{2\,B \dagger C\ quadr.}{2\,C \dagger 2}$

Hinc Canon.

Binarium iunge cuicumque quadrato, cuius latus ſuper ipſum binarium: ſummam diuide per duplam radicem huius quadrati binario auctam: & fiet numerus cuius duplum additum ipſius quadrato vnitate aucto, dabit maximum quadratum quæſitum: ſumma autem ex eodem duplo eodemque quadrato multata binario, exhibebit medium quadratum, minimo exiſtente vnitate.

Hinc Effectio Geometrica.

Cape tres numeros quadratos ſatisfacientes quæſtioni: vt 196. 121. 25. tum aſſume tres lineas, eamdem cum radicibus numerorum 14, 11, 5, proportionem habentes: Harum linearum quadrata ſimul coniuncta æqualia erunt tribus differentiis quadratorum. Enimuero cum quadrata habeant rationem duplicatam laterum tum in numeris tum in lineis, ſequitur quadrata linearum aſſumptarum fore vt quadrati radicum 14. 11. 5. At iſti quadrati ſimul coniuncti æquales ſunt differentiis numerorum quadratorum. Ergo & quadrata linearum differentiis ſuis æqualia erunt. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Inuenire tres quantitates quarum binæ qualibet coniunctæ & in reliquam ductæ faciant quantitates datas.

SInt inueniendi tres numeri tales vt ſumma primi & ſecundi in tertium faciat 35. Summa ſecundi & tertii in primum 27. Et ſumma tertii & primi in ſecundum faciat 32. Ponatur tertius 1 R. Ergo primus & ſecundus ſimul erunt 35. Iam 35 diuidatur in duo

1R

ſegmenta taliter vt eorum differentia æquetur 5 (differentiæ aliorum duorum productorum qui dati ſunt) ſegmenta illa erunt 15 & 20. Quare primus erit 15 & ſecundus 20. Ergo ſumma primi &

1R 1R

tertii in ſecundum facit 20 † 300 æqualia 32. Ac proinde 1 R eſt æ-

1Q

qualis 5. Igitur primus erit 3, ſecundus 4, & tertius 5.

Per Algebram ſpecioſam, dato producto ex ſumma primi & ſecundi in tertium B, ex ſumma ſecundi & tertii in primum C, ex ſumma tertii & primi in ſecundum D, ponatur A tertius. Ergo B eſt ſum-

A

ma primi & ſecundi. Diuidatur B in duo ſegmenta quorum differentia ſit æqualis D —— C ſintque illa duo F & G. Igitur F erit

A

primus & G ſecundus & proinde ſumma primi & tertii in ſecundum G F † G A quadr. æquatur D. Et ſit A quadratũ æquale G F

A quadr. D---G

Hinc

Hinc Canon.

Diuide quemlibet ex tribus datis in duo ſegmenta ita vt interuallum horum ſit æquale interuallo duorum aliorum datorum: deinde plano-planum ſub duobus illis ſegmentis diuide per differentiam minoris ſegmenti, & minoris aliorum duorum datorum (vel maioris ſegmenti & maioris dati) habebiſque quadratum vnius numeri quæſiti. Idem fac de aliis, & habebis tres quæſitos.

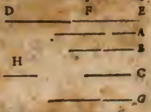
Vel

Ex duabus quibuſlibet quantitatibus datis tolle tertiam: reſidui ſemiſſis erat planum earum duarum quarum ſumma in reliquam ducta fuit: ita habebuntur plana trium quantitatum quæſitarum. Iam ſi tribus illis planis per tres diuerſas operationes ſumatur quarta quantitas proportionalis, fient tria quadrata quæſita ſigillatim, Vt dato producto ex prima in duas alias *27*, ex ſecunda in duas alias *32*, & ex tertia in alias duas 35. Si ex *59* ſumma duarum priorum quantitatum tollas tertiam *35*, reſidui *24* ſemiſſis 12 erit planum primæ & ſecundæ quantitatis quæſitæ. Si ex *67* ſumma duarum poſteriorum tollas aliam 27 reſidui 40 ſemiſſis 20 eſt planum ſecundæ & tertiæ quantitatis quæſitæ. Si vero ex *62* ſumma tertiæ & primæ tollas reliquam *32*, reſidui *30* ſemiſſis 15 eſt planum primæ & tertiæ quantitatis quæſitæ. Sic habes tria plana 12, 20, 15. Tribus illis (eo ordine, quo iacent) inueniatur quarta quantitas proportionalis 25, erit quadratum tertiæ quantitatis. 20 15 12 quarta proportionalis *9* eſt quadratum primæ, 15, 12, 20, quarta proportionalis 16 eſt quadratum ſecundæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint data tria quadrata AB, BC, CD & inueniendæ ſint tres lineæ quarum prima cum duabus reliquis faciat rectangulum æquale quadrato AB: ſecunda cum duabus reliquis faciat rectangulum æquale quadrato BC, Tertia vero in duas reliquas faciat rectangulum æquale quadrato CD Conſtituantur AB & BC ad angulos rectos & nectatur BC, ſuper quam fiat ſemicirculus in quo inſcriba-

cubo lineæ B. Duabus A & B inueniantur vtrinque tertiæ proportionales C & DE. Tum ex DE abſcindatur FE æqualis C, ſumaturque G media proportionalis inter A & B. Ac tandem fiat vt tripla A ad DF ita quadratum G ad quadratum H. Dico quadratum H æquari rectangulo duarum linearum quæſitarum. Nam cum B A DE ſint tres proportionales, cubus A æquatur ſolido BA DE per 36 vndecimi : & propter eamdem rationem cubus B æquatur ſolido ABC : illa autem ſolida habent pro baſe communi rectangulum BA, igitur cum C ſit æqualis FE, ſequitur ſolidum ſub AB rectangulo in DF æquari differentiæ cuborum A & B. At G eſt media proportionalis inter A & B. Ergo quadratum G æquatur rectangulo A B. Ac proinde ſolidum rectangulum ſub quadrato G & linea DF æquale eſt differentiæ cuborum A & B. Sed cubus A æquatur cubis partium & triplo ſolidi ex rectangulo partium in A (per 34 ſecundi nouæ clauis ad Geometriam) ſed quoniam factum eſt vt tripla A ad FD ita quadratum G ad quadratum H, erit quoque ſolidum ſub quadrato H in triplam A æquale triplo ſolido ſub rectangulo in A ſeu ſolido ſub rectangulo partium in triplam A. Ergo ſolidum ſub quaquadrato H in A eſt æquale ſolido ſub rectangulo partium in A. Igitur quadratum H æquatur rectangulo partium quæſitarum, quod erat demonſtrandum.



Data autem A ſumma duarum linearum & H potente rectangulum illarum, diſcernuntur ambæ lineæ per XXVI huius.

Scholium.

Potuit alio modo ſolui idem problema ponendo vnam radicem pro differentia quantitatum vnde nouus canon & noua effectio Geometrica naſcerentur : Enimuero, ſi de octupla cuborum à partibus ſumma tollatur duplus cubus ſummæ partium, reſiduum diuiſum per ſextuplam partium ſummam, dabit quadratum differentiæ partium. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

Propoſitio

PROPOSITIO XXXIV.

Data differentia duarum quantitatum & interuallo cuborum ab ipſis ortorum, illas inuenire.

Eſto data differentia duorum numerorum 4, & interuallum cuborum ab ipſis *316*. Ponatur minor quæſitorum 1 R. Ergo alter erit 1 R + 4. Horum cubi ſunt 1 C & *64* + 1 C + 12 Q + 48 R & cuborum iſtorum differentia. *64* + 12 Q + 48 R æquabitur *316*. Igitur 1 Q æquatur 21 —— 4 R. Et ita 1 R eſt æqualis *3*, taliſque erit minor quæſitus, cui ſi addas 4, fiet alter quæſitus 7.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia duarum quantitatum B & cuborum C, ponatur A minor : igitur maior erit A + B. Horum cubi ſunt A cubus & *3* B A quadr. + B cub. + A cub. + *3* A B quadr. Ergo horum cuborum differentia *3* B A quadr. + B cub. + *3* A B quadr. æquatur C. Et fit A quadratum æquale $\frac{C \text{ -- } B\ cub. \text{ — } 3\ A\ B\ quadr.}{3\ B}$

Hinc Canon.

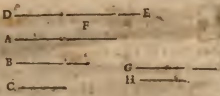
Ex interuallo cuborum tolle cubum interualli quantitatum datarum : reſiduum diuide per triplum interualli quantitatum, habebiſque productum ſub quantitatibus, ac proinde ipſas quantitates per XXIX huius.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A pro interuallo duarum linearum & B poſſit interuallum cuborum. Duabus A B inueniantur vtrinque tertiæ proportionales C & D E. Tum ex D E abſcindatur F E æqualis C : ſumptaque G media proportionali inter A & B : fiat vt tripla A ad D F ita quadratum G ad quadratum H. Dico quadratum H æquari rectangulo ſub lineis quæſitis. Nam ſolido ſub quadrato G in lineam D E æquatur cubus A : & ſolido ſub quadrato G in F E æquatur cubus B. Ergo cum illa ſolida habeant eamdem baſim, differentia illorum erit ſolidum ſub quadrato G in D F. Sed quoniam factum eſt vt

S

tripla A ad D F ita quadratum G ad quadratum, H eidem differen-tiæ cuborum A & B æquale erit ſolidum ſub quadrato H in triplam A. Sed interuallum cuborum à duabus lineis æquatur cubo interualli linearum & triplo ſolido ex rectangulo ſub lineis in interuallum linearum, vt olim dixi in Propoſ. XXXV. Lib. II. nouæ clauis ad Geometriam: Ergo ſolidum triplum ſub quadrato H in A, æquatur triplo ſolido ex rectangulo ſub lineis in A. Igitur quadratum H æquatur rectangulo ſub linæis quæſitis.



Data autem linea pro differentia duarum linearum & H quadrato, pro ipſarum rectangulo, diſcernuntur ipſæ lineæ per XXIX huius.

Scholium.

Potuit aliter ſolui hoc problema ponendo vnam radicem pro ſumma quantitatum: atque hinc oriretur nouus Canon, & noua effectio Geometrica: Enimuero, ſi ex octupla differentia cuborum tollatur duplum cubum differentiæ quantitatum, reſiduum diuiſum per ſextuplam quantitatum differentiam exhibet quadratum ſummæ quantitatum. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO XXXV.

Inuenire tria quadrata quæ coniuncta æquentur interuallis ipſorum coniunctis.

Ponatur minimus numerus quadratus 1 maximus autem ſit 1 Q + 2 R + 1. Horum interuallum eſt 1 Q + 2 R cuius duplum 2 Q + 4 R æquari debet tribus interuallis (quæ ſumptis tribus imo quotlibet numeris, differentis maximi & minimi eſt æqualis differentiis omnium mediorum) ergo tres numeri quadrati quæſiti debent quoque æquari 2 Q + 4 R inde tollantur maximus & medius qui iam habentur, reſiduum 1 Q + 2 R — 2 erit æquale quadra-

Propositio XXXIV.

Data differentia duarum quantitatum & interuallo cuborum ab ipſis ortorum, illas inuenire.

Esto data differentia duorum numerorum 4, & interuallum cuborum ab ipſis 316. Ponatur minor quæſitorum 1 R. Ergo alter erit 1 R + 4. Horum cubi ſunt 1 C & 64 + 1 C + 12 Q + 48 R & cuborum iſtorum differentia 64 + 12 Q + 48 R æquabitur 316. Igitur 1 Q æquatur 21 — 4 R. Et ita 1 R eſt æqualis 3, taliſque erit minor quæſitus, cui ſi addas 4. fiet alter quæſitus 7.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia duarum quantitatum B & cuborum C, ponatur A minor: igitur maior erit A + B. Horum cubi ſunt A cubus & 3 B A quadr. + B cub. + A cub. + 3 A B quadr. Ergo horum cuborum differentia 3 B A quadr. + B cub. + 3 A B quadr. æquatur C. Et fit A quadratum æquale $\frac{C - B\ cub. - 3\ A\ B\ quadr.}{3B}$

Hinc Canon.

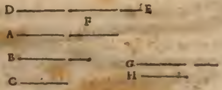
Ex interuallo cuborum tolle cubum interualli quantitatum datarum: reſiduum diuide per triplum interualli quantitatum, habebiſque productum ſub quantitatibus, ac proinde ipſas quantitates per XXIX huius.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A pro interuallo duarum linearum & B poſſit interuallum cuborum. Duabus A B inueniantur vtrinque tertiæ proportionales C & D E. Tum ex D E abſcindatur F E æqualis C: ſumptaque G media proportionali inter A & B: fiat vt tripla A ad D F ita quadratum G ad quadratum H. Dico quadratum H æquari rectangulo ſub lineis quæſitis. Nam ſolido ſub quadrato G in lineam D E æquatur cubus A: & ſolido ſub quadrato G in F E æquatur cubus B. Ergo cum illa ſolida habeant eamdem baſim, differentia illorum erit ſolidum ſub quadrato G in D F. Sed quoniam factum eſt vt

S

tripla A ad D F ita quadratum G ad quadratum, H eidem differentiæ cuborum A & B æquale erit ſolidum ſub quadrato H in triplam A. Sed interuallum cuborum à duabus lineis æquatur cubo interualli linearum & triplo ſolido ex rectangulo ſub lineis in interuallum linearum, vt olim dixi in Propoſ. XXXV. Lib. II. nouæ clauis ad Geometriam: Ergo ſolidum triplum ſub quadrato H in A, æquatur triplo ſolido ex rectangulo ſub lineis in A. Igitur quadratum H æquatur rectangulo ſub linæis quæſitis.



Data autem linea pro differentia duarum linearum & H quadrato, pro ipſarum rectangulo, diſcernuntur ipſæ lineæ per XXIX huius.

Scholium.

Potuit aliter ſolui hoc problema ponendo vnam radicem pro ſumma quantitatum: atque hinc orietur nouus Canon, & noua effectio Geometrica: Enimuero, ſi ex octupla differentia cuborum tollatur duplum cubum differentiæ quantitatum, reſiduum diuiſum per ſextuplam quantitatum differentiam exhibet quadratum ſummæ quantitatum. Quod adnotaſſe operæ pretium erit.

PROPOSITIO XXXV.

Inuenire tria quadrata quæ coniuncta æquentur interuallis ipſorum coniunctis.

Ponatur minimus numerus quadratus 1 maximus autem ſit 1 Q + 2 R + 1. Horum interuallum eſt 1 Q + 2 R cuius duplum 2 Q + 4 R æquari debet tribus interuallis (quæ ſumptis tribus imo quotlibet numeris, differentis maximi & minimi eſt æqualis differentiis omnium mediorum) ergo tres numeri quadrati quæſiti debent quoque æquari 2 Q + 4 R inde tollantur maximus & medius qui iam habentur, reſiduum 1 Q + 2 R — 2 erit æquale quadra-

to medio. Fingatur latus huius quadrati 1 R --- 4 ergo eius quadratum 1 Q † 16 — 8 R æquatur 1 Q † 2 R -- 2 & fit 1 R æqualis $\frac{9}{5}$ vnde vitando fractiones, inuenientur tres numeri quadrati 196. 121. 25. ſatisfacientes quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, ponatur minimus quadratus B, maximus vero A quadr. † 2 A † B. Horum dupla differentia eſt 2 A quadr. † 4 A æquari debet tribus quadratis quæſitis. Ergo ſi inde tollas maximum & minimum, habebis medium A quadr. † 2 A —— 2 B. Huius latus fingatur A —— C. Ergo eius quadratum A quadr. C quadr. — 2 C A æquatur quadrato medio mox inuento, & fit A æqualis $\frac{2\,B \dagger C\ quadr.}{2\,C \dagger 2}$

Hinc Canon.

Binarium iunge cuicumque quadrato, cuius latus ſuper ipſum binarium: ſummam diuide per duplam radicem huius quadrati binario auctam: & fiet numerus cuius duplum additum ipſius quadrato vnitate aucto, dabit maximum quadratum quæſitum: ſumma autem ex eodem duplo eodemque quadrato multata binario, exhibebit medium quadratum, minimo exiſtente vnitate.

Hinc Effectio Geometrica.

Cape tres numeros quadratos ſatisfacientes quæſtioni: vt 196. 121. 25. tum aſſume tres lineas, eamdem cum radicibus numerorum 14, 11, 5, proportionem habentes: Harum linearum quadrata ſimul coniuncta æqualia erunt tribus differentiis quadratorum. Enimuero cum quadrata habeant rationem duplicatam laterum tum in numeris tum in lineis, ſequitur quadrata linearum aſſumptarum fore vt quadrati radicum 14. 11. 5. At iſti quadrati ſimul coniuncti æquales ſunt differentiis numerorum quadratorum. Ergo & quadrata linearum differentiis ſuis æqualia erunt. Quod fuit demonſtrandum.

Propositio XXXVI.

Inuenire tres quantitates quarum bina qualibet coniuncta & in reliquam ducta faciant quantitates datas.

Sint inueniendi tres numeri tales vt ſumma primi & ſecundi in tertium faciat 35. Summa ſecundi & tertii in primum 27. Et ſumma tertii & primi in ſecundum faciat 32. Ponatur tertius 1 R. Ergo primus & ſecundus ſimul erunt 35. Iam 35 diuidatur in duo

$\overline{1R}$

ſegmenta taliter vt eorum differentia æquetur 5 (differentiæ aliorum duorum productorum qui dati ſunt) ſegmenta illa erunt 15 & 20. Quare primus erit 15 & ſecundus 20. Ergo ſumma primi &

$\overline{1R}$ $\overline{1R}$

tertii in ſecundum facit 20 † 300 æqualia 32. Ac proinde 1 R eſt æ-

$\overline{1Q}$

qualis 5. Igitur primus erit 3, ſecundus 4, & tertius 5.

Per Algebram ſpecioſam, dato producto ex ſumma primi & ſecundi in tertium B, ex ſumma ſecundi & tertii in primum C, ex ſumma tertii & primi in ſecundum D, ponatur A tertius. Ergo B eſt ſum-

$\overline{A}$

ma primi & ſecundi. Diuidatur B in duo ſegmenta quorum differentia ſit æqualis D —— C ſintque illa duo F & G. Igitur F erit

$\overline{A}$

primus & G ſecundus & proinde ſumma primi & tertii in ſecun-

$\overline{A}$

dum G F † G A quadr. æquatur D. Et ſit A quadratũ æquale G F

$\overline{\text{A quadr.}}$ $\overline{\text{D---G}}$

Hinc

co medio. Fingatur latus huius quadrati 1 R --- 4 ergo eius quadratum 1 Q † 16 — 8 R æquatur 1 Q † 2 R -- 2 & fit 1 R æqualis $\frac{9}{5}$ vnde vitando fractiones, inuenientur tres numeri quadrati 196. 121. 25. ſatisfacientes quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, ponatur minimus quadratus B, maximus vero A quadr. † 2 A † B. Horum dupla differentia eſt 2 A quadr. † 4 A æquari debet tribus quadratis quæſitis. Ergo ſi inde tollas maximum & minimum, habebis medium A quadr. † 2 A —— 2 B. Huius latus fingatur A —— C. Ergo eius quadratum A quadr. C quadr. — 2 C A æquatur quadrato medio mox inuento, & fit A æqualis $\frac{\text{2 B † C quadr.}}{\text{2 C † 2}}$

Hinc Canon.

Binarium iunge cuicumquè quadrato, cuius latus ſuper ipſum binarium: ſummam diuide per duplam radicem huius quadrati binario auctam: & fiet numerus cuius duplum additum ipſius quadrato vnitate aucto, dabit maximum quadratum quæſitum: ſumma autem ex eodem duplo eodemque quadrato multata binario, exhibebit medium quadratum, minimo exiſtente vnitate.

Hinc Effectio Geometrica.

Cape tres numeros quadratos ſatisfacientes quæſtioni: vt 196. 121. 25. tum aſſume tres lineas, eamdem cum radicibus numerorum 14, 11, 5, proportionem habentes: Harum linearum quadrata ſimul coniuncta æqualia erunt tribus differentiis quadratorum. Enimuero cum quadrata habeant rationem duplicatam laterum tum in numeris tum in lineis, ſequitur quadrata linearum aſſumptarum fore vt quadrati radicum 14. 11. 5. At iſti quadrati ſimul coniuncti æquales ſunt differentiis numerorum quadratorum. Ergo & quadrata linearum differentiis ſuis æqualia erunt. Quod fuit demonſtrandum.

Hinc Canon.

Diuide quemlibet ex tribus datis in duo ſegmenta ita vt interuallum horum ſit æquale interuallo duorum aliorum datorum: deinde plano-planum ſub duobus illis ſegmentis diuide per differentiam minoris ſegmenti, & minoris aliorum duorum datorum (vel maioris ſegmenti & maioris dati) habebiſque quadratum vnius numeri quæſiti. Idem fac de aliis, & habebis tres quæſitos.

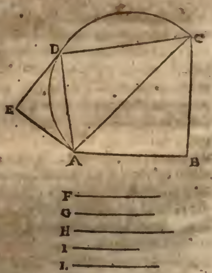
Vel

Ex duabus quibuſlibet quantitatibus datis tolle tertiam: reſidui ſemiſſis erat planum earum duarum quarum ſumma in reliquam ducta fuit: ita habebuntur plana trium quantitatum quæſitarum. Iam ſi tribus illis planis per tres diuerſas operationes ſumatur quarta quantitas proportionalis, fient tria quadrata quæſita ſigillatim, Vt dato producto ex prima in duas alias *27*, ex ſecunda in duas alias *32*, & ex tertia in alias duas 35. Si ex *59* ſumma duarum priorum quantitatum tollas tertiam *35*, reſidui *24* ſemiſſis 12 erit planum primæ & ſecundæ quantitatis quæſitæ. Si ex *67* ſumma duarum poſteriorum tollas aliam 27 reſidui 40 ſemiſſis 20 eſt planum ſecundæ & tertiæ quantitatis quæſitæ. Si vero ex *62* ſumma tertiæ & primæ tollas reliquam *32*, reſidui *30* ſemiſſis 15 eſt planum primæ & tertiæ quantitatis quæſitæ. Sic habes tria plana 12, 20, 15. Tribus illis (eo ordine, quo iacent) inueniatur quarta quantitas proportionalis 25, erit quadratum tertiæ quantitatis. 20 15 12 quarta proportionalis *9* eſt quadratum primæ, 15, 12, 20, quarta proportionalis 16 eſt quadratum ſecundæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint data tria quadrata AB, BC, CD & inueniendæ ſint tres lineæ quarum prima cum duabus reliquis faciat rectangulum æquale quadrato AB: ſecunda cum duabus reliquis faciat rectangulum æquale quadrato BC. Tertia vero in duas reliquas faciat rectangulum æquale quadrato CD Conſtituantur AB & BC ad angulos rectos & nectatur BC, ſuper quam fiat ſemicirculus in quo inſcriba-

tur C D, & coniuncta A D fiat A E D triangulum rectangulum & iſoſceles. Certum eſt per iſtam praxim de ſumma quadratarum A B & B C ſublatum eſſe quadratum C D, & reſidui ſumptam eſſe ſemiſſem, nempe quadratum A E vel E D. Eadem methodo de ſumma quadratorum B C & C D tollatur quadratum A B, & reſidui ſemiſſis ſit quadratum F. Similiter de ſumma quadratorum A C & A B tollatur quadratum B C, & reſidui ſemiſſis ſit quadratum G. Deinde fiat vt D E ad F. Ita G ad H Et vt F ad G ita D E ad I. Et vt G ad D E ita F ad L. Dico tres lineas quæſitas eſſe H, I, L. Cum enim quadratum A B æquetur rectangulo ex prima in reliquas duas ſimul ſumptas, erit æquale rectangulo ex prima in ſecundam & ex prima in tertiam (per 1 ſecundi Euclidis) ſimiliter B C quadratum æquabitur rectangulo ex ſecunda in tertiam & primam : & propter eamdem rationem quadratum C D æquatur rectangulo ex tertia in prmam & ſecundam. Igitur quadrata A B & B C quæ ſunt æqualia quadrato A C (per 47 primi) ſunt æqualia quadrato C D & præterea duplo rectangulo primæ in ſecundam. Ergo quadratum A D iſti duplo rectangulo æquatur (per 31 tertii & 47 primi) cumque quadratum A D æquale ſit duplo quadrato D E, erit quadratum D E æquale rectangulo ſub prima & ſecunda quæſitis. Simili plane diſcurſu oſtendetur quadratum F æquari rectangulo ſub ſecunda & tertia : & quadratum G rectangulo ſub tertia & prima. Sed rectangulum ſub prima & ſecunda ad rectangulum ſub ſecunda & tertia, propter eamdem altitudinem, eſt vt prima ad tertiam : item rectangulum ſub tertia & prima ad quadratum tertiæ propter eamdem altitudinem eſt etiam vt prima ad tertiam : item rectangulum ſub tertia & prima ad quadratum tertiæ propter eamdem altitudinem eſt etiam vt prima ad tertiam : ergo eſt vt rectangulum ſub prima & ſecunda (ſeu quadratum



Hinc Canon.

Diuide quemlibet ex tribus datis in duo ſegmenta ita vt interuallum horum ſit æquale interuallo duorum aliorum datorum: deinde plano-planum ſub duobus illis ſegmentis diuide per differentiam minoris ſegmenti, & minoris aliorum duorum datorum (vel maioris ſegmenti & maioris dati) habebiſque quadratum vnius numeri quæſiti. Idem fac de aliis, & habebis tres quæſitos.

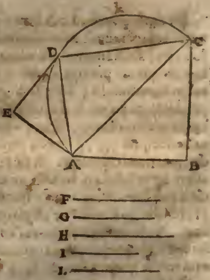
Vel

Ex duabus quibuſlibet quantitatibus datis tolle tertiam: reſidui ſemiſſis erat planum earum duarum quarum ſumma in reliquam ducta fuit: ita habebuntur plana trium quantitatum quæſitarum. Iam ſi tribus illis planis per tres diuerſas operationes ſumatur quarta quantitas proportionalis, fient tria quadrata quæſita ſigillatim, Vt dato producto ex prima in duas alias 27, ex ſecunda in duas alias 32, & ex tertia in alias duas 35. Si ex 59 ſumma duarum priorum quantitatum tollas tertiam 35, reſidui 24 ſemiſſis 12 erit planum primæ & ſecundæ quantitatis quæſitæ. Si ex 67 ſumma duarum poſteriorum tollas aliam 27 reſidui 40 ſemiſſis 20 eſt planum ſecundæ & tertiæ quantitatis quæſitæ. Si vero ex 62 ſumma tertiæ & primæ tollas reliquam 32, reſidui 30 ſemiſſis 15 eſt planum primæ & tertiæ quantitatis quæſitæ. Sic habes tria plana 12, 20, 15. Tribus illis (eo ordine, quo iacent) inueniatur quarta quantitas proportionalis 25, erit quadratum tertiæ quantitatis. 20 15 12 quarta proportionalis 9 eſt quadratum primæ. 15, 12, 20, quarta proportionalis 16 eſt quadratum ſecundæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint data tria quadrata A B, B C, C D & inueniendæ ſint tres lineæ quarum prima cum duabus reliquis faciat rectangulum æquale quadrato A B: ſecunda cum duabus reliquis faciat rectangulum æquale quadrato B C. Tertia vero in duas reliquas faciat rectangulum æquale quadrato C D. Conſtituantur A B & B C ad angulos rectos & nectatur B C, ſuper quam fiat ſemicirculus in quo inſcriba-

tur CD, & coniuncta AD fiat AED triangulum rectangulum & iſoſceles. Certum eſt per iſtam praxim de ſumma quadratarum AB & BC ſublatum eſſe quadratum CD, & reſidui ſumptam eſſe ſemiſſem, nempe quadratum AE vel ED. Eadem methodo de ſumma quadratorum BC & CD tollatur quadratum AB, & reſidui ſemiſſis ſit quadratum F. Similiter de ſumma quadratorum AC & AB tollatur quadratum BC, & reſidui ſemiſſis ſit quadratum G. Deinde fiat vt DE ad F. Ita G ad H. Et vt F ad G ita DE ad I. Et vt G ad DE ita F ad L. Dico tres lineas quæſitas eſſe H, I, L. Cum enim quadratum AB æquetur rectangulo ex prima in reliquas duas ſimul ſumptas, erit æquale rectangulo ex prima in ſecundam & ex prima in tertiam (per 1 ſecundi Euclidis) ſimiliter BC quadratum æquabitur rectangulo ex ſecunda in tertiam & primam: & propter eamdem rationem quadratum CD æquatur rectangulo ex tertia in prmam & ſecundam. Igitur quadrata AB & BC quæ ſunt æqualia quadrato AC (per 47 primi) ſunt æqualia quadrato CD & præterea duplo rectangulo primæ in ſecundam. Ergo quadratum AD iſti duplo rectangulo æquatur (per 31 tertii & 47 primi) cumque quadratum AD



æquale ſit duplo quadrato DE, erit quadratum DE æquale rectangulo ſub prima & ſecunda quæſitis. Simili plane diſcurſu oſtendetur quadratum F æquari rectangulo ſub ſecunda & tertia: & quadratum G rectangulo ſub tertia & prima. Sed rectangulum ſub prima & ſecunda ad rectangulum ſub ſecunda & tertia, propter eamdem altitudinem, eſt vt prima ad tertiam: item rectangulum ſub tertia & prima ad quadratum tertiæ propter eamdem altitudinem eſt etiam vt prima ad tertiam: item rectangulum ſub tertia & prima ad quadratum tertiæ propter eamdem altitudinem eſt etiam vt prima ad tertiam: ergo eſt vt rectangulum ſub prima & ſecunda (ſeu quadratum

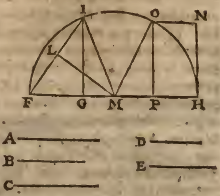
D E) ad rectangulum ſub ſecunda & tertia (ſeu quadratum F) ita rectangulum ſub tertia & prima (ſeu quadratum G) ad quadratum tertiæ. Sed factum eſt vt D E ad F, ita G ad H. Igitur erit quoque vt quadratum D E ad quadratum F ita quadratum G ad quadratum H. Igitur (per 9 quinti) quadratum H eſt quadratum tertiæ. Pari modo vt rectangulum ſub ſecunda & tertia ad rectangulum ſub tertia & prima, ita eſt (propter eamdem altitudinem) ſecunda ad primam: item vt rectangulum ſub prima, & ſecunda ad quadratum primæ, ita eſt (propter eamdem altitudinem ſecunda ad primam: ergo vt rectangulum ſub ſecunda & tertia ad rectangulum ſub tertia & prima, ita eſt rectangulum ſub prima & ſecunda ad quadratum primæ: ſed factum eſt vt F ad G ita D E ad I. Vnde ſequitur earum quadrata eſſe proportionalia. Igitur quoniam quadratum F æquatur rectangulo ſub ſecunda & tertia, & quadratum G rectangulo ſub tertia & prima, & D E quadratum rectangulo ſub prima & ſecunda, erit quadratum I quadratum primæ. Non aliter oſtendetur rectangulum ſub tertia & prima ſeu quadratum G, ad rectangulum ſub prima & ſecunda, ſeu quadratum D E, eſſe vt rectangulum ſub ſecunda & tertia ſeu quadratum F ad quadratum ſecundæ. Ergo quoniam factum eſt vt G ad D E ita F ad L erit quadratum L quadratum ſecundæ (per 9 quinti) Igitur H I L ſunt tres lineæ quæſitæ. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Subtile omninò eſt artificium Diophanti, vt potè qui per interualla æqualia perueniat commodè ad duplicatam æqualitatem: mihi tamen totum iſtud negotium paulò altiùs conſideranti occurrit alius modus multo facilior, nec minorem habens ſubtilitatem. Datis enim planis primæ in reliquas 27, ſecundæ in reliquas 32, tertiæ in reliquas 35, inueniantur vt diximus in priori parte poſterioris Canonis plana primæ in ſecundam 12, ſecundæ in tertiam 20, tertiæ in primam 15. Deinde poſita 1 R pro ſecunda erit prima $\frac{12}{1R}$ & tertia $\frac{20}{1R}$ ſed planum primæ in tertiam eſt 15. Ergo $\frac{240}{1Q}$ æquatur

15 & ſit 1 ℞ 4. Ex hac praxi oritur ſecunda pars Canonis poſterioris.

Ex operatione Diophanti elicies hanc effectionem Geometricam: ſit quadratum A æquale rectangulo ex prima & ſecunda in tertiam, quadratum B æquale rectangulo ex ſecunda & tertia in primam, & quadratum C æquale rectangulo ex tertia & prima in ſecundam. Diuidatur quadratum C (per 1 lib. 1. huius) in duo quadrata D & E quorum differentia ſit æqualis differentiæ quadratorum A & B.



Deinde fiat vt quadratum B minus quadrato D ad quadratum D ita quadratum E ad quadratum FG. Tum ſumatur GI æqualis C & ponatur ad angulos rectos cum FG & nectatur FI, diuidaturque bifariam in L vnde educatur perpendicularis LM occurrens FG productæ in M. Ex quo ad interuallum MF vel MI deſcribatur ſemicirculus. Deinde HN æqualis B, ponatur perpendicularis FH & ducatur NO parallela HF donec occurrat peripheria in O, ex quo demittatur OP perpendiculariter. Dico primam ex quæſitis lineis fore PH, ſecundam FG, tertiam GP. Cuius quidem praxeos demonſtrationem facile inueniet ſtudioſus Geometra.

Corollarium.

Hinc Colliges aliquot theoremata: ſi fuerint tres quantitates, quarum binæ coniunctæ in reliquam ductæ faciant tria plana: duo quælibet plana ſimul addita ſuperabunt tertium duplo plano earum duarum quarum ſumma in reliquam ducta fuit. Item, erit vt planum ex prima in ſecundam ad planum ex ſecunda in tertiam, ita planum ex tertia in primam ad quadratum tertiæ. Item, vt planum ex ſecunda in tertiam ad planum ex tertia in primam, ita planum ex prima in ſecundam ad quadratum primæ. Item, vt planum ex tertia in primam ad planum ex prima in ſecundam, ita planum ex ſecunda in tertiam ad quadratum ſecundæ.

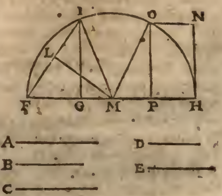
Propoſitio

D E) ad rectangulum ſub ſecunda & tertia (ſeu quadratum F) ita rectangulum ſub tertia & prima (ſeu quadratum G) ad quadratum tertia. Sed factum eſt vt D E ad F, ita G ad H. Igitur erit quoque vt quadratum D E ad quadratum F ita quadratum G ad quadratum H. Igitur (per 9 quinti) quadratum H eſt quadratum tertiæ. Pari modo vt rectangulum ſub ſecunda & tertia ad rectangulum ſub tertia & prima, ita eſt (propter eamdem altitudinem) ſecunda ad primam: item vt rectangulnm ſub prima, & ſecunda ad quadratum primæ, ita eſt (propter eamdem altitudinem ſecunda ad primam: ergo vt rectangulum ſub ſecunda & tertia ad rectangulum ſub tertia & prima, ita eſt rectangulum ſub prima & ſecunda ad quadratum primæ: ſed factum eſt vt F ad G ita D E ad I. Vnde ſequitur earum quadrata eſſe proportionalia. Igitur quoniam quadratum F æquatur rectangulo ſub ſecunda & tertia, & quadratum G rectangulo ſub tertia & prima, & D E quadratum rectangulo ſub prima & ſecunda, erit quadratum I quadratum primæ. Non aliter oſtendetur rectangulum ſub tertia & prima ſeu quadratum G, ad rectangulum ſub prima & ſecunda, ſeu quadratum D E eſſe vt rectangulum ſub ſecunda & tertia ſeu quadratum F ad quadrarum ſecundæ. Ergo quoniam factum eſt vt G ad D E ita F ad L erit quadratum L quadratum ſecundæ (per 9 quinti) Igitur H I L ſunt tres lineæ quæſitæ. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Subtile omninò eſt artificium Diophanti, vt potē qui pēr interualla æqualia perueniat commodè ad duplicatam æqualitatem: mihi tamen totum iſtud negotium paulò altiùs conſideranti occurrit alius modus multo facilior, nec minorem habens ſubtilitatem. Datis enim planis primæ in reliquas 27, ſecundæ in reliquas 32, tertiæ in reliquas 35, inueniantur vt diximus in priori parte poſterioris Canonis plana primæ in ſecundam 12, ſecundæ in tertiam 20, tertiæ in primam 15. Deinde poſita 1 R pro ſecunda erit prima $\frac{12}{1R}$ & tertia $\frac{20}{1R}$ ſed planum primæ in tertiam eſt 15. Ergo $\frac{240}{1Q}$ æquatur

15 & fit 1 R 4. Ex hac praxi oritur ſecunda pars Canonis poſterioris.



Ex operatione Diophanti elicies hanc effectionem Geometricam: ſit quadratum A æquale rectangulo ex prima & ſecunda in tertiam, quadratum B æquale rectangulo ex ſecunda & tertia in primam, & quadratum C æquale rectangulo ex tertia & prima in ſecundam. Diuidatur quadratum C (per 1 lib. 2. huius) in duo quadrata D & E quorum differentia ſit æqualis differentiæ quadratorum A & B. Deinde fiat vt quadratum B minus quadrato D ad quadratum D ita quadratum E ad quadratum F G. Tùm ſumatur G I æqualis C & ponatur ad angulos rectos cum F G & nectatur F I, diuidaturque bifariam in L vnde educatur perpendicularis L M occurrens F G productæ in M. Ex quo ad interuallum M F vel M I deſcribatur ſemicirculus. Deinde H N æqualis B, ponatur perpendicularis F H & ducatur N O parallela H F donec occurrat peripheria in C, ex quo demittatur O P perpendiculariter. Dico primam ex quæſitis lineis fore P H, ſecundam F G, tertiam G P. Cuius quidem praxeos demonſtrationem facile inueniet ſtudioſus Geometra.

Corollarium.

Hinc Colliges aliquot theoremata: ſi fuerint tres quantitates, quarum binæ coniunctæ in reliquam ductæ faciant tria plana: duo quælibet plana ſimul addita ſuperabunt tertium duplo plano earum duarum quarum ſumma in reliquam ducta fuit. Item, erit vt planum ex prima in ſecundam ad planum ex ſecunda in tertiam, ita planum ex tertia in primam ad quadratum tertiæ. Item, vt planum ex ſecunda in tertiam ad planum ex tertia in primam, ita planum ex prima in ſecundam ad quadratum primæ. Item, vt planum ex tertia in primam ad planum ex prima in ſecundam, ita planum ex ſecunda in tertiam ad quadratum ſecundæ.

Propoſitio

PROPOSITIO XXXVII.

Inuenire duas quantitates tales, vt ſi altera ab altera eamdem vel eaſdem partes acceperit, ſumma ad reſiduum ſit in data ratione.

SInt inueniendi duo numeri tali ratione vt primo à ſecundo accipiente eamdem vel eaſdem partes, quas ſecundus accepturus eſt à primo: ſumma ad reſiduum ſit tripla: ſecundo vero accipiente, ſumma ad reſiduum ſit quintupla. Sumatur quilibet numerus pro ſumma duorum quæſitorum, puta 12. Ponaturque primus 1 R. Ergo ſecundus erit 12 — 1 R. Et quoniam primo aſſumente partem ſecundi, ſumma eſt tripla reſidui diuidatur 12 in duos quorum primus ſit triplus ſecundus (id autem fiet per 2. huius) & fient *9.* & *3.* Ergo primus ſumpta parte ſecundi erit *9*. Quare ſi ex *9*. detrahas primum qui eſt poſitus 1 R, pars ſecundi eſt *9* — 1 R. Quia vero ſecundo accipiente eamdem partem à primo, ſumma debet eſſe quintupla, reſidui, diuidendus erit ſimiliter 12 in duos habentes rationem quintuplam nempe in 10 & 2. Igitur vt prius ſecundo accipiente partem primi fiet 10. Qua propter ſi de 10 auferas ſecundum 12 — 1 R reſiduum 1 R — 2 erit pars primi. Oportet ergo vt 1 R — 2 ſit eadem pars de 1 R, quæ *9* — 1 R de 12 -- 1 R. Igitur quatuor illi numeri ſunt proportionales. Ac ideo productus ſub extremis 14 R — 1 Q — 24 æquatur producto ſub mediis *9* R -- 1 Q & fit 1 R æqualis $\frac{24}{5}$ vnde ſecundus erit $\frac{36}{5}$. Et ſine fractionibus duo numeri quæſiti erunt 24 & *36*. Partes accipiendæ ſunt vtrobique $\frac{7}{12}$ quæ reſpectu ſecundi faciunt 21, & reſpectu primi faciunt 14.

Per Algebram ſpecioſam, ſumpta qualibet quantitate pro ſumma duarum quæſitarum B, ponatur A pro prima, ergo B -- A erit ſecunda. Diuidatur B in duas habentes priorem rationem datam ſintque ſegmenta C D. Ergo prima ſumpta parte ſecundæ erit C ac proinde C — A eſt pars ſecundæ. Similiter diuidatur B in duas

habentes poſteriorem rationem datam, & ſint ſegmenta F & G, ergo ſecunda accipiens partem primæ erit F. Ac propterea ſi inde tollas B — A fiet F † A -- B pars accepta primæ. Igitur vt F † A — B ad A, ita C —— A ad B — A ergo productus ſub extremis B F † 2 B A — B A quadr. --- A quadr. --- F A. Æquatur producto ſub mediis C A -- A quadr. Et ſit A æqualis

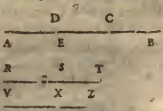
$$\frac{B\ quadr. --- B F.}{2\ B --- C --- F}$$

Hinc Canon.

Cape ad libitum quemcumque numerum pro ſumma duorum quæſitorum. Hunc diuide bis iuxta duas rationes datas. Tùm ex quadrato numeri capti tolle productum ex numero capto in antecedentem ſecundæ rationis reductæ ad partes numeri pro libito capti: reſiduum diuide per duplum numeri capti multatum duobus antecedentibus rationum ad partes numeri diuidendi reductarum, & fiet prima quantitas quæſitæ. Vnde ſecunda non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ duæ lineæ tales vt prima accipiens à ſecunda ſimilem partem quam ſecunda à prima primum aggregatum ſit ad primum reſiduum vt R S ad S T, ſecundum autem aggregatum ſit ad ſecundum reſiduum vt V X ad X Z. Accipiatur quælibet linea A, & ſecetur primò in C taliter vt A C ad C B ſit R S ad S T. Secundo ſecetur in D ea ratione vt ſit B D ad D A ita V X ad X Z: (id autem fiet per ſecundam huius) tùm fiat vt B C plus A D ad A D ita A B ad A E. Dico A E eſſe primam quæſitam & E B ſecundam. Cum enim ſit vt B C plus A D, ad A D ita A B ad B E erit permutando & inuertendo vt tota A B ad totam B C plus A D, ita ablata A E ad ablatum A D. Ergo & reliqua B E ad reliquam B C, vt ablata A E ad ablatam A D. Et permutando vt tota B E ad totam A E ita ablata B C ad ablatam A D, erit & reliqua E C ad reliquam E D vt tota BE ad totam A E. Et permutando vt E C ad B E ita E D ad A E. Igitur cum quatuor iſtæ proportionales erit E C eadem pars B E, qua



PROPOSITIO XXXVII.

Inuenire duas quantitates tales, vt ſi altera ab altera eamdem vel eaſdem partes acceperit, ſumma ad reſiduum ſit in data ratione.

SInt inueniendi duo numeri tali ratione vt primo à ſecundo accipiente eamdem vel eaſdem partes, quas ſecundus accepturus eſt à primo: ſumma ad reſiduum ſit tripla: ſecundo vero accipiente, ſumma ad reſiduum ſit quintupla. Sumatur quilibet numerus pro ſumma duorum quæſitorum, puta 12. Ponaturque primus 1 R. Ergo ſecundus erit 12 — 1 R. Et quoniam primo aſſumente partem ſecundi, ſumma eſt tripla reſidui diuidatur 12 in duos quorum primus ſit triplus ſecundus (id autem fiet per 2. huius) & fient 9. & 3. Ergo primus ſumpta parte ſecundi erit 9. Quare ſi ex 9. detrahas primum qui eſt poſitus 1 R, pars ſecundi eſt 9 — 1 R. Quia vero ſecundo accipiente eamdem partem à primo, ſumma debet eſſe quintupla, reſidui, diuidendus erit ſimiliter 12 in duos habentes rationem quintuplam nempe in 10 & 2. Igitur vt prius ſecundo accipiente partem primi fiet 10. Qua propter ſi de 10 auferas ſecundum 12 — 1 R reſiduum 1 R — 2 erit pars primi. Oportet ergo vt 1 R — 2 ſit eadem pars de 1 R, quæ 9 — 1 R de 12 -- 1 R. Igitur quatuor illi numeri ſunt proportionales. Ac ideo productus ſub extremis 14 R — 1 Q — 24 æquatur producto ſub mediis 9 R -- 1 Q & ſit 1 R æqualis $\frac{24}{5}$ vnde ſecundus erit $\frac{36}{5}$. Et ſine fractionibus duo numeri quæſiti erunt 24 & 36. Partes accipiendæ ſunt vtrobique $\frac{7}{12}$ quæ reſpectu ſecundi faciunt 21, & reſpectu primi faciunt 14.

Per Algebram ſpecioſam, ſumpta qualibet quantitate pro ſumma duarum quæſitarum B, ponatur A pro prima, ergo B -- A erit ſecunda. Diuidatur B in duas habentes priorem rationem datam ſintque ſegmenta C D. Ergo prima ſumpta parte ſecundæ erit C ac proinde C — A eſt pars ſecundæ. Similiter diuidatur B in duas

habentes poſteriorem rationem datam, & fiunt ſegmenta F & G, ergo ſecunda accipiens partem primæ erit F. Ac propterea ſi inde tollas B — A fiet F † A -- B pars accepta primæ. Igitur vt F † A — B ad A, ita C —— A ad B — A ergo productus ſub extremis B F † a B A — B A quadr. --- A quadr. --- F A. Æquatur producto ſub mediis C A -- A quadr. Et fit A æqualis B quadr. --- B F.

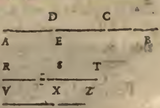
2 B --- C --- F

Hinc Canon.

Cape ad libitum quemcumque numerum pro ſumma duorum quæſitorum. Hunc diuide bis iuxta duas rationes datas. Tùm ex quadrato numeri capti tolle productum ex numero capto in antecedentem ſecundæ rationis reductæ ad partes numeri pro libito capti: reſiduum diuide per duplum numeri capti mulctatum duobus antecedentibus rationum ad partes numeri diuidendi reductarum, & fiet prima quantitas quæſitæ. Vnde ſecunda non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sint inueniendæ duæ lineæ tales vt prima accipiens à ſecunda ſimilem partem quam ſecunda à prima primum aggregatum ſit ad primum reſiduum vt R S ad S T, ſecundum autem aggregatum ſit ad ſecundum reſiduum vt V X ad X Z. Accipiatur quælibet linea A, & ſecetur primò in C taliter vt A C ad C B ſit R S ad S T. Secundo ſecetur in D ea



ratione vt fit B D ad D A ita V X ad X Z: (id autem fiet per ſecundam huius) tùm fiat vt B C plus A D ad A D ita A B ad A E. Dico A E eſſe primam quæſitam & E B ſecundam. Cum enim ſit vt B C plus A D, ad A D ita A B ad B E erit permutando & inuertendo vt tota A B ad totam B C plus A D, ita ablata A E ad ablatum A D. Ergo & reliqua B E ad reliquam B C, vt ablata A E ad ablatam A D. Et permutando vt tota B E ad totam A E ita ablata B C ad ablatam A D, erit & reliqua E C ad reliquam E D vt tota B E ad totam A E. Et permutando vt E C ad B E ita E D ad A E. Igitur cum quatuor iſtæ proportionales erit E C eadem pars B E, qua

E D eſt ipſius A E. Sed addendo E C ad A E fit ſumma A C ad reſiduum B C in ratione R S ad S T (factum eſt enim vt R S ad S T ita A C ad C B) & addendo E D ad B E, fit ſumma B D ad reſiduum A D vt V X ad X Z (eſt enim factum vt V X ad X Z ita B D ad A D) ergo inuentæ ſunt duæ lineæ A E & E B tales vt ſi altera ab altera accipiat eaſdem partes ſumma, ad reſiduum eſt in in data ratione, quod erat demonſtrandum.

Propositio XXXVIII.

Datis tribus quadratis, inuenire tres quantitates quarum mutuo ductu producantur illa tria quadrata.

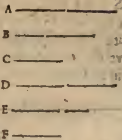
Sint dati 4. 9. 16. ponaturque vnus quæſitorum numerorum 1 R erit reliquorum duorum alter $\frac{4}{1R}$ & alter $\frac{9}{1R}$. Reſtat igitur vt ſecundus in tertium producat 16. At producit $\frac{36}{1Q}$. Ergo ille productus æquatur 16. Et ita 1 R fit æqualis $\frac{3}{2}$. Secundus erit 6 & tertius $\frac{8}{3}$.

Per Algebram ſpecioſam, datis B, C, D. Ponatur primus A ergo ſecundus erit $\frac{B}{A}$ & tertius $\frac{C}{A}$. Igitur productus ſecundi in tertium $\frac{BC}{A\ quadr.}$ æquatur D. Ac proinde A quadratum æquatur $\frac{BC}{D}$.

Hinc Canon.

Duos ex datis numeris multiplica inter ſe, & productum diuide per reliquum: habebiſque e tribus diuerſis operationibus tres numeros quorum radices ſunt numeri quæſiti.

Hinc Effectio Geometrica.



Data ſunt tria quadrata A,B,C, & oporteat inuenire tres lineas quarum vna cum altera faciant rectangula tria prædictis tribus quadratis æqualia. Fiat vt C ad B ita A ad D. Item vt B ad A ita C ad E. Et tandem vt A ad C ita B ad F. Dico tres lineas D E F eſſe quæſitas. Cum enim ſit vt C ad B ita A ad D, inuertendo erit vt B ad C, ita D ad A. Sed factum eſt vt B ad A ita C ad E, ergo permutando vt B ad C ita A ad E. Igitur vt D ad A ita A ad E. Ac proinde rectangulum ſub D & E æquatur quadrato A. Similiter quoniam eſt vt D ad A ita B ad C erit permutando vt D ad B ita A ad C. Sed factum eſt vt A ad C ita B ad F. Igitur vt D ad B ita B ad F. Ergo rectangulo ſub D & F eſt æquale quadrato B. Denique quia eſt vt B ad A ita C ad E, erit inuertendo vt A ad B ita E ad C. Sed factum eſt vt A ad C ita B ad F. Igitur permutando, vt A ad B ita C ad F. Ergo vt E ad C ita C ad F. Ac proinde rectangulum ſub E & F æquatur quadrato C. igitur tres lineæ inuentæ D E F tribus diuerſis complicationibus faciunt tria rectangula tribus datis quadratis A B C æqualia. Quod erat demonſtrandum.

ED eſt ipſius AE. Sed addendo EC ad AE fit ſumma AC ad reſiduum BC in ratione RS ad ST (factum eſt enim vt RS ad ST ita AC ad CB) & addendo ED ad BE, fit ſumma BD ad reſiduum AD vt VX ad XZ (eſt enim factum vt VX ad XZ ita BD ad AD) ergo inuentæ ſunt duæ lineæ AE & EB tales vt ſi altera ab altera accipiat eaſdem partes ſumma, ad reſiduum eſt in in data ratione, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Datis tribus quadratis, inuenire tres quantitates quarum mutuo ductu producantur illa tria quadrata.

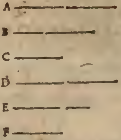
SInt dati 4. 9. 16. ponaturque vnus quæſitorum numerorum 1 R erit reliquorum duorum alter $\frac{4}{1R}$ & alter $\frac{9}{1R}$. Reſtat igitur vt ſecundus in tertium producat 16. At producit $\frac{36}{1Q}$. Ergo ille productus æquatur 16. Et ita 1 R fit æqualis $\frac{3}{2}$. Secundus erit 6 & tertius $\frac{8}{3}$.

Per Algebram ſpecioſam, datis B, C, D. Ponatur primus A ergo ſecundus erit $\frac{B}{A}$ & tertius $\frac{C}{A}$. Igitur productus ſecundi in tertium $\frac{BC}{A\ quadr.}$ æquatur D. Ac proinde A quadratum æquatur $\frac{BC}{D}$.

Hinc Canon.

Duos ex datis numeris multiplica inter ſe, & productum diuide per reliquum: habebiſque e tribus diuerſis operationibus tres numeros quorum radices ſunt numeri quæſiti.

Hinc Effectio Geometrica.



Data ſunt tria quadrata A, B, C, & oporteat inuenire tres lineas quarum vna cum altera faciant rectangula tria prædictis tribus quadratis æqualia. Fiat vt C ad B ita A ad D. Item vt B ad A ita C ad E. Et tandem vt A ad C ita B ad F. Dico tres lineas D E F eſſe quæſitas. Cum enim ſit vt C ad B ita A ad D, inuertendo erit vt B ad C, ita D ad A. Sed factum eſt vt B ad A ita C ad E, ergo permutando vt B ad C ita A ad E. Igitur vt D ad A ita A ad E. Ac proinde rectangulum ſub D & E æquatur quadrato A. Similiter quoniam eſt vt D ad A ita B ad C erit permutando vt D ad B ita A ad C. Sed factum eſt vt A ad C ita B ad F. Igitur vt D ad B ita B ad F. Ergo rectangulo ſub D & F eſt æquale quadrato B. Denique quia eſt vt B ad A ita C ad E, erit inuertendo vt A ad B ita E ad C. Sed factum eſt vt A ad C ita B ad F. Igitur permutando, vt A ad B ita C ad F. Ergo vt E ad C ita C ad F. Ac proinde rectangulum ſub E & F æquatur quadrato C. igitur tres lineæ inuentæ D E F tribus diuerſis complicationibus faciunt tria rectangula tribus datis quadratis A B C æqualia. Quod erat demonſtrandum.

APPENDIX.

CONTINENS OMNES QVÆSTIONES Diophanti quæ Geometricè maxima cum facilitate fieri poſſunt.

PROPOSITIO I.

Datum quadratum diuidere in duos quadratos.

DETVR 16 diuidendus in duos numeros quadratos. Ponatur primus 1 Q ergo alter erit 16 — 1 Q, qui propterea debet æquari quadrato. Finge latus eſſe quotlibet radices minus latere quadrati diuidendi, nempe 2 R — 4. Huius igitur quadratum 4 Q + 16 — 16 R erit æquale 16 — 1 Q. Ergo 1 R eſt $\frac{16}{5}$. Et duo numeri quadrati quæſiti facientes 16 ſunt $\frac{256}{25}$ & $\frac{144}{25}$.

Geometricè res faciliſſima eſt, nam ſi ſuper latus quadrati diuidendi fiat ſemicirculus, & ab extremitatibus huius lateris ducantur duæ lineæ ad quodlibet punctum peripheriæ, factum erit quod quæritur propter 31 tertii, & 47. primi Euclidis.

Propositio II.

Datam quantitatem ex duobus quadratis compoſitam, diuidere in alia duo quadrata.

Eſto datus numerus 13 compoſitus ex duobus quadratis 4 & 9 quorum latera ſunt 2 & 3. Ponatur autem latus primi quadrati quæſitis 1 R † 2 (2 eſt latus. Primi quadrati dati) alteriùs autem quadrati latus ſint quotcumque radices minus latere ſecundi quadrati dati, nempe 2 R -- 3. Horum quadrata ſunt 1 Q † 4 † 4 R & 4 Q † 9 --- 12 R. Quorum ſumma 5 Q † 13 -- 8 R debet æquari 13. & fit 1 R æqualis $\frac{8}{5}$ vnde quadrati quæſiti non latebunt $\frac{324}{25}$ & $\frac{1}{25}$ quorum ſumma 13.

Geometricè, ſuper latere dati quadrati fiat ſemicirculus & ab extremitate lateris inſcribatur ſemicirculo quælibet linea lateribus duorum quadratorum datorum inæqualis, punctum illud cum altera extremitate diametri connexum dabit duo quadrata quæſita. Per 31 tertii, & 47 primi Euclidis.

Propositio III.

Inuenire duas quadratas quantitates in dato interuallo.

Sit datum interuallum 60. Ponatur autem latus primi quadrati inueniendi 1 R alterius latus ſit 1 R † 3 (aduerte poſſe poni quemlibet numerum cuius quadratum non ſuperet interuallum datum) horum quadratorum differentia 9 † 6 R debet æquari 60. Ergo 1 R eſt æqualis $\frac{17}{2}$ vnde quadrati quæſiti ſunt $\frac{289}{4}$ & $\frac{529}{4}$.

Geometricè, interuallum quadratorum ſit æquale quadrato alicuius lineæ quæ cum altera quacumque linea coniungatur ad

APPENDIX.

CONTINENS OMNES QVÆSTIONES Diophanti quæ Geometricè maxima cum facilitate fieri poſſunt.

Propositio I.

Datum quadratum diuidere in duos quadratos.

DETVR 16 diuidendus in duos numeros quadratos. Ponatur primus 1 Q ergo alter erit 16 — 1 Q, qui propterea debet æquari quadrato. Finge latus eſſe quotlibet radices minus latere quadrati diuidendi, nempe 2 R — 4. Huius igitur quadratum 4 Q † 16 — 16 R erit æquale 16 — 1 Q. Ergo 1 R eſt $\frac{16}{5}$. Et duo numeri quadrati quæſiti facientes 16 ſunt $\frac{256}{25}$ & $\frac{144}{25}$.

Geometricè res facillima eſt, nam ſi ſuper latus quadrati diuidendi fiat ſemicirculus, & ab extremitatibus huius lateris ducantur duæ lineæ ad quodlibet punctum peripheriæ, factum erit quod quæritur propter 31 tertii, & 47. primi Euclidis.

PROPOSITIO II.

Datam quantitatem ex duobus quadratis compoſitam , diuidere in alia duo quadrata.

ESto datus numerus 13 compoſitus ex duobus quadratis 4 & 9 quorum latera ſunt 2 & 3. Ponatur autem latus primi quadrati quæſitis 1 R † 2 (2 eſt latus. Primi quadrati dati) alteriùs autem quadrati latus ſint quotcumque radices minus latere ſecundi quadrati dati, nempe 2 R -- 3. Horum quadrata ſunt 1 Q † 4 † 4 R & 4 Q † 9 --- 12 R. Quorum ſumma 5 Q † 13 -- 8 R debet æquari 13. & fit 1 R æqualis $\frac{8}{5}$ vnde quadrati quæſiti non latebunt $\frac{324}{25}$ & $\frac{1}{25}$ quorum ſumma 13.

Geometricè, ſuper latere dati quadrati fiat ſemicirculus & ab extremitate lateris inſcribatur ſemicirculo quælibet linea lateribus duorum quadratorum datorum inæqualis, punctum illud cum altera extremitate diametri connexum dabit duo quadrata quæſita. Per 31 tertii, & 47 primi Euclidis.

PROPOSITIO III.

Inuenire duas quadratas quantitates in dato interuallo.

SIt datum interuallum 60. Ponatur autem latus primi quadrati inueniendi 1 R alterius latus ſit 1 R † 3 (aduerte poſſe poni quemlibet numerum cuius quadratum non ſuperet interuallum datum) horum quadratorum differentia 9 + 6 R debet æquari 60. Ergo 1 R eſt æqualis $\frac{17}{2}$ vnde quadrati quæſiti ſunt $\frac{289}{4}$ & $\frac{529}{4}$.

Geometricè, interuallum quadratorum ſit æquale quadrato alicuius lineæ quæ cum altera quacumque linea coniungatur ad

angulos rectos : Harum hypothenuſæ quadratum & lineæ coniunctæ quadratum, erunt duo quadrata quæſita per 47 primi.

PROPOSITIO IV.

Datis duabus quantitatibus addere eamdem quantitatem, ita vt ſumma facta ſint quadrata.

SInt dati numeri 2 & 3. Ponatur autem quantitas addenda 1 Q -- 2 (vt addendo illam ad 2 fiat quadratum nempe 1 Q) ſupereſt ergo vt illam addendo 3 fiat etiam quadratum, ſit vero 1 Q † 1 igitur 1 Q † 1 æquatur quadrato. Fingo latus huius quadrati ab 1 R minus aliquot vnitatibus vt reſoluta quæſtione 1 Q. ſuperet primum numerum datum 2. Sit ergo latus quadrati iſtius 1 R --- 4. Huius quadratum 1 Q † 16 -- 8 R æquari debet 1 Q † 1. Et fit 1 R æqualis $\frac{15}{8}$.

vnde quantitas addenda eſt $\frac{97}{64}$.

Geometricè, datis duabus lineis iungatur ad angulos rectos quæpiam linea certa, & nectatur hypothenuſa, & fiet propoſitum. Per 47 primi.

PROPOSITIO V.

A datis duabus quantitatibus auferre eamdem quantitatem, ita vt reſidua ſint quadrata.

POſtuletur vt a 9 & 21 tollatur idem numerus, & relicti ſint quadrati. Eſto quantitas auferenda 9 -- 1 Q (vt tollendo eam ex 9 fiat quadratum, nempe 1 Q) ſupereſt igitur vt tollendo eam a 21 reſtet quadratum : reſtat autem 1 Q † 12. Igitur 1 Q † 12 æquatur quadrato. Fingo huius quadrati latus eſſe 1 R cum defectu alicuius numeri, cuius quadratum maius ſit 12, erit ergo illud latus verbi gratia 1 R ---- 4, cuius quadratum 1 Q † 16 --- 8R æquatur

I Q † 12 igitur I R æquatur $\frac{1}{2}$ vnde quantitas auferenda eſt $\frac{35}{4}$ quæ ſi tollatur a 9 & 21 reſtant duo numeri quadrati.

Geometricè, ſuper lateribus duorum quadratorum datorum, fiant duo ſemicirculi, in quibus ab extremitate inſcribatur eadem linea, connexarum ad alteram extremitatem quadrata erunt quæ poſtulantur. Per 31 tertii & 47 primi.

Propositio VI.

Ab eadem quantitate auferre duas datas quantitates ita vt reſidua ſint quadrata.

Sint datæ quantitates auferendæ 6 & 7. Ponatur autem quantitas ea qua debet fieri ſubtractio I Q † 6 (vt auferendo 6 relinquatur quadratum nempe I Q) ſupereſt ergo vt ab eadem tollendo 7, reſtet quoque quadratum. At reſtat I Q -- I, quod propterea debet æquari quadrato. Fingo huius quadrati latus I R -- 2, cuius quadratum I Q † 4 —— 4 R æquari debet I Q -- I Igitur I R eſt æqualis $\frac{5}{4}$ vnde quantitas à qua debet fieri ſubtractio eſt $\frac{121}{16}$. Inde enim ſi tollas 6 & 7 reſtant duo numeri quadrati.

Geometricè, ſuper latere quocumque maiore lateribus quadratorum datorum fiat ſemicirculus in quo inſcribantur latera quadratorum datorum, & duarum connexarum quadrata erunt illa quæ quæruntur. Per 31 tertii & 47 primi.

Propositio VII.

Datam quantitatem diuidere in tres, quarum qualibet vbi proximè ſequenti dederit partem ſui, quæ imperatur, & præterea datam quantitatem, fiat æqualitas.

Sit numerus 80 diuidendus in tres, ita vt primus ſecundo det ſui quintantem, & præterea 6: ſecundus tertio ſextantem ſui, & inſuper

angulos rectos : Harum hypothenuſæ quadratum & lineæ coniunctæ quadratum, erunt duo quadrata quæſita per 47 primi.

PROPOSITIO IV.

Datis duabus quantitatibus addere eamdem quantitatem, ita vt ſumma facta ſint quadrata.

SInt dati numeri *2* & *3*. Ponatur autem quantitas addenda I Q -- 2 (vt addendo illam ad 2 fiat quadratum nempe I Q) ſupereſt ergo vt illam addendo *3* fiat etiam quadratum, ſit vero I Q † I igitur I Q † I æquatur quadrato. Fingo latus huius quadrati ab I R minus aliquot vnitatibus vt reſoluta quæſtione I Q ſuperet primum numerum datum 2. Sit ergo latus quadrati iſtius I R — 4. Huius quadratum I Q † 16 -- 8 R æquari debet I Q † I. Et fit I R æqualis $\frac{15}{8}$, vnde quantitas addenda eſt $\frac{97}{64}$.

Geometricè, datis duabus lineis iungatur ad angulos rectos quæpiam linea certa, & nectatur hypothenuſa, & fiet propoſitum. Per 47 primi.

PROPOSITIO V.

A datis duabus quantitatibus auferre eamdem quantitatem, ita vt reſidua ſint quadrata.

POſtuletur vt a *9* & *21* tollatur idem numerus, & relicti ſint quadrati. Eſto quantitas auferenda *9* -- I Q (vt tollendo eam ex *9* fiat quadratum, nempe I Q) ſupereſt igitur vt tollendo eam a 21 reſtet quadratum : reſtat autem I Q † 12. Igitur I Q † 12 æquatur quadrato. Fingo huius quadrati latus eſſe I R cum defectu alicuius numeri, cuius quadratum maius ſit 12, erit ergo illud latus verbi gratia I R —— 4, cuius quadratum I Q † *16* --- 8R æquatur

inſuper 7: tertius primo ſui ſeptantem & 8: ac poſt mutuam contributionem, fiant æquales. Ponatur primus 5 R & ſecundus 12. Igitur ſi ſecundus accipiat à primo quintantem & 6, fit 1 R † 18. Dans autem idem ſecundus tertio ſextantem ſui & præterea 7, relinquitur 1 R † 9. Sed primo dante ſui quintantem & 6, reſtat 4 R — 6. Oportet ergo vt accipiens ſeptantem tertii & 8, fiant iterum 1 R † 9. (Hic enim eſt numerus in quo debet fieri æqualitas, vt patet ex prima operatione) at ſi 4 R -- 6 accipiat 15 -- 3 R fit 1 R † 9. Igitur 15 -- 3 R æquatur ſeptanti tertii & 8. Quamobrem ſi ex 15 -- 3 R tollantur 8, remanebit ſeptans tertii 7 — 3 R. Ergo tertius eſt 49 -- 21 R. Ac proinde hic accipiens ſextantem ſecundi & 7, dans autem primo ſui ſeptantem & 8, debet fieri 1 R † 9. Sed iis datis & acceptis fit 43 -- 18 R. Hic ergo numerus æquatur 1 R † 9 Et fit 1 R æqualis $\frac{34}{19}$. Vnde reliqui non latebunt.

Geometricè, diuidatur linea data ſecundum proportionem numerorum inuentorum per 10 ſexti Euclidis. Et abſolutum erit problema. Vide 32. lib. primi, quæ eſt 18. lib. 2 Diophant.

PROPOSITIO VIII.

Inuenire tria quadrata vt interuallum maximi & medii ad interuallum medii & minimi datam habeat rationem.

SIt data ratio 3 ad 1. Ponatur autem minor quadratus 1 Q, & medius 1 Q † 1 † 2 R horum interuallum eſt 1 † 2 R cuius triplum 3 † 6 R ſi addatur medio, fiet maior 1 Q † 4 † 8 R qui debet æquari quadrato. Fingo eius latus ab 1 R plus aliquo numero ex quo procreatus quadratus, numeri & radices ita ſe habeant vt ſi vna ſpecies excedat ſimilem in 4 † 8 R exiſtentem altera deficiat. Eſto itaque 1 R † 3 huius quadratum 1 Q † 9 † 6 R debet æquari 1 Q † 4 † 8 R. Igitur 1 R eſt $\frac{5}{2}$ vnde tres quæſiti non latebunt.

Geometricè, inter datas duas lineas proportionem exhibentes ſu-

matur media proportionalis. Tum harum trium minor iungatur ad angulos rectos cum qualibet linea & connectantur & hinc connexa iungatur media inuenta ad angulos rectos & connectantur. Duarum connexarum quadrata cum quadrato illius quæ ad libitum electa fuit ſunt tria quæſita per 47 primi & 17 ſexti.

PROPOSITIO IX.

Inuenire tres quantitates quadrato æquales, quarum binæ reliquam ſuperent quadrato.

CApe primum duos quadratos ad libitum 4 & 9. Tum (per propoſ. 3 huius) quære duos quadratos differentes ſumma duorum prædictorum quadratorum 13. Sunt illi 36 & 49. Minorem horum ſi iungas cum prioribus fiet quadratus numerus 49. Iam ergo (per 18 libri primi) inueniantur tres numeri tales, vt primus & ſecundus tertium ſuperent per 9, tertius autem & primus ſecundum per 36. Et fient tres quæſiti 26 13. 45.

1 2

Geometrice, capiantur tres lineæ ad libitum, duarum quarumlibet quadrata ſimul iuncta per 47 primi, dabunt lineam, ſuper qua ſi fiat ſemicirculus, & in eo inſcribatur reliqua linea, ea quæ connectetur, dabit quadratum, quod eſt differentia quæſita.

PROPOSITIO X.

Inuenire tres quantitates æquales quadrato vt bini iuncti faciant quadratum.

POnantur tres ſimul æquales quadrato 1 Q † 2 R † 1, & ſit primus cum ſecundo 1 Q. Ergo tertius eſt 2 R † 1. Eſt autem ſecundus cum tertio 1 Q † 1 --- 2 R à latere 1 R --- 1, igitur quoniam cum tertio 1 Q † 2 R † 1, erit primus 4 R. Sed primus poſitus eſt cum ſecundo 1 Q. Ergo 1 Q --- 4 R eſt ſecundus. Igitur 6 R † 1

inſuper 7: tertius primo ſui ſeptantem & 8: ac poſt mutuam contributionem, fiant æquales. Ponatur primus 5 R & ſecundus 12. Igitur ſi ſecundus accipiat à primo quintantem & 6, fit 1 R † 18. Dans autem idem ſecundus tertio ſextantem ſui & præterea 7, relinquitur 1 R † 9. Sed primo dante ſui quintantem & 6, reſtat 4 R — 6. Oportet ergo vt accipiens ſeptantem tertii & 8, fiant iterùm 1 R † 9. (Hic enim eſt numerus in quo debet fieri æqualitas, vt patet ex prima operatione) at ſi 4 R -- 6 accipiat 15 -- 3 R fit 1 R † 9. Igitur 15 -- 3 R æquatur ſeptanti tertii & 8. Quamobrem ſi ex 15 -- 3 R tollantur 8, remanebit ſeptans tertii 7 — 3 R. Ergo tertius eſt 49 -- 21 R. Ac proinde hic accipiens ſextantem ſecundi & 7, dans autem primo ſui ſeptantem & 8, debet fieri 1 R † 9. Sed iis datis & acceptis fit 43 -- 18 R. Hic ergo numerus æquatur 1 R † 9 Et fit 1 R æqualis $\frac{34}{19}$. Vnde reliqui non latebunt.

Geometricè, diuidatur linea data ſecundum proportionem numerorum inuentorum per 10 ſexti Euclidis. Et abſolutum erit problema. Vide 32. lib. primi, quæ eſt 18. lib. 2 Diophant.

PROPOSITIO VIII.

Inuenire tria quadrata vt interuallum maximi & medii ad interuallum medii & minimi datam habeat rationem.

SIt data ratio 3 ad 1. Ponatur autem minor quadratus 1 Q, & medius 1 Q † 1 † 2 R horum interuallum eſt 1 † 2 R cuius triplum 3 † 6 R ſi addatur medio, fiet maior 1 Q † 4 † 8 R qui debet æquari quadrato. Fingo eius latus ab 1 R plus aliquo numero ex quo procreatus quadratus, numeri & radices ita ſe habeant vt ſi vna ſpecies excedat ſimilem in 4 † 8 R exiſtentem altera deficiat. Eſto itaque 1 R † 3 huius quadratum 1 Q † 9 † 6 R debet æquari 1 Q † 4 † 8 R. Igitur 1 R eſt $\frac{5}{2}$ vnde tres quæſiti non latebunt.

Geometricè, inter datas duas lineas proportionem exhibentes ſu-

matur media proportionalis. Tum harum trium minor iungatur ad angulos rectos cum qualibet linea & connectantur & hinc connexa iungatur media inuenta ad angulos rectos & connectantur. Duarum connexarum quadrata cum quadrato illius quæ ad libitum electa fuit ſunt tria quæſita per 47 primi & 17 ſexti.

PROPOSITIO IX.

Inuenire tres quantitates quadrato æquales, quarum binæ reliquam ſuperent quadrato.

CApe primum duos quadratos ad libitum 4 & 9. Tum (per propoſ. 3 huius) quære duos quadratos differentes ſumma duorum prædictorum quadratorum 13. Sunt illi 36 & 49. Minorem horum ſi iungas cum prioribus fiet quadratus numerus 49. Iam ergo (per 18 libri primi) inueniantur tres numeri tales, vt primus & ſecundus tertium ſuperent per 9, tertius autem & primus ſecundum per 36. Et fient tres quæſiti 20 13. 45.

Geometricè, capiantur tres lineæ ad libitum, duarum quarumlibet quadrata ſimul iuncta per 47 primi, dabunt lineam, ſuper qua ſi fiat ſemicirculus, & in eo inſcribatur reliqua linea, ea quæ connectetur, dabit quadratum, quod eſt differentia quæſita.

PROPOSITIO X.

Inuenire tres quantitates æquales quadrato vt bini iuncti faciant quadratum.

POnantur tres ſimul æquales quadrato 1 Q † 2 R † 1, & ſit primus cum ſecundo 1 Q. Ergo tertius eſt 2 R † I. Eſt autem ſecundus cum tertio 1 Q † I --- 2 R à latere 1 R—I, igitur quoniam cum tertio 1 Q † 2 R † I, erit primus 4 R. Sed primus poſitus eſt cum ſecundo 1 Q. Ergo 1 Q — 4 R eſt ſecundus. Igitur 6 R † I

èſt ſumma primi & tertii. Quare hæc ſumma æquari debet quadrato. Sit 15 121. Ergo I R eſt 20 vnde tres numeri 80 primus, 320 ſecundus, 41 tertius.

Geometricè, tres quæcumque lineæ ad libitum electæ exhibent quadrata quæſita per 47 primi.

PROPOSITIO XI.

Inuenire tres quantitates in interuallo æquali vt bini iuncti faciant quadratum.

QVæro primùm tres quadratos numeros Arithmeticè proportionales quorum ſummæ ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum. Ponatur primus I Q, & ſecundus I Q † 2 R † I, quorum interuallum 2 R † I additus ſecundo exhibet tertium I Q † 4 R † 2, qui proinde debet æquari quadrato. Fingo eius latus I R — 8. Igitur eius quadratum I Q † 64 — 16 R æquatur I Q † 4 R † 2. Et fit I R æqualis $\frac{31}{10}$. Et neglecto denominatore tres numeri quadrati 961 & 1681 & 2401 ſatisfaciunt propoſito.

Iam venio ad primariam quæſtionem, & aſſumpto numero 961 pro ſumma primi & ſecundi, pono tres ſimul eſſe I R ergo tertius erit I R — 961 & aſſumpto 2401 pro ſumma ſecundi & tertii (debet enim inuerti ordo ob interualli æqualitatem erit primus I R --- 2401. Et ſublata ſumma tertii & primi 1681 ab I R fiet ſecundus I R -- 1681. Reſtat ergo vt tres ſimul iuncti ſeu 3R -- 5043 æquantur I R & fit I R æqualis $\frac{5043}{2}$ vnde primus qui inuentus eſt I R — 2401 erit $\frac{241}{2}$ ſecundus $\frac{1681}{2}$ & tertius $\frac{3121}{2}$.

Geometricè, ſumantur ad libitum lineæ duæ inæquales quarum maior non poſſit duplum minoris, & ſuper maiore facto ſemicirculo inſcribatur minor, & connectantur, connexaque inſcribatur ſemicirculo facto ſuper minore & connectantur. Quadratum po-

ſterioris iſtius connexæ cum quadratis duarum pro libito ſumptarum erunt illa quæ inquiruntur.

Propositio XII.

Data aliqua quantitate, inuenire tres alias vt compoſita ex binis quibuslibet, aſſumpta data faciat quadratum, & inſuper ſumma trium adiecta illa quæ data fuit quadratum efficiat.

ESto datus numerus 3, & ponatur compoſitus ex primo & ſecundo 1 Q † 4 R † 1 vt aſſumpto 3 fiat quadratum 1 Q † 4 R † 4 à latere 1 R † 2. Deinde ſecundus & tertius ſimul ſint 1 Q † 6 R † 6 tres autem ſimul 1 Q † 8 R † 13, vt hi aſſumpto faciant quadratum, & quia trium ſumma eſt 1 Q † 8 R † 13, primus autem & ſecundus 1 Q † 4 R † 1, erit tertius 4 R † 12, & propter eamdem rationem cum ſumma ſecundi & tertii ſit 1 Q † 6 R † 6, erit primus 2 R † 7. Ergo habetur ſumma primi & tertii 6 R † 19 igitur ſecundus eſt 1 Q † 2 R † 6. Supereſt itaque vt ſumma primi & tertii aſſumpto 3 ſeu 6 R † 22 æquentur quadrato, ſit illud quadratum 100, fiet 1 R æqualis 13. Ergo primus erit 33, ſecundus 189, tertius 64.

Geometricè, aſſumantur tres lineæ pro libito, & duæ quælibet iungantur ad angulos rectos. & connexæ data iungatur quoque perpendiculariter, tùm iunctis tribus per additionem addatur quadratum datæ, habebiturque propoſitum. Per 47 primi Euclidis.

Propositio XIII.

Data aliqua quantitate, inuenire tres alias vt compoſita ex duabus quibuslibet, dempta data, faciat quadratum, & inſuper trium ſumma, detrahendo datam, faciat quadratum.

DEtur iterum numerus 3, & ponatur ex duobus primis compoſitus 1 Q † 3, vt detracto 3, fiat quadratum. Summa ſecundi & tertii ponatur ob eamdem rationem 1 Q † 2 R † 4. Trium

verò

vero ſumma I Q † 4 R † 7, vt ſemper dedracto 3 quadratum efficiatur. Et quia ſumma trium eſt I Q † 4 R † 7 & ſumma primi & ſecundi I Q † 3, fiet tertius 4 R † 4. Similiter quoniam ſumma ſecundi & tertij eſt I Q † 2 R † 4, reſtabit primus 2 R † 3. Rurſus quia tertius eſt 4 R † 4 & ſumma ſecundi & tertij I Q † 2 R † 4, erit ſecundus I Q -- 2 R, ſupereſt ergo vt ſumma primi & tertij detractis 3 faciat quadratum. Igitur 6 R † 4 facit quadratum. Sit illud quadratum 64, & fiet I R æqualis 10. Primuſque numerus erit 23, ſecundus 80, tertius 44.

Geometricè, Tres quælibet lineæ pro libito ſumptæ ſoluent problema modo quadrata duarum ex illis majora ſint quadrato datæ lineæ. Id autem fiet partim per angulum rectum qui quadratorum additioni inſerunt, partim per inſcriptionem linearum in ſemicirculo quæ quadratorum ſubſtractionem methodum præbet per 47 primi & 31 tertij.

PROPOSITIO XIV.

Inuenire tres quantitates vt quam binæ mutuo ductu producunt, illa adſcita data quantitate faciat quadratum.

DEtur numerus 20, ſumaturque aliquis numerus quadratus (per 3 huius ſeu per 11. l. 2 Dioph.) qui cum 20 faciat quadratum nempe 16. Tùm ponantur primus & ſecundus quæſitus duo quilibet numeri mutuo ductu facientes 16, puta 8 & 2. Deinde pro tertio ponatur certus quadratorum numerus qui ductus in ſecundum 2 efficiat quadratum vt 2 Q vel 8 Q vel 32 Q, & adiiciatur & defectus alicuius numeri qui ductus in 2 faciat 20. Sit itaque tertius 2 Q -- 10, qui ductus in 2 facit 4 Q — 20, cui addendo numerum datum 20 fit quadratus 4 Q. Quare reſtat vt productus ex primo in tertio adſcito 20 faciat quadratum. Facit autem 16 Q — 60. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo eius latus 4 R — 2. Huius quadratum 16 Q † 4 -- 16 R æquatur 16 Q — 60. Et fit I R æqualis 4. Vnde tres numeri quæſiti ſunt 8. 2. 22.

Geometricè, ſumantur tres lineæ quælibet, & mediæ proportio-

nales inter eas iungantur ad angulos rectos ſigillatim cum latere quadrati dati, lineæ connexæ dabunt latera quadratorum per 17 ſexti & 47 primi.

Propositio XV.

Inuenire tres quantitates, & quam binæ mutuo ductu efficiunt, hæc multata data quantitate faciat quadratum.

ESto datus numerus 20, & quæratur ſtatim (per 3 huius) quadratus numerus à quo auferendo 20 reſtet quadratus, ſitque 36. Ponaturque pro primo & ſecundo quæſitorum numerorum, duo quilibet mutuo ductu producentes 36, puta 9 & 4. Tùm ponatur tertius quilibet quadratorum numerus, qui ductus in ſecundum 4, faciat quadratum, vt 1 Q. Illique addantur aliquot vnitates quæ ductæ in eundem 4 faciant numerum datum 20, ſeu vt paucis dicam, ſit 1 Q † S tertius. Cum itaque hoc modo ſatiſfiat duabus conditionibus quæſtionis, reſtat vt productus ex primo in tertium detracto 20, faciat quadratum. Facit vero 9 Q † 25. Qui proinde æquari debet quadrato. Fingo illius quadrati latus 3 R † 1. Ergo eius quadratum 9 Q † 1 † 6 R æquatur 9 Q † 25. Ac ideo 1 R fit æqualis 4. Vnde tres numeri quæſiti ſunt 9.4.21.

Geometricè, ſumantur tres quælibet lineæ, modo mediæ proportionales inter eas, ſint maiores latere dati quadrati, & facto ſemicirculo ſuper illis medijs proportionalibus, inſcribatur latus quadrati dati, connexæ erunt latera quadratorum. Per 17 ſexti, & 31 tertij, & 47 primi.

Propositio XVI

Inuenire tres quantitates, ita vt productus ex binarum multiplicatione, aſſumpto reliquæ quadrato, faciat quadratum.

POnatur vnus numerus 1 R, alter 4 R † 4, vltimus 1. (ſic enim productus ex primo in ſecundum aſſumpto reliqui quadrato,

vero ſumma 1 Q + 4 R + 7, vt ſemper detracto 3 quadratum efficiatur. Et quia ſumma trium eſt 1 Q + 4 R + 7 & ſumma primi & ſecundi 1 Q + 3, fiet tertius 4 R + 4. Similiter quoniam ſumma ſecundi & tertij eſt 1 Q + 2 R + 4, reſtabit primus 2 R + 3. Rurſus quia tertius eſt 4 R + 4 & ſumma ſecundi & tertij 1 Q + 2 R + 4, erit ſecundus 1 Q – 2 R, ſupereſt ergo vt ſumma primi & tertij detractis 3 faciat quadratum. Igitur 6 R + 4 facit quadratum. Sit illud quadratum 64, & fiet 1 R æqualis 10. Primuſque numerus erit 23, ſecundus 80, tertius 44.

Geometricè, Tres quælibet lineæ pro libito ſumptæ ſoluent problema modo quadrata duarum ex illis majora ſint quadrato datæ lineæ. Id autem fiet partim per angulum rectum qui quadratorum additioni inſeruit, partim per inſcriptionem linearum in ſemicirculo quæ quadratorum ſubſtractionem methodum præbet per 47 primi & 31 tertij.

PROPOSITIO XIV.

Inuenire tres quantitates vt quam binæ mutuo ductu producunt, illa adſcita data quantitate faciat quadratum.

DEtur numerus 20, ſumaturque aliquis numerus quadratus (per 3 huius ſeu per 11. l. 2 Dioph.) qui cum 20 faciat quadratum nempe 16. Tùm ponantur primus & ſecundus quæſitus duo quilibet numeri mutuo ductu facientes 16, puta 8 & 2. Deinde pro tertio ponatur certus quadratorum numerus qui ductus in ſecundum 2 efficiat quadratum vt 2 Q vel 8 Q vel 32 Q, & adiiciatur & defectus alicuius numeri qui ductus in 2 faciat 20. Sit itaque tertius 2 Q – 10, qui ductus in 2 facit 4 Q — 20, cui addendo numerum datum 20 fit quadratus 4 Q. Quare reſtat vt productus ex primo in tertio adſcito 20 faciat quadratum. Facit autem 16 Q — 60. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo eius latus 4 R — 2. Huius quadratum 16 Q + 4 – 16 R æquatur 16 Q — 60. Et fit 1 R æqualis 4. Vnde tres numeri quæſiti ſunt 8. 2. 22.

Geometricè, ſumantur tres lineæ quælibet, & mediæ proportio-

nales inter eas iungantur ad angulos rectos ſigillatim cum latere quadrati dati, lineæ connexæ dabunt latera quadratorum per 17 ſexti & 47 primi.

Propoſitio XV.

Inuenire tres quantitates, & quam binæ mutuo ductu efficiunt, hæc multata datæ quantitate faciat quadratum.

ESto datus numerus 20, & quæratur ſtatim (per 3 huius) quadratus numerus à quo auferendo 20 reſtet quadratus, ſitque 36. Ponaturque pro primo & ſecundo quæſitorum numerorum, duo quilibet mutuo ductu producentes 36, puta 9 & 4. Tum ponatur tertius quilibet quadratorum numerus, qui ductus in ſecundum 4, faciat quadratum, vt 1 Q. Illique addantur aliquot vnitates quæ ductæ in eundem 4 faciant numerum datum 20, ſeu vt paucis dicam, ſit 1 Q † 5 tertius. Cum itaque hoc modo ſatiſfiat duabus conditionibus quæſtionis, reſtat vt productus ex primo in tertium detracto 20, faciat quadratum. Facit vero 9 Q † 25. Qui proinde æquari debet quadrato. Fingo illius quadrati latus 3 R † 1. Ergo eius quadratum 9 Q † 1 † 6 R æquatur 9 Q † 25. Ac ideo 1 R fit æqualis 4. Vnde tres numeri quæſiti ſunt 9. 4. 21.

Geometricè, ſumantur tres quælibet lineæ, modo mediæ proportionales inter eas, ſint maiores latere dati quadrati, & facto ſemicirculo ſuper illis medijs proportionalibus, inſcribatur latus quadrati dati, connexæ erunt latera quadratorum. Per 17 ſexti, & 31 tertij, & 47 primi.

Propoſitio XVI

Inuenire tres quantitates, ita vt productus ex binarum multiplicatione, aſſumpto reliqua quadrato, faciat quadratum.

POnatur vnus numerus 1 R, alter 4 R † 4, vltimus 1. (ſic enim productus ex primo in ſecundum aſſumpto reliqui quadrato,

facit quadratum cuius latus 2 R † I, productus autem ex ſecundo in tertium aſſumpto reliqui quadrato, facit quadratum, cuius latus eſt I R † 2) reſtat ergo vt productus ex tertio in primum aſſumpto ſecundi quadrato, faciat quadratum. Facit autem 16 Q † 16 † 33 R. Hic igitur numerus eſt æquandus quadrato. Finge latus eius 4 R — 5. & fiet I R æqualis 9. Quare primus erit 9. ſecundus 328. tertius 73.

73

Geometricè, accipiantur tres quælibet lineæ, & mediæ inter proportionales inter duas quaſlibet nectantur reliquæ ad angulos rectos efficieturque propoſitum. Per 17 ſexti, & 47 primi

PROPOSITIO XVII.

Datam quantitatem diuidere in duas, & inuenire quadratum, à quo ſi tollas vtramque partem diuiſæ quantitatis, fiat quadratum.

DEtur numerus diuidendus 10, ponaturque inueniendum quadratum eſſe I Q † 2 R † I. Illud ſiue multatum 2 R † I, ſiue 4 R, exhibet quadratum. Quare ſi ſtatuatur prima pars numeri diuidendi 2 R † I, & ſecunda 4 R. Harum ſumma debet æquari 10. & fit IR æqualis 3. Vnde numeri quæſiti ſunt 4 & 6.

2

Geometricè, accipiatur quodlibet quadratum maius quadrato dato, & deſcripto ſuper eius latere ſemicirculo, diuidatur quadratũ datum in duo quælibet quadrata (per 1. huius) & horum latera inſcribatur ſemicirculo ab extremitate diametri: lineæ connexæ exhibebunt quadrata quæſita. Per 31 tertij, & 47 primi.

PROPOSITIO XVIII.

Datam quantitatem diuidere in duas, & inuenire quadratum, quod aſſumpta vtralibet diuiſæ quantitatis parte, faciat quadratum.

ESto datus numerus 20. & ponatur quadratum quæſitum I Q † 2 R † I. Huic ſiue addas 2 R † 3, ſiue 4 R † 8. fit quadratum.

Statuatur ergo prima pars numeri diuidendi 2 R † 3 & ſecunda 4 R † 8. Erit ſumma illarum 6 R † 11 æqualis numero dato 20. & fit 1 R æqualis 3. Vnde numeri quæſiti ſunt 6 & 14.

2

Geometricè, ſume ad libitum quodcumque quadratum, & quadrato dato (per 1. huius) diuiſo in quælibet duo quadrata, necte ſigillatim horum quadratorum latera ad angulos rectos cum latere quadrati ad libitum ſumpti, connexarumque quadrata efficient propoſitum per 47 primi.

PROPOSITIO XIX.

Inuenire duas quantitates, ita vt alterultra & ſumma ambarum, ſed & ipſarum differentia faciat quadratum addita vnitate.

NVmeri à Diophanto reperti ſunt 3024 & 5624. Verum vniuerſalius quæſtionem ſoluit Bachetus addito quocumque numero quadrato: ſit enim datus 4 & ponatur aliquod quadratum à radicibus quotlibet plus latere dati quadrati, puta 3 R † 2 Quadratum huius eſt 9 Q † 4 † 12 R. Hoc quadratum ſi multetur 4 erit primus numerus quæſitus 9 Q † 12 R. (ſic enim addendo 4 fit quadratum) jam vt habeatur ſecundus quare duo quadrata quæ differant per 9 Q † 12 R, hoc modo: duo numeri producentes hanc differentiam ſunt 9 R † 12 & 1 R. Horum interualli ſemiſſis eſt 4 R † 6. Cuius quadratum 16 Q † 36 † 48 R multatum 4 dabit ſecundum numerum 16 Q † 48 R † 32. illi igitur duo numeri tribus poſtulatis ſatiſfaciunt nam & alterulter & vtriuſque ſumma aſſumpto 4 facit quadratum. Quare reſtat vt eorum interuallum aſſumpto 4 faciat quadratum. Facit autem 7 Q † 36 R † 36. Hoc ergo eſt æquandum quadrato. Finge latus 6 — 3 R, & fiet 1 R æqualis 36. igitur numeri quæſiti ſunt 12096 & 22496.

Geometricè, praxis illa debet fieri ex planis, quorum duo quælibet ad hoc opus erunt idonea, non poſſunt reduci ad quadratum & in vnam ſummam colligi & quadrato huic ſummæ æquali addi quadratum cuius libet datæ lineæ. Idem intellige de ipſorum planorum differentia. Sed & de alterutro illorum.

Propoſitio:

facit quadratum cuius latus 2 R † I, productus autem ex ſecundo in tertium aſſumpto reliqui quadrato, facit quadratum, cuius latus eſt I R † 2) reſtat ergo vt productus ex tertio in primum aſſumpto ſecundi quadrato, faciat quadratum. Facit autem 16 Q † 16 † 33 R. Hic igitur numerus eſt æquandus quadrato. Finge latus eius 4 R — 5. & fiet I R æqualis 9. Quare primus erit 9. ſecundus $\frac{328}{73}$. tertius $\frac{73}{73}$.

Geometricè, accipiantur tres quælibet lineæ, & mediæ inter proportionales inter duas quaſlibet nectantur reliquæ ad angulos rectos efficieturque propoſitum. Per 17 ſexti, & 47 primi

PROPOSITIO XVII.

Datam quantitatem diuidere in duas, & inuenire quadratum, à quo ſi tollas vtramque partem diuiſæ quantitatis, fiat quadratum.

DEtur numerus diuidendus 10, ponaturque inueniendum quadratum eſſe I Q † 2 R † I Illud ſiue multatum 2 R † I, ſiue 4 R, exhibet quadratum. Quare ſi ſtatuatur prima pars numeri diuidendi 2 R † I, & ſecunda 4 R. Harum ſumma debet æquari 10. & fit I R æqualis $\frac{3}{2}$. Vnde numeri quæſiti ſunt 4 & 6.

Geometricè, accipiatur quodlibet quadratum maius quadrato dato, & deſcripto ſuper eius latere ſemicirculo, diuidatur quadratũ datum in duo quælibet quadrata (per 1. huius) & horum latera inſcribatur ſemicirculo ab extremitate diametri: lineæ connexæ exhibebunt quadrata queſita. Per 31 tertij, & 47 primi.

PROPOSITIO XVIII.

Datam quantitatem diuidere in duas, & inuenire quadratum, quod aſſumpta vtralibet diuiſæ quantitatis parte, faciat quadratum.

ESto datus numerus 20. & ponatur quadratum quæſitum I Q † 2 R † I. Huic ſiue addas 2 R † 3, ſiue 4 R † 8. fit quadratum.

Statuatur ergo prima pars numeri diuidendi 2 R † 3 & ſecunda 4 R − † 8. Erit ſumma illarum 6 R † 11 æqualis numero dato 20. & fit 1 R æqualis 3. Vnde numeri quæſiti ſunt 6 & 14.

2

Geometricè, ſume ad libitum quodcumque quadratum, & quadrato dato (per 1. huius) diuiſo in quælibet duo quadrata, necte ſigillatim horum quadratorum latera ad angulos rectos cum latere quadrati ad libitum ſumpti, connexarumque quadrata efficient propoſitum per 47 primi.

Propositio XIX.

Inuenire duas quantitates, ita vt alterultra & ſumma ambarum, ſed & ipſarum differentia faciat quadratum addita vnitate.

NVmeri à Diophanto reperti ſunt 3024 & & 5624. Verum vniuerſalius quæſtionem ſoluit Bachetus addito quocumque numero quadrato: ſit enim datus 4 & ponatur aliquod quadratum à radicibus quotlibet plus latere dati quadrati, puta 3 R † 2 Quadratum huius eſt 9 Q † 4 † 12 R. Hoc quadratum ſi multetur 4 erit primus numerus quæſitus 9 Q † 12 R. (ſic enim addendo 4 fit quadratum) jam vt habeatur ſecundus quare duo quadrata quæ differant per 9 Q † 12 R, hoc modo: duo numeri producentes hanc differentiam ſunt 9 R † 12 & 1 R. Horum interualli ſemiſſis eſt 4 R † 6. Cuius quadratum 16 Q † 36 † 48 R multatum 4 dabit ſecundum numerum 16 Q † 48 R † 32. illi igitur duo numeri tribus poſtulatis ſatiſfaciunt nam & alterulter & vtriuſque ſumma aſſumpto 4 facit quadratum. Quare reſtat vt eorum interuallum aſſumpto 4 faciat quadratum. Facit autem 7 Q † 36 R † 36. Hoc ergo eſt æquandum quadrato. Finge latus 6 — 3 R, & fiet 1 R æqualis 36. igitur numeri quæſiti ſunt 12096 & 22496.

Geometricè, praxis illa debet fieri ex planis, quorum duo quælibet ad hoc opus erunt idonea, non poſſunt reduci ad quadratum & in vnam ſummam colligi & quadrato huic ſummæ æquali addi quadratum cuius libet datæ lineæ. Idem intellige de ipſorum planorum differentia. Sed & de alterutro illorum.

Propoſitio.

Propositio XX.

Inuenire tres quantitates, quarum bina qualibet iuncta & in reliquam ducta faciant datas quantitates.

SIt productus ex ſumma primi & ſecndi numeri in tertium 35. ex ſumma ſecundi & tertii in primum 27. ex ſumma tertii & primi in ſecundum 32. & ponatur tertius 1R. Igitur ſumma primi & ſecundi erit $\frac{35}{1R}$ cuius numeratore diuiſo in duos quorum differentia ſit æqualis differentiæ duorum aliorum productorum fient 15 & 20. Quare primo poſito $\frac{15}{1R}$, erit ſecundus $\frac{20}{1R}$. Summa ſecundi & tertii in primum ducta facit $\frac{300}{1Q}$ † 15 Q. Ergo hic productus æquatur 27. & fit 1R æqualis 5. & numeri quæſiti erunt 3. 4. 5.

Geometricè, quantitates inueniendæ debent eſſe lineæ, & datæ debent eſſe ſuperficies, puta tria quadrata. Diuidatur primum quadratum in duo, quorum interuallum ſit æquale differentiæ aliorum quadratorum quæ data ſunt: deinde fiat vt differentia ſecundi quadrati & vnius ex illis ſegmentis ad vnum ſegmentum ita alterum ſegmentum ad quidpiam aliud, & erit illud aliud quadratum tertiæ lineæ quæſitæ. Vnde aliæ non latebunt.

Propositio XXI.

Inuenire tres quantitates, ita vt quam bina producunt, illa cum vnitate faciat quadratum.

VNiuerſaliter proponit Bachetus quæſtionem de quocumque numero quadrato; ſit ille 9. & auferatur 9 ab aliquo nume-

ro quadrato cuius latus ſit quotcumque radicum 3 (latere quadrati 9) puta 1 R † 3. Ergo reſiduum 1 Q † 6 R erit productus ex primo in ſecundum. Eſto ſecundus 1 R. Igitur primus erit 1 R † 6. Rurſus vt habeas tertium, finge quadratum à latere 2 R † 3 (vt videlicet numerus radicum ſuperet vnitate numerum radicum prioris lateris) eius quadratus eſt 4 Q † 9 † 12 R, vnde ſi tollas 9, fiet productus ex ſecundo in tertium 4 Q † 12 R. Quare cùm ſecundus ſit 1 R, erit tertius 4 R † 12. Igitur tres iſti numeri 1 R † 6, 1 R. 4 R † 12. ſoluunt quæſtionem indefinitè. Cape quemcumque numerum pro valore radicis, & iuxta eum reſolue tres coſſicos ſuperiores, & habebitur problematis ſolutio. Si capias 8 pro radice tres numeri erunt 14. 8. 44.

Geometricè, cape tres quaſcumque lineas: quadratum mediæ proportionalis inter duas, additum cum quadrato dato per 47 primi, facit quadratum. Similiter operare de aliis.

Propositio XXII.

Inuenire quatuor quantitates, ita vt productus binarum adſcita vnitate faciat quadratum.

SEd vt vult Bachetus, adſcito quocumque numero quadrato. Sit ille 4. Ponatur autem primus numerus 1 R, & fingantur quadrati à lateribus 1 R † 2. 2 R † 2. 3 R † 2. & à quadratis ſingulis auferantur 4. fiet productus ex primo in ſecundum 1 Q † 4 R. Ex primo in tertium 4 Q † 8 R Ex primo in quartum 9 Q † 12 R. Igitur cum primus ſit 1 R, erit ſecundus 1 R † 4. tertius 4 R † 8. & quartus 9 R † 12. Supereſt ergo tantùm vt productus ex ſecundo in quartum adſcito 4 faciat quadratum. Facit autem 9 Q † 48 R † 52. Quare iſtud æquatur quadrato. Finge latus 3 R -- 8. & fit 1 R æqualis $\frac{1}{2}$ iuxta quam ſi reſoluas quatuor coſſicos ſuperiores, fient numeri quæſiti.

Geometricè, accipiantur quatuor quæcumque lineæ & quodcumque quadratum detur, abſolutumque problema per 47 primi, vt ſupra.

Propositio XX.

Inuenire tres quantitates, quarum bina quælibet iuncta & in reliquam ducta faciant datas quantitates.

SIt productus ex ſumma primi & ſecundi numeri in tertium 35. ex ſumma ſecundi & tertii in primum 27. ex ſumma tertii & primi in ſecundum 32. & ponatur tertius 1R. Igitur ſumma primi & ſecundi erit $\frac{35}{1R}$ cuius numeratore diuiſo in duos quorum differentia ſit æqualis differentiæ duorum aliorum productorum fient 15 & 20. Quare primo poſito $\frac{15}{1R}$, erit ſecundus $\frac{20}{1R}$. Summa ſecundi & tertii in primum ducta facit $\frac{300 + 15Q}{1Q}$. Ergo hic productus æquatur 27. & fit 1R æqualis 5. & numeri quæſiti erunt 3. 4. 5.

Geometricè, quantitates inueniendæ debent eſſe lineæ, & datæ debent eſſe ſuperficies, puta tria quadrata. Diuidatur primum quadratum in duo, quorum interuallum ſit æquale differentiæ aliorum quadratorum quæ data ſunt: deinde fiat vt differentia ſecundi quadrati & vnius ex illis ſegmentis ad vnum ſegmentum ita alterum ſegmentum ad quidpiam aliud, & erit illud aliud quadratum tertiæ lineæ quæſitæ. Vnde aliæ non latebunt.

Propositio XXI.

Inuenire tres quantitates, ita vt quam bina producunt, illa cum vnitate faciat quadratum.

VNiuerſaliter proponit Bachetus quæſtionem de quocumque numero quadrato; ſit ille 9. & auferatur 9 ab aliquo nume-

ro quadrato cuius latus ſit quotcumquē radicum 3 (latere quadrati 9) puta 1 R + 3. Ergo reſiduum 1 Q + 6 R erit productus ex primo in ſecundum. Eſto ſecundus 1 R. Igitur primus erit 1 R + 6. Rurſus vt habeas tertium, finge quadratum à latere 2 R + 3 (vt videlicet numerus radicum ſuperet vnitate numerum radicum prioris lateris) eius quadratus eſt 4 Q + 9 + 12 R, vnde ſi tollas 9, fiet productus ex ſecundo in tertium 4 Q + 12 R. Quare cùm ſecundus ſit 1 R, erit tertius 4 R + 12. Igitur tres iſti numeri 1 R + 6. 1 R. 4 R + 12. ſoluunt quæſtionem indefinitè. Cape quemcumque numerum pro valore radicis, & iuxta eum reſolue tres coſſicos ſuperiores, & habebitur problematis ſolutio. Si capias 8 pro radice tres numeri erunt 14. 8. 44.

Geometricè, cape tres quaſcumque lineas: quadratum mediæ proportionalis inter duas, additum cum quadrato dato per 47 primi, facit quadratum. Similiter operare de aliis.

Propositio XXII.

Inuenire quatuor quantitates, ita vt productus binarum adſcita vnitate faciat quadratum.

SEd vt vult Bachetus, adſcito quocumque numero quadrato. Sit ille 4. Ponatur autem primus numerus 1 R, & fingantur quadrati à lateribus 1 R + 2. 2 R + 2. 3 R + 2. & à quadratis ſingulis auferantur 4. fiet productus ex primo in ſecundum 1 Q + 4 R. Ex primo in tertium 4 Q + 8 R. Ex primo in quartum 9 Q + 12 R. Igitur cum primus ſit 1 R, erit ſecundus 1 R + 4. tertius 4 R + 8. & quartus 9 R + 12. Supereſt ergo tantùm vt productus ex ſecundo in quartum adſcito 4 faciat quadratum. Facit autem 9 Q + 48 R + 52. Quare iſtud æquatur quadrato. Finge latus 3 R − 8. & fit 1 R æqualis $\frac{1}{2}$ iuxta quam ſi reſoluas quatuor coſſicos ſuperiores, fient numeri quæſiti.

Geometricè, accipiantur quatuor quæcumque lineæ & quodcumque quadratum detur, abſolutumque problema per 47 primi, vt ſupra.

Propositio XXIII.

Inuenire tres quantitates proportionales, vt duarum quarumlibet interuallum ſit quadratum.

Diuidatur (per 1 huius) quilibet numerus quadratus, puta 25 in duos quadratos 9 & 16. tùm ſtatuatur minor quantitas quæſita 1 R, media 1 R † 9. maxima 1 R † 25. patet duarum quarumlibet interuallum eſſe quadratum. Quare reſtat vt ſint tres proportionales: vt autem id ſit debet rectangulum ſub extremis 1 Q † 25 R æquari quadrato mediæ 1 Q † 81 † 18 R. Ergo 1 R eſt $\frac{81}{7}$. vnde reliquæ non latebunt.

Geometricè, ſumantur tres quæcumquē lineæ proportionales, & quadrata minorum tollantur de quadratis maiorum, inſcribendo eas in circulis, vt iam ſæpius factum eſt, habebiturque propoſitum.

Propositio XXIV.

Datam quantitatem diuidere in tres, quarum ſolidum ſit cubus habens pro latere ſummam interuallorum, quæ ſunt inter partes.

Sit datus numerus 4. Ponatur autem ſolidus quæſitus 8 C. cuius latus cubicum eſt 2 R. Igitur 2 R erit ſumma interuallorum prædictorum. Et quia ex tribus numeris ſumma eiuſmodi interuallorum eſt dupla differentiæ inter maiorem & minorem, erit hæc differentia maioris & minoris 1 R. Quare ſi ponatur minor quotcumquē radicum puta 2 R. Erit maior 3 R. Horum productus 6 Q diuidens ſolidum 8 C dat $\frac{4}{3}$ R pro ſecundo. Qui ſecundus ſi tertio eſſet minor, & primo maior, ſoluta eſſet quæſtio. Verum primus illum ſuperat. Cum ergo ſecundus factus ſit diuidendo 8 per pro-

ductum primi in tertium, primus autem & tertius non ſint ſumpti tēmere, ſed vnitate differentes, eò deuoluta eſt quæſtio, vt inueniantur duo numeri vnitate differentes, ita tamen vt diuiſo 8 per illorum productum, fiat quotiens minor maiore, & maior minore. Sit minor 1 R & maior 1 R † 1 horum productus diuidens 8, dat pro quotiente $\frac{8}{1Q \dagger 1R}$ ſeu ſecundum. Hic ergo debet eſſe maior 1 R & minor 1 R † 1. Cùm itaque horum interuallum ſit 1, erit interuallum primi & ſecundi minor quam 1. Igitur ſecundus auctus 1, ſeu $\frac{8 \dagger 1Q \dagger 1R}{1Q \dagger 1R}$ eſt maior 1 R † 1 & vtroque per 1 Q † 1 R ducto, fiet 8 † 1 Q † 1 R maior 1 C † 2 Q † 1 R. Igitur 8 maior 1 C † 1 Q. Formo nunc aliquem cubum in quo ſit 1 C † 1 Q. ſit ille à latere 1 R † $\frac{1}{3}$. Igitur maior erit 1 C † 1 Q æquentur latera 2 & 1 R † $\frac{1}{3}$. fit 1 R æqualis $\frac{5}{3}$. maior ergo erit $\frac{8}{3}$. medius $\frac{9}{5}$. minor $\frac{5}{3}$. & omnibus ductis in 15, fiunt tres numeri quæſiti ſine fractionibus 40. 27. 25. quorum ſolidus eſt cubus habens pro latere 30 ſummam interuallorum. Iam fiat vt *92* ſumma illorum trium ad ſingulos, ita 4 numerus diuidendus ad alios, & habebuntur tres partes quæſitæ.

Geometricè, quære primùm tres lineas quæ habeant inter ſe eamdem rationem, quam numeri inuenti 40. 27. 25. tùm fiat vt ſumma illarum linearum ad ſingulas, ita data linea ad alias, & effectum erit problema.

Propositio XXV.

Datam quantitatem diuidere in duas partes, ita vt addendo vtrique quantitatem datam; ſummarum ipſarum productus faciat quadratum.

Sit numerus 2 diuidendus in duos, ita vt vni addendo 3, & alteri 5, productus duarum ſummarum faciat quadratum. Ponatur primus

Propositio XXIII.

Inuenire tres quantitates proportionales, vt duarum quarumlibet interuallum ſit quadratum.

Diuidatur (per 1 huius) quilibet numerus quadratus, puta 25 in duos quadratos 9 & 16. tùm ſtatuatur minor quantitas quæſita 1 R, media 1 R † 9. maxima 1 R † 25. patet duarum quarumlibet interuallum eſſe quadratum. Quare reſtat vt ſint tres proportionales: vt autem id ſit debet rectangulum ſub extremis 1 Q † 25 R æquari quadrato mediæ 1 Q † 81 † 18 R. Ergo 1 R eſt 81. vnde reliquæ non latebunt.

Geometricè, ſumantur tres quæcumque lineæ proportionales, & quadrata minorum tollantur de quadratis maiorum, inſcribendo eas in circulis, vt iam ſæpius factum eſt, habebiturque propoſitum.

Propositio XXIV.

Datam quantitatem diuidere in tres, quarum ſolidum ſit cubus habens pro latere ſummam interuallorum, quæ ſunt interpartes.

Sit datus numerus 4. Ponatur autem ſolidus quæſitus 8 C. cuius latus cubicum eſt 2 R. Igitur 2 R erit ſumma interuallorum prædictorum. Et quia ex tribus numeris ſumma eiuſmodi interuallorum eſt dupla differentiæ inter maiorem & minorem, erit hæc differentia maioris & minoris 1 R. Quare ſi ponatur minor quotcumque radicum puta 2 R. Erit maior 3 R. Horum productus 6 Q diuidens ſolidum 8 C dat 4 R pro ſecundo. Qui ſecundus ſi tertio

eſſet minor, & primo maior, ſoluta eſſet quæſtio. Verum primus illum ſuperat. Cum ergo ſecundus factus ſit diuidendo 8 per pro-

ductum primi in tertium, primus autem & tertius non ſint ſumpti tē-mere, ſed vnitate differentes, eò deuoluta eſt quæſtio, vt inueniantur duo numeri vnitate differentes, ita tamen vt diuiſo 8 per illorum productum, fiat quotiens minor maiore, & maior minore. Sit minor 1 R & maior 1 R † 1 horum productus diuidens 8, dat pro quotiente $\frac{8}{1Q \dagger 1R}$. ſeu ſecundum. Hic ergo debet eſſe maior 1 R & minor 1 R † 1. Cùm itaque horum interuallum ſit 1, erit interuallum primi & ſecundi minor quam 1. Igitur ſecundus auctus 1, ſeu $\frac{8 \dagger 1Q \dagger 1R}{1Q \dagger 1R}$. eſt maior 1 R † 1 & vtroque per 1 Q † 1 R ducto, fiet 8 † 1 Q † 1 R maior 1 C † 2 Q † 1 R. Igitur 8 maior 1 C † 1 Q. Formo nunc aliquem cubum in quo ſit 1 C † 1 Q. ſit ille à latere 1 R † $\frac{1}{3}$. Igitur maior erit 1 C † 1 Q æquentur latera 2 & 1 R † $\frac{1}{3}$. fit 1 R æqualis $\frac{5}{3}$. maior ergo erit $\frac{8}{3}$. medius $\frac{9}{5}$. minor $\frac{5}{3}$. & omnibus ductis in 15, fiunt tres numeri quæſiti ſine fractionibus 40. 27. 25. quorum ſolidus eſt cubus habens pro latere 30 ſummam interuallorum. Iam fiat vt 92 ſumma illorum trium ad ſingulos, ita 4 numerus diuidendus ad alios, & habebuntur tres partes quæſitæ.

Geometricè, quære primùm tres lineas quæ habeant inter ſe eamdem rationem, quam numeri inuenti 40. 27. 25. tùm fiat vt ſumma illarum linearum ad ſingulas, ita data linea ad alias, & effectum erit problema.

Propositio XXV.

Datam quantitatem diuidere in duas partes, ita vt addendo vtrique quantitatem datam, ſummarum ipſarum productus faciat quadratum.

SIt numerus 2 diuidendus in duos, ita vt vni addendo 3, & alteri 5, productus duarum ſummarum faciat quadratum. Ponatur primus

primus 1 R. Ergo ſecundus eſt 2 — 1 R. adde primo 3, & ſecundo 5. fiunt 1 R + 3 & 7 — 1 R. Horum productus eſt 4 R + 21 — 1 Q æquandus quadrato. Æquetur 64 Q, & fiet 1 R $\frac{39}{65}$. talis erit primus quæſitus, quo ſublato ex 2, fiet ſecundus $\frac{91}{65}$ aduerte non eſſe æquandum temere numerum prædictum cuilibet quadrato, ſed tali vt 21 multiplicans illum quadratum, & aſſumens 25 (qui fit ex 21 & quadrato dimidii numeri radicum 4 R) ſit quadratus. Eſto illic 1 Q qui multiplicans 21 & aſſumpto 25 faciet 21 Q + 25. hoc igitur eſt æquale quadrato. Finge latus eius 5 + 4 R. & fit 1 R æqualis 8 cuius quadratum 64 eſt aſſumendum.

Geometricè, diuidatur vtcumque data linea in duas partes, & vtrique parti addantur ſigillatim quæcumque lineæ: inter ſumma facta ſumatur media proportionalis, huius quadratum erit illud quod quæritur.

PROPOSITIO XXVI.

Inuenire tres quantitates, vt interuallum maioris & mediæ ad interuallum mediæ & minoris datam habeat rationem, & bina iuncta faciant quadratum.

DEtur ratio 3 ad 1. & ponatur ſumma minoris & medii 4 (qui eſt numerus quadratus) medius igitur debet eſſe maior 2. ſit ille 1 R + 2. Ergo minor erit 2 --- 1 R (ſic enim illi duo conficiunt 4) interuallum horum eſt 2 R. Igitur maximi & medij interuallum erit 6 R (vt hæc ſit tripla illius) quare maximus erit 7 R + 2. Supereſt ergo vt ſumma maximi & medii 8 R + 4 & ſumma maximi & minimi 6 R + 4 faciat quadratum.

Hæc vero duplicata æqualitas ſic reſoluitur. Oportet inuenire radicem minorem 2 propter 2 -- 1 R & ſic ſumma maioris & medii erit quoque minor 16 propter 6 R + 4. Vt id fiat inueniantur tres quadrati tales vt interuallum maioris & medii ſit triens interualli medij & minoris & minor ſit 4. medius autem minor quam 16. Ponatur

minor 4 & medius 1 Q † 4 R † 4 (cuius latus eſt 1 R † 2) interuallum horum eſt 1 Q † 4 R. Igitur interuallum medii & maioris erit $\frac{1Q \dagger 4R}{3}$.

Ergo maior erit $\frac{4Q \dagger 16R}{3}$ † 12. Æqualis quadrato. Eius ergo noncuplum 12 Q † 48 R 36 æquatur quadrato. (iſta operatio fit vt habeantur integri) finge huius latus eſſe 6 -- 10 R (ponitur 6 vt eius quadratum elidat 36. & ponitur -- 10 R vt inueniatur valor radicis minor binario : Si enim ponerentur 8 R vel 9 R res non ſuccederet, vt experientia conſtabit.) Huius quadratum 36 † 100 Q -- 120 R æquatur 12 Q † 48 R † 36. & fit 1 R æqualis $\frac{21}{11}$. poſitum autem fuerat latus medii quadrati 1 R † 2 ergo illud erit $\frac{43}{11}$. Et medius quadratus $\frac{1849}{121}$. Hic quadratus æquetur quadrato ſupra reperto 6R†4 & fiet 1 R æqualis $\frac{1365}{726}$. minor 2.

Quoniam igitur initio medius poſitus erat 1 R † 2 & minor 2 -- 1 R & inuentus eſt maior 7 R † 2, iis reſolutis iuxta valorem radicis erit maior $\frac{11007}{726}$. medius $\frac{2817}{726}$ & minor $\frac{87}{726}$. diſtantia enim maioris & medii tripla eſt diſtantiæ minoris & medii. Et præterea duo quilibet iuncti faciunt quadratum.

Geometricè, res eſt facilis: ſumatur enim linea A poteſtate tripla alterius B, & eligatur quæcumque altera linea C, cui B iungatur ad angulos rectos, & connexa D iungatur ad angulos rectos cum A, vt habeatur connexa E. Dico quadrata C. D. E. eſſe quæſita. Per 47. primi.

primus 1 R. Ergo ſecundus eſt 2 — 1 R. adde primo 3, & ſecundo 5. fiunt 1 R + 3 & 7 — 1 R. Horum productus eſt 4 R + 21 — 1 Q æquandus quadrato. Æquetur 64 Q, & fiet 1 R $\frac{39}{65}$. talis erit primus quæſitus, quo ſublato ex 2, fiet ſecundus $\frac{91}{65}$ aduerte non eſſe æquandum temere numerum prædictum cuilibet quadrato, ſed tali vt 21 multiplicans illum quadratum, & aſſumens 25 (qui fit ex 21 & quadrato dimidii numeri radicum 4 R) ſit quadratus. Eſto illic 1 Q qui multiplicans 21 & aſſumpto 25 faciet 21 Q + 25. hoc igitur eſt æquale quadrato. Finge latus eius 5 + 4 R. & fit 1 R æqualis 8 cuius quadratum 64 eſt aſſumendum.

Geometricè, diuidatur vt cumque data linea in duas partes, & vtrique parti addantur ſigillatim quæcumque lineæ: inter ſumma factas ſumatur media proportionalis, huius quadratum erit illud quod quæritur.

PROPOSITIO XXVI.

Inuenire tres quantitates, vt interuallum maioris & mediæ ad interuallum mediæ & minoris datam habeat rationem, & binæ iunctæ faciant quadratum.

Detur ratio 3 ad 1, & ponatur ſumma minoris & medii 4 (qui eſt numerus quadratus) medius igitur debet eſſe maior 2. ſit ille 1 R + 2. Ergo minor erit 2 — 1 R (ſic enim illi duo conficiunt 4) interuallum horum eſt 2 R. Igitur maximi & medij interuallum erit 6 R (vt hæc ſit tripla illius) quare maximus erit 7 R + 2. Supereſt ergo vt ſumma maximi & medii 8 R + 4 & ſumma maximi & minimi 6 R + 4 faciat quadratum.

Hæc vero duplicata æqualitas ſic reſoluitur. Oportet inuenirē radicem minorem 2 propter 2 — 1 R & ſic ſumma maioris & medii erit quoque minor 16 propter 6 R + 4. Vt id fiat inueniantur tres quadrati tales vt interuallum maioris & medii ſit triens interualli medij & minoris & minor ſit 4. medius autem minor quam 16. Ponatur

minor 4 & medius 1Q†4R†4 (cuius latus eſt 1R†2) interuallum horum eſt 1Q†4R. Igitur interuallum medii & maioris erit $\frac{1Q \dagger 4R}{3}$. Ergo maior erit $\frac{4Q \dagger 16R \dagger 12}{3}$. Æqualis quadrato. Eius ergo noncuplum 12Q†48R36 æquatur quadrato. (iſta operatio fit vt habeantur integri) finge huius latus eſſe 6 -- 10R (ponitur 6 vt eius quadratum elidat 36. & ponitur -- 10 R vt inueniatur valor radicis minor binario: Si enim ponerentur 8 R vel 9 R res non ſuccederet, vt experientia conſtabit.) Huius quadratum 36†100Q -- 120 R æquatur 12Q†48R†36. & fit 1R æqualis $\frac{21}{11}$. poſitum autem fuerat latus medii quadrati 1R†2 ergo illud erit $\frac{43}{11}$. Et medius quadratus $\frac{1849}{121}$. Hic quadratus æquetur quadrato ſupra reperto 6R†4 & fiet 1R æqualis $\frac{1365}{726}$. minor 2.

Quoniam igitur initio medius poſitus erat 1R†2 & minor 2--1R & inuentus eſt maior 7R†2, iis reſolutis iuxta valorem radicis erit mrior $\frac{11007}{726}$. medius $\frac{2817}{726}$ & minor $\frac{87}{726}$. diſtantia enim maioris & medii tripla eſt diſtantiæ minoris & medii. Et præterea duo quilibet iuncti faciunt quadratum.

Geometricè, res eſt facilis: ſumatur enim linea A poteſtate tripla alterius B, & eligatur quæcumque altera linea C, cui B iungatur ad angulos rectos, & connexa D iungatur ad angulos rectos cum A, vt habeatur connexa E. Dico quadrata C. D. E. eſſe quæſita. Per 47. primi.

PROPOSITIO XXVII.

Inuenire tres quantitates geometricè proportionales, vt quæuis illarum multata quantitate data, faciat quadratum.

DEtur numerus 12. & quæratur (per 3 huius) numerus quadratus, qui detractis 12, relinquat quadratum. Eſt ille $\frac{169}{4}$ pono igitur $\frac{169}{4}$ pro vno extremorum quæſitorum, & pro altero 1 Q. Horum productus $\frac{169}{4}$ Q æquari debet quadrato medij. Ergo huius radix quadrata $\frac{13}{2}$ R eſt medius. Reſtat vt horum quilibet demptis 12, faciat quadratum. Ergo 1 Q -- 12 & $\frac{13}{2}$ R -- 12 æquantur quadrato, atque hic iterum occurrit duplicata æqualitas quam ita reſolues.

Horum duorum cape interuallum 1 Q -- $\frac{13}{2}$ R. Deinde ſeligè duos numeros qui mutuo ductu producant illud interuallum, & in quorum ſumma reperiantur 2 R (duplum videlicet lateris quadrati in illo interuallo exiſtentis) duo numeri ſelecti ſunt 1 R & 1 R -- $\frac{13}{2}$. Horum numerorum differentia eſt $\frac{13}{2}$. Huius differentiæ ſemiſſis $\frac{13}{4}$. Semiſſis iſtius quadratum $\frac{169}{16}$. debet æquari minori ex prædictis nẽpe $\frac{13}{2}$ R -- 12. & fit 1 R æqualis $\frac{361}{104}$. vnde ſinguli non latebunt.

Geometricè, inueniantur tres quæcumque lineæ geometricè proportionales, quarum ſingulæ maiores ſunt latere quadrati dati: & ſuper iis facto ſemicirculo, inſcribatur latus quadrati dati, connexæ dabunt quadrata poſt ſubtractionem reſidua. Per 31 tertij. & 47 primi.

Propositio XXVIII.

Inuenire tres quantitates geometricè proportionales vt qualibet ipſarum aſſumpta quantitate data, faciat quadratum.

ESto numerus datus 20. & (per 3. huius inueniantur duo numeri quadrati quorum interuallum ſit 20. Hi duo ſunt 16 & 36. Pono ergo 16 pro vno extremorum, & I Q pro altero. Igitur 16 Q (productus extremorum) erit æqualis quadrato medii, ac proinde medius erit 4 R. Ergo vt in præcedente I Q † 20 & 4 R † 20 æquantur quadrato. eſtque iterum æqualitas duplicata ſic reſoluenda vt prius. Interuallum horum eſt I Q -- 4 R. Quod producitur per I R -- 4 & I R. (vt manifeſtum eſt) horum differentiæ ſemiſſis quadratum eſt 4 qui deberet æquari minori 4 R † 20. Quod eſt impoſſibile, quia 4 R † 16 æquaretur nihilo. Male igitur poſitus eſt 16 pro vno extremo.

Quærendus ergo eſt numerus quadratus, cuius quadratus maior ſit quam 20, (ſeu qui totus maior ſit 80) & qui adſciſcens 20 faciat quadratum. Hoc autem fit per 3 huius hi ſunt $\frac{361}{4}$ & $\frac{441}{4}$. Pono itaque $\frac{361}{4}$, pro vno extremo (qui prius temere poſitus fuerat 16) & pro altero I Q. Horum productus $\frac{361}{4}$ Q æquatur quadrato medii, & ob id medius erit $\frac{19}{2}$ R. Igitur I Q † 20. & $\frac{19}{2}$ R † 20 æquantur quadrato.

Horum

Propoſitio XXVII.

Inuenire tres quantitates geometricè proportionales, vt quauis illarum multata quantitate data, faciat quadratum.

DEtur numerus 12. & quæratur (per 3 huius) numerus quadratus, qui detractis 12, relinquat quadratum. Eſt ille $\frac{169}{4}$ pono igitur $\frac{169}{4}$ pro vno extremorum quæſitorum, & pro altero I Q. Horum productus $\frac{169}{4}$ Q æquari debet quadrato medij. Ergo huius radix quadrata $\frac{13}{2}$ R eſt medius. Reſtat vt horum quilibet demptis 12, faciat quadratum. Ergo I Q -- 12 & $\frac{13}{2}$ R -- 12 æquantur quadrato, atque hic iterum occurrit duplicata æqualitas quam ita reſolues.

Horum duorum cape interuallum I Q -- $\frac{13}{2}$ R. Deinde ſeligẽ duos numeros qui mutuo ductu producant illud interuallum, & in quorum ſumma reperiantur 2 R (duplum videlicet lateris quadrati in illo interuallo exiſtentis) duo numeri ſelecti ſunt I R & I R -- $\frac{13}{2}$. Horum numerorum differentia eſt $\frac{13}{2}$. Huius differentiæ ſemiſſis $\frac{13}{4}$. Semiſſis iſtius quadratum $\frac{169}{16}$. debet æquari minori ex prædictis nẽpe $\frac{13}{2}$ R -- 12. & fit I R æqualis $\frac{361}{104}$. vnde ſinguli non latebunt.

Geometricè, inueniantur tres quæcumque lineæ geometricè proportionales, quarum ſingulæ maiores ſunt latere quadrati dati: & ſuper iis facto ſemicirculo, inſcribatur latus quadrati dati, connexæ dabunt quadrata poſt ſubtractionem reſidua. Per 31 tertij. & 47 primi.

Propositio XXVIII.

Inuenire tres quantitates geometricè proportionales vt qualibet ipſarum aſſumpta quantitate data, faciat quadratum.

ESto numerus datus 20. & (per 3. huius inueniantur duo numeri quadrati quorum interuallum ſit 20. Hi duo ſunt 16 & 36. Pono ergo 16 pro vno extremorum, & 1 Q pro altero. Igitur 16Q (productus extremorum) erit æqualis quadrato medii, ac proinde medius erit 4 R. Ergo vt in præcedente 1 Q † 20 & 4 R † 20 æquantur quadrato. eſtque iterum æqualitas duplicata ſic reſoluenda vt prius. Interuallum horum eſt 1 Q -- 4 R. Quod producitur per 1 R -- 4 & 1 R. (vt manifeſtum eſt) horum differentiæ ſemiſſis quadratum eſt 4 qui deberet æquari minori 4 R † 20. Quod eſt impoſſibile, quia 4 R † 16 æquaretur nihilo. Male igitur poſitus eſt 16 pro vno extremo.

Quærendus ergo eſt numerus quadratus, cuius quadratus maior ſit quam 20, (ſeu qui totus maior ſit 80) & qui ad ſciſcens 20 faciat quadratum. Hoc autem fit per 3 huius hi ſunt $\frac{361}{4}$ & $\frac{441}{4}$. Pono itaque $\frac{361}{4}$, pro vno extremo (qui prius temere poſitus fuerat 16) & pro altero 1 Q. Horum productus $\frac{361}{4}$ Q æquatur quadrato medii. & ob id medius erit $\frac{19}{2}$ R. Igitur 1 Q † 20. & $\frac{19}{2}$ R † 20 æquantur quadrato.

Horum

Horum interuallum eſt 1 Q — $\frac{19R}{2}$ Duo producentes illud interuallum 1 R -- $\frac{19}{2}$ & 1 R. (aduerte in eorum producentium ſumma reperiri debere 2R) horum differentiæ ſemiſſis quadratum eſt $\frac{361}{16}$ æquale minori $\frac{19R}{2}$ † 20. & fit 1 R æqualis $\frac{41}{152}$. vnde quæſiti non latebunt.

Geometricè, inueniantur tres lineæ proportionales quæcumque: harum quadrata ſigillatim iungantur quadrato dato, beneficio anguli recti, vt iam ſæpius factum eſt, & inde naſcentur quadrata quæſita. Per 47. primi.

Propositio XXIX.

Inuenire duas quantitates vt productus earum multiplicatione addito vtriuſque quadrato faciat quadratum.

Eſto primus numerus 1 R & ſecundus ad libitum 1, horum productus addito vtriuſque quadrato facit ſummam 1 R † 1 Q † 1 æquandus quadrato finge latus eius 1 R -- 2, cuius quadratum eſt 1 Q † 4 --- 4 R æquandus 1 R † 1 Q † 1. & fit 1 R æqualis $\frac{3}{5}$ & ſatisfit quæſtioni. Nam productus additus vtriuſque quadrato facit $\frac{49}{25}$.

Geometricè ſumantur duæ quælibet lineæ, & inueniatur media inter illas proportionalis: tum hæc media iungatur vni prædictarum ad angulos rectos, & connexæ iungatur altera prædictarum perpendiculariter fietque propoſitum. Per 47. primi.

PROPOSITIO XXX.

Inuenire tria triangula rectangula, quorum areæ ſint æquales.

PRimò per præcedentem inueniantur duo numeri quorum productus quadratis ipſorum additus faciat quadratum. Sint illi duo 3 & 5. quorum planum cum quadratis facit 49. Quadratum à latere 7. Tùm 58 (qui conflatur ex quadratis 7 & 3) ſumatur pro hypotenuſa vnius trianguli rectanguli & baſis illius ſit 40 differentia eorumdem quadratorum 7 & 3. Cathetus vero ſeu perpendiculum trianguli ſit 42 duplum producti eorumdem numerorum. Similiter formetur ſecundum triangulum rectangulum à numeris 7 & 5 ſupra repertis. Hypotenuſa erit 74, baſis 24. Cathetus 70. Tertium deinde triangulum rectangulum formetur ab eodem 7 & 8, (qui eſt ſumma 5 & 3) hypotenuſa erit 113. baſis 15. & cathetus 112. tria illa triangula ſunt quæſita.

Geometricè, infinita formari poſſunt: accipiatur enim pro primo, quodlibet triangulum rectangulum. Tùm fiat vt quælibet linea pro libito ſumpta ad baſim primi trianguli ita cathetus primi trianguli ad aliam lineam. Hæc & altera pro libito ſumpta iungantur ad angulos rectos perficiaturque triangulum erit illud æquale primo per 16. ſexti. Eadem methodo inuenientur quotlibet.

PROPOSITIO XXXI.

Diuidere vnitatem in duo ſegmenta, ita vt vtrique ſegmento addendo datam quantitatem, fiat quadratum.

VNiuerſaliter extendit Bachetus quæſtionem ad omnem numerus (modo duplum addititij cum numero diuidendo faciat quadratum, vel compoſitum ex duobus quadratis) ſit ergo 2 numerus diuidendus in duas partes, ita vt vtrique addendo 4, fiat quadratum. Duplum addititii cum diuidendo facit 10 qui componitur ex duobus quadratis, quorum latera ſunt 1 & 3. Cape ergo ſemiſſem 10 nempe 5, & quære quæ pars quadratica illi addita faciat quadra-

Horum interuallum eſt 1 Q — $\frac{19 R}{2}$ Duo producentes illud interuallum 1 R — $\frac{19}{2}$ & 1 R. (aduerte in eorum producentium ſumma reperiri debere 2 R) horum differentiæ ſemiſſis quadratum eſt $\frac{361}{16}$ æquale minori $\frac{19}{2}$ R + 20. & fit 1 R æqualis $\frac{41}{152}$. vnde quæſiti non latebunt.

Geometricè, inueniantur tres lineæ proportionales quæcumque: harum quadrata ſigillatim iungantur quadrato dato, beneficio anguli recti, vt iam ſæpius factum eſt, & inde naſcentur quadrata quæſita. Per 47. primi.

Propositio XXIX.

Inuenire duas quantitates vt productus earum multiplicatione addito vtriuſque quadrato faciat quadratum.

Esto primus numerus 1 R & ſecundus ad libitum 1, horum productus addito vtriuſque quadrato facit ſummam 1 R + 1 Q + 1 æquandus quadrato finge latus eius 1 R -- 2, cuius quadratum eſt 1 Q + 4 --- 4 R æquandus 1 R + 1 Q + 1. & fit 1 R æqualis $\frac{3}{5}$ & ſatisfit quæſtioni. Nam productus additus vtriuſque quadrato facit $\frac{49}{25}$.

Geometricè ſumantur duæ quælibet lineæ, & inueniatur media inter illas proportionalis: tum hæc media iungatur vni prædictarum ad angulos rectos, & connexæ iungatur altera prædictarum perpendiculariter fietque propoſitum. Per 47. primi.

PROPOSITIO XXX.

Inuenire tria triangula rectangula, quorum area ſint æquales.

PRimò per præcedentem inueniantur duo numeri quorum productus quadratis ipſorum additus faciat quadratum. Sint illi duo 3 & 5. quorum planum cum quadratis facit 49. Quadratum à latere 7. Tùm 58 (qui conflatur ex quadratis 7 & 3) ſumatur pro hypotenuſa vnius trianguli rectanguli & baſis illius ſit 40 differentia eorumdem quadratorum 7 & 3. Cathetus vero ſeu perpendiculum trianguli ſit 42 duplum producti eorumdem numerorum. Similiter formetur ſecundum triangulum rectangulum à numeris 7 & 5 ſupra repertis. Hypotenuſa erit 74, baſis 24. Cathetus 70. Tertium deinde triangulum rectangulum formetur ab eodem 7 & 8, (qui eſt ſumma 5 & 3) hypotenuſa erit 113. baſis 15. & cathetus 112. tria illa triangula ſunt quæſita.

Geometricè, infinita formari poſſunt: accipiatur enim pro primo, quodlibet triangulum rectangulum. Tùm fiat vt quælibet linea pro libito ſumpta ad baſim primi trianguli ita cathetus primi trianguli ad aliam lineam. Hæc & altera pro libito ſumpta iungantur ad angulos rectos perficiaturque triangulum erit illud æquale primo per 16. ſexti. Eadem methodo inuenientur quotlibet.

PROPOSITIO XXXI.

Diuidere vnitatem in duo ſegmenta, ita vt vtrique ſegmento addendo datam quantitatem, fiat quadratum.

VNiuerſaliter extendit Bachetus quæſtionem ad omnem numerus (modo duplum addititij cum numero diuidendo faciat quadratum, vel compoſitum ex duobus quadratis) ſit ergo 2 numerus diuidendus in duas partes, ita vt vtrique addendo 4, fiat quadratum. Duplum addititii cum diuidendo facit 10 qui componitur ex duobus quadratis, quorum latera ſunt 1 & 3. Cape ergo ſemiſſem 10 nempe 5, & quære quæ pars quadratica illi addita faciat quadra-

tum. Sit illa $\frac{1}{IQ}$. igitur $\frac{1}{IQ}$ † 5. æquatur quadrato, duc omnia in IQ fitque 1 † 5 Q quadrato æquandus. Finge latus 1 † 2 R. & fit 1 R æqualis 4. Ergo eius quadratum diuidens vnitatem eſt pars quadratica quæſita $\frac{1}{16}$. Hæc enim addita ad 5 facit quadratum $\frac{81}{16}$. cuius latus $\frac{9}{4}$. quare capiendo latera quadratorum incluſorum in 10, nempe 1 & 3. Tollendoque 1 de $\frac{9}{4}$ & tollendo $\frac{9}{4}$ de 3, fiunt reſidua $\frac{5}{4}$. $\frac{3}{4}$. Horum numeratores affectos radicibus ſic iungo cum lateribus quadratorum motorum 1 † 5 R. 3 --- 3 R & illorum quadrata ſimul iuncta 10 † 34 Q --- 8 R æquo, 10. fitque 1 R æqualis $\frac{4}{17}$, ergo quadratorum latera $\frac{37}{17}$. $\frac{39}{17}$. & ipſa quadrata $\frac{1369}{289}$. $\frac{1521}{289}$. à quibus ſi auferas 4 ſigillatim reſtant partes quæſitæ binarii diuidendi $\frac{213}{289}$. $\frac{365}{289}$.

Geometricè, diuidatur planum datum in duo ſegmenta vt cumque tùm vtrique ſegmento addatur quantitas plana data. Summæ factæ reducuntur ad quadratum, & abſolutum erit problema.

PROPOSITIO XXXII.

Diuidere vnitatem in dua ſegmenta & vtrique addere diuerſas quantitates datas, ita vt duo ſummæ faciant quadratum.

BAchetus extendit ad omnem numerum, retinendo conditionem Diophanti, modo ſumma addendorum iuncta numero diuidendo

faciat quadratum, vel compoſitum ex duobus quadratis. Sit ergo 6 diuidendus. Addendi autem ſint 3 & 7. Quoniam 3 illi faciunt 16, de 16 tolle 3 & 7. Reſidui ſunt 13 & 9. Quare diuidendus eſt. 16 in duos quadratos, quorum vnius cadat inter 3 & 9. alter inter 7 & 13. hoc autem quomodo fieri poſſit dictum eſt breuiter in præcedente, & explicabitur fuſius in ſcholio 36 huius. Quadrati illi ſunt $\frac{144}{25}$ $\frac{256}{25}$. a primo auferatur 3. à ſecundo 7, remanebuntque partes quæſitæ ſenarij $\frac{69}{25}$. $\frac{81}{25}$.

Geometricè, planum datum diuidatur in duo vtrumque: tùm vtrique ſegmento diuerſæ quantitates planæ datæ addantur: ſummæ factæ reducantur ad quadratum: & erit abſolutum problema.

Propositio XXXIII.

Diuidere vnitatem in tres partes, ita vt cuilibet addendo eamdem quantitatem, fiant quadrata.

EXtenditur vniuerſaliter ad omnem numerum, modo triplum addititij iunctum diuidendo faciat quadratum, aut compoſitum ex duobus vel tribus quadratis. Sit enim diuidendus 5 & addititiuis 3. cuius triplum additum 5, facit 14, qui componitur ex tribus quadratis 1. 4. 9. Sume trientem 14, & quære partem quadratiuam quæ $\frac{14}{3}$ addita faciat quadratum. Ea eſt $\frac{1}{36}$ addita enim $\frac{14}{3}$ facit quadratum $\frac{169}{36}$, cuius latus $\frac{13}{6}$. Habes ex prædictis 14 naturaliter diuidi in tres quadratos 1. 4. 9. quorum latera ſunt 1. 2. 3. Finge ergo latera quadratorum quæſitorum per adæqualitatem 3 -- 5 R. 3 † 1 R. 1 † 7 R. ſumma quadratorum ab illis ortorum 14 † 75 Q --- 12 R æquatur 14. & fit 1 R æqualis $\frac{4}{25}$. vnde tria latera quadratorum; quæ-

ſitorum

tum. Sit illa $\frac{1}{1Q}$. igitur $\frac{1}{1Q}$ † 5. æquatur quadrato, duc omnia in 1Q fitque 1 † 5 Q quadrato æquandus. Finge latus 1 † 2 R. & fit 1 R æqualis 4. Ergo eius quadratum diuidens vnitatem eſt pars quadratica quæſita $\frac{1}{16}$. Hæc enim addita ad 5 facit quadratum $\frac{81}{16}$. cuius latus $\frac{9}{4}$. quare capiendo latera quadratorum incluſorum in 10, nempe 1 & 3. Tollendoque 1 de $\frac{9}{4}$ & tollendo $\frac{9}{4}$ de 3, fiunt reſidua $\frac{5}{4}$. $\frac{3}{4}$. Horum numeratores affectos radicibus ſic iungo cum lateribus quadratorum motorum 1 † 5 R. 3 -- 3 R & illorum quadrata ſimul iuncta 10 † 34 Q -- 8 R æquo 10. fitque 1 R æqualis $\frac{4}{17}$, ergo quadratorum latera $\frac{37}{17}$. $\frac{39}{17}$. & ipſa quadrata $\frac{1369}{289}$. $\frac{1521}{289}$. à quibus ſi auferas 4 ſigillatim reſtant partes quæſitæ binarii diuidendi $\frac{213}{289}$. $\frac{365}{289}$.

Geometricè, diuidatur planum datum in duo ſegmenta vt cumque tùm vtrique ſegmento addatur quantitas plana data. Summæ factæ reducuntur ad quadratum, & abſolutum erit problema.

PROPOSITIO XXXII.

Diuidere vnitatem in dua ſegmenta & vtrique addere diuerſas quantitates datas, ita vt duo ſumma faciant quadratum.

BAchetus extendit ad omnem numerum, retinendo conditionem Diophanti, modo ſumma addendorum iuncta numero diuidendo

faciat quadratum, vel compoſitum ex duobus quadratis. Sit ergo 6 diuidendus. Addendi autem ſint 3 & 7. Quoniam 3 illi faciunt 16, de 16 tolle 3 & 7. Reſidui ſunt 13 & 9. Quare diuidendus eſt. 16 in duos quadratos, quorum vnius cadat inter 3 & 9. alter inter 7 & 13. hoc autem quomodo fieri poſſit dictum eſt breuiter in præcedente, & explicabitur fuſius in ſcholio 36 huius. Quadrati illi ſunt $\frac{144}{25}$ $\frac{256}{25}$ a primo auferatur 3. à ſecundo 7, remanebuntque partes quæſitæ ſenarij $\frac{69}{25}$. $\frac{81}{25}$.

Geometricè, planum datum diuidatur in duo vtrumque: tùm vtrique ſegmento diuerſæ quantitates planæ datæ addantur: ſummæ factæ reducantur ad quadratum: & erit abſolutum problema.

Propositio XXXIII.

Diuidere vnitatem in tres partes, ita vt cuilibet addendo eamdem quantitatem, fiant quadrata.

EXtenditur vniuerſaliter ad omnem numerum, modo triplum addititij iunctum diuidendo faciat quadratum, aut compoſitum ex duobus vel tribus quadratis. Sit enim diuidendus 5 & addititius 3. cuius triplum additum 5, facit 14, qui componitur ex tribus quadratis 1. 4. 9. Sume trientem 14, & quære partem quadratiuam quæ $\frac{14}{3}$ addita faciat quadratum. Ea eſt $\frac{1}{36}$ addita enim $\frac{14}{3}$ facit quadratum $\frac{169}{36}$, cuius latus $\frac{13}{6}$. Habes ex prædictis 14 naturaliter diuidi in tres quadratos 1. 4. 9. quorum latera ſunt 1. 2. 3. Finge ergo latera quadratorum quæſitorum per adæqualitatem 3--5 R. 3†1 R. 1†7 R. ſumma quadratorum ab illis ortorum 14 † 75 Q--- 12 R æquatur 14. & fit 1 R æqualis $\frac{4}{25}$. vnde tria latera quadratorum quæ-

ſitorum

ſitorum, nec ipſa quadratorum à quorum quolibet tollē 3, rèſtabuntq; partes quæſitæ quinarii.

Geometricè, quantitas plana data diuidatur vt cumque in tres partes, & ſingulis adiiciatur quantitas ſuperficialis data: ſummæ ſactæ reducanrur ad quadrata, erit que effectum problema.

Propositio XXXIV.

Diuidere vnitatem in tria ſegmenta, ita vt cuilibet addendo aliam & aliam quantitatem datam, fiant quadrata.

EXtenditur problema ad quemlibet numerum, modo ſumma diuidendi & trium additiriorum faciat quadratum, aut compoſitum ex duobus vel tribus quadratis. Sic igitur vnitas diuidenda & tres addititi 2. 3 4. horum ſumma 10. componitur ex duobus quadratis 1 & 9. horum vnum diuidatur in alios duos quadratos. Ita 10 diuiſus erit in tres quadratos, quorum latera nota erunt. Sed opus eſt diuidere 10 in tria quadrata quorum primum ſuperet 2, ſecundum 3, tertium 4. adde cuilibet ex iſtis $\frac{1}{3}$ vnitatis diuidendæ (ob tres quadratos) fiuntque $2\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{3}$. tùm quarē partes quadraticas quæ ſingulis additæ faciant quadratum, ea ſunt $\frac{1}{1296}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{144}$ reliqua fac vt in 31 huius & inuenies partes vnitatis quæſitas

$\frac{23975119}{80478841}$. $\frac{25167061}{80478841}$. $\frac{31336661}{80478841}$.

Geometricè, quantitas plana quælibet diuidatur vt cumquē in tres partes, cuilibet reductæ (ſi opus eſt) ad quadratum addatur alia atque alia quantitas plana. Summæ ſactæ reducantur ad quadratum, & erit abſolutum problema.

Propositio XXXV.

Diuidere quantitatem datam in tres, ita vt qualibet dua iuncta faciant quadratam.

ESto datus numerus 10. & quoniam quælibet duæ partes faciant quadratum, erunt tria illa quadrata æqualia 20, & quodlibet illorum minus 10. Quare diuidendus eſt 20 in tria quadrata quorum quodlibet minus ſit 10. duo autem quadrata 16 & 4 faciunt 20, & 4 minor eſt 10. Quare accipio iam 4 pro vno ex illis. & pono alterum 1Q. ergo tertium erit 16 -- 1Q. quoniam autem 10 & 6 faciunt 16, accipiantur duo quadrata inter 6 & 10, nempe 9 & $\frac{64}{9}$. quorum radices ſunt 3 & $\frac{8}{3}$. oportet ergo 16 -- 1Q æquari quadrato. Fingo eius latus a 4 minus aliquot radicibus talibus vt valor radicis ſit inter 3 & $\frac{8}{3}$. ſit illud latus 4 -- $\frac{12}{5}$R ergo eius quadratum 16 † $\frac{144}{25}$Q -- $\frac{96}{5}$R. æquatur 16 -- 1Q. & fit 1R æqualis $\frac{480}{169}$. quare tria quadrata facientia 20 ſunt 4. $\frac{230400}{28561}$. $\frac{226576}{28561}$. quæ ſi auferantur ſigillatim à numero diuidendo 10. fient tres partes quæſitæ.

Geometricè, ſuper latus quadrati dati diuidendi fiat ſemicirculus, in quo inſcribantur duæ lineæ vt libet, & ſuper vna illarum fiat iterum ſemicirculus in quo inſcribantur duæ aliæ lineæ quæcumque duæ iſtæ poſteriores cum priori inſcripta, ſupra quam non fuit factus ſemicirculus exhibebunt tres partes quadrati diuidendi per 47. primi. Harum duæ quælibet iungantur ad angulos rectos & perficiatur triangulum, fietque quod poſtulatur.

ſitorum, nec ipſa quadratorum à quorum quolibet tollē 3, rèſtabuntq; partes quæſitæ quinarii.

Geometricè, quantitas plana data diuidatur vt cumque in tres partes, & ſingulis adiiciatur quantitas ſuperficialis data : ſummæ ſactæ reducanrur ad quadrata, erit que effectum problema.

Propositio XXXIV.

Diuidere vnitatem in tria ſegmenta, ita vt cuilibet addendo aliam & aliam quantitatem datam, fiant quadrata.

EXtenditur problema ad quemlibet numerum, modo ſumma diuidendi & trium additiorum faciat quadratum, aut compoſitum ex duobus vel tribus quadratis. Sit igitur vnitas diuidenda & tres addititi 2. 3 4. horum ſumma 10. componitur ex duobus quadratis 1 & 9. horum vnum diuidatur in alios duos quadratos. Ita 10 diuiſus erit in tres quadratos, quorum latera nota erunt. Sed opus eſt diuidere 10 in tria quadrata quorum primum ſuperet 2, ſecundum 3, tertium 4. adde cuilibet ex iſtis $\frac{1}{3}$ vnitatis diuidendæ (ob tres quadratos) fiuntque $2\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{3}$. tùm quare partes quadraticas quæ ſingulis additæ faciant quadratum. ea ſunt $\frac{1}{1296}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{144}$ teliqua fac vt in 31 huius & inuenies partes vnitatis quæſitas $\frac{23975119}{80478841}$. $\frac{25167061}{80478841}$. $\frac{31336661}{80478841}$.

Geometricè, quantitas plana quælibet diuidatur vt cumquē in tres partes, cuilibet reductæ (ſi opus eſt) ad quadratum addatur alia atque alia quantitas plana. Summæ factæ reducantur ad quadratum, & erit abſolutum problema.

Propoſitio XXXV.

Diuidere quantitatem datam in tres, ita vt qualibet duæ iunctæ faciant quadratam.

Eſto datus numerus 10. & quoniam quælibet duæ partes faciant quadratum, erunt tria illa quadrata æqualia 20, & quodlibet illorum minus 10. Quare diuidendus eſt 20 in tria quadrata quorum quodlibet minus ſit 10. duo autem quadrata 16 & 4 faciunt 20, & 4 minor eſt 10. Quare accipio iam 4 pro vno ex illis. & pono alterum 1Q. ergo tertium erit 16 --- 1Q. quoniam autem 10 & 6 faciunt 16, accipiantur duo quadrata inter 6 & 10, nempe 9 & $\frac{64}{9}$. quorum radices ſunt 3 & $\frac{8}{3}$. oportet ergo 16 -- 1Q æquari quadrato. Fingo eius latus a 4 minus aliquot radicibus talibus vt valor radicis ſit inter 3 & $\frac{8}{3}$. ſit illud latus 4 --- $\frac{12}{5}$ R ergo eius quadratum 16 † $\frac{144}{25}$ Q --- $\frac{96}{5}$ R. æquatur 16 --- 1Q. & ſit 1R æqualis $\frac{480}{169}$. quare tria quadrata facientia 20 ſunt 4. $\frac{230400}{28561}$. $\frac{226576}{28561}$. quæ ſi auferantur ſigillatim à numero diuidendo 10. fient tres partes quæſitæ.

Geometricè, ſuper latus quadrati dati diuidendi fiat ſemicirculus, in quo inſcribantur duæ lineæ vt libet, & ſuper vna illarum fiat iternm ſemicirculus in quo inſcribantur duæ aliæ lineæ quæcumque duæ iſtæ poſteriores cum priori inſcripta, ſupra quam non fuit factus ſemicirculus exhibebunt tres partes quadrati diuidendi per 47. primi. Harum duæ quælibet iungantur ad angulos rectos & perficiatur triangulum, fietque quod poſtulatur.

PROPOSITIO XXXVI.

Diuidere datam quantitatem in quatuor, ita vt tres qualibet iuncta faciant quadratum.

SIt datus numerus 10. Ergo quoniam quælibet pars ter repetitur, quadrata æquabuntur 30 (triplo numeri dati 10) igitur diuidendus erit 30. in quatuor quadrata, quorum quodlibet minus ſit 10. Diuiditur autem 30 in quatuor quadrata exacte, puta 16.9.4. 1. quorum vnum ad rem noſtram non confert, nempe 16, cum ſit maius 10. ac proinde retentis duobus ex illis quatuor, videlicet 9 & 4, ſupereſt vt ſummam reliquorum duorum 17 diuidamus in duo quadrata, quæ ſunt minora 10. Id autem fiet per 2 huius, ponatur enim latus vnius quadrati 1 R † 1 & latus alterius $\frac{7\,R - 4}{2}$. Horum laterum quadrata ſimul ſumpta debent æquari 17. & fit 1 R æqualis $\frac{104}{53}$. per quam ſi reſoluas duo latera coſſicis ſuperioribus expreſſa habebis primum $\frac{157}{53}$. & ſecundum $\frac{152}{53}$. quorum quadrata ſunt infra 10. nempe $\frac{24649}{2809}$ & $\frac{23104}{2809}$. Quare ſi hæc duo quadrata cum duo- quadrata cum duobus ſupra retentis 9 & 4 tollas ſigillatim de numero diuidendo 10 habebuntur quatuor ſegmenta quæſita $\frac{3441}{2809}$. $\frac{4986}{2809}$. $\frac{2809}{2809}$. $\frac{16854}{2809}$ nam illa quatuor faciunt 10, & tria quælibet ſimul addita faciunt quadratum, vt experienti conſtabit. Sed quia non ſtatim conſtat cur in ſecundo latere accipiantur $\frac{7\,R - 4}{2}$, ideo dabimus alteram methodum in ſcholio eiuſdem problematis conficiendi.

Geometricè, datum quadratum diuide in quatuor quadrata, modo in præcedente propoſitione explicato : hinc enim facile terna quælibet quadrata æquabuntur quadrato per 47 primi.

Scholium.

Gaſpar Bachetus ad qu. 12. l. 5. Diophanti tradit methodum vniuerſalem qua numerus quadratus vel compoſitus ex duobus quadratis diuidi poſſit in duo quadrata inter limites datos, & ne diſcedamus à propoſito, eam exemplo in propoſitione noſtra mox allato accommodabimus. Sit diuidendus 17 compoſitus ex duobus quadratis 1 & 16, in duo alia quadrata quæ ſint inter 10 & 7 (hoc enim idem eſt, ac ſi præſcribatur duo illa eſſe infra 10, cum enim debeant facere 17, ſi vnum illorum eſſet infra 7, alterum eſſet ſupra 10, quod eſt contra hypotheſim) cape ſemiſſem ſummæ duorum limitum datorum $\frac{17}{2}$ & quære partem quadraticam quæ addita $\frac{17}{2}$ faciat quadratum. Sit illa pars quadrata $\frac{1}{1Q}$. Igitur $\frac{17}{2}$ † $\frac{1}{1Q}$ æquatur quadrato. Finge latus illius quadrati $\frac{1}{1R}$ -- 3. huius itaque quadratum $\frac{1}{1Q}$ † 9 -- $\frac{6}{1R}$ eſt æquale $\frac{17}{2}$ † $\frac{1}{1Q}$ & fit 1R æqualis 12. Ergo eius quadratum diuidens vnitatem dabit partem quadraticam quæſitam $\frac{1}{144}$, quæ addita $\frac{17}{2}$ facit quadratum $\frac{1225}{144}$. cuius latus eſt $\frac{35}{12}$. Igitur latus illud $\frac{35}{12}$ compono cum lateribus notis quadratorum conficientium ſummam diuidendam 17, nempe 1 & 4 & minus latus 1 tollo ex $\frac{35}{12}$ reſiduum eſt $\frac{23}{2}$, ex maiori autem latere 4 tolle $\frac{35}{12}$, reſiduum eſt $\frac{13}{12}$. horum duo-

rum

PROPOSITIO XXXVI.

Diuidere datam quantitatem in quatuor, ita vt tres qualibet iuncta faciant quadratum.

Sit datus numerus 10. Ergo quoniam quælibet pars ter repetitur, quadrata æquabuntur 30, (triplo numeri dati 10) igitur diuidendus erit 30. in quatuor quadrata, quorum quodlibet minus ſit 10. Diuiditur autem 30 in quatuor quadrata exacte, puta 16. 9. 4. 1. quorum vnum ad rem noſtram non confert, nempe 16, cum ſit maius 10. ac proinde retentis duobus ex illis quatuor, videlicet 9 & 4, ſupereſt vt ſummam reliquorum duorum 17 diuidamus in duo quadrata, quæ ſunt minora 10. Id autem fiet per 2 huius, ponatur enim latus vnius quadrati 1 R + 1 & latus alterius $\frac{7}{2}$ R -- 4. Horum laterum quadrata ſimul ſumpta debent æquari 17. & fit 1 R æqualis $\frac{104}{53}$. per quam ſi reſoluas duo latera coſſicis ſuperioribus expreſſa habebis primum $\frac{157}{53}$. & ſecundum $\frac{152}{53}$. quorum quadrata ſunt infra 10. nempe $\frac{24649}{2809}$ & $\frac{23104}{2809}$. Quare ſi hæc duo quadrata cum duobus quadrata cum duobus ſupra retentis 9 & 4 tollas ſigillatim de numero diuidendo 10 habebuntur quatuor ſegmenta quæſita $\frac{3441}{2809}$. $\frac{4986}{2809}$. $\frac{2809}{2809}$. $\frac{16854}{2809}$ nam illa quatuor faciunt 10, & tria quælibet ſimul addita faciunt quadratum, vt experienti conſtabit. Sed quia non ſtatim conſtat cur in ſecundo latere accipiantur $\frac{7}{2}$ R -- 4, ideo dabimus alteram methodum in ſcholio eiuſdem problematis conficiendi.

Geometricè, datum quadratum diuide in quatuor quadrata, modo in præcedente propoſitione explicato : hinc enim facile terna quælibet quadrata æquabuntur quadrato per 47 primi.

Scholium.

Gaſpar Bachetus ad qu. 12. l. 5. Diophanti tradit methodum vniuerſalem qua numerus quadratus vel compoſitus ex duobus quadratis diuidi poſſit in duo quadrata inter limites datos, & ne diſcedamus à propoſito, eam exemplo in propoſitione noſtra mox allato accommodabimus. Sit diuidendus 17 compoſitus ex duobus quadratis 1 & 16, in duo alia quadrata quæ ſint inter 10 & 7 (hoc enim idem eſt, ac ſi præſcribatur duo illa eſſe infra 10, cum enim debeant facere 17, ſi vnum illorum eſſet infra 7, alterum eſſet ſupra 10, quod eſt contra hypotheſim) cape ſemiſſem ſummæ duorum limitum datorum $\frac{17}{2}$ & quære partem quadraticam quæ addita $\frac{17}{2}$ faciat quadratum. Sit illa pars quadrata 1 IQ. Igitur $\frac{17}{2}$ † 1 IQ æquatur quadrato. Finge latus illius quadrati 1 IR -- 3. huius itaque quadratum 1 IQ † 9 -- 6 IR eſt æquale $\frac{17}{2}$ † 1 IQ & fit 1 R æqualis 12. Ergo eius quadratum diuidens vnitatem dabit partem quadraticam quæſitam $\frac{1}{144}$, quæ addita $\frac{17}{2}$ facit quadratum $\frac{1225}{144}$. cuius latus eſt $\frac{35}{12}$. Igitur latus illud $\frac{35}{12}$ compono cum lateribus notis quadratorum conficientium ſummam diuidendam 17, nempe 1 & 4 & minus latus 1 tollo ex $\frac{35}{12}$ reſiduum eſt $\frac{23}{2}$, ex maiori autem latere 4 tolle $\frac{35}{12}$, reſiduum eſt $\frac{13}{12}$. horum duo-

rum

rum reſiduorum numeratores inſeruiunt propoſito, nam I † 23 R & 4 -- 13 R ſunt latera quadratorum quæſitorum (aduerte numeros abſolutos eſſe latera nota quadratorum quorum ſumma eſt numerus diuidendus 17) quare horum laterum quadrata 1 † 529 Q † 46 R & 16 † 169 Q -- 104 R ſimul addita æquari debent 17 & fit I R æqualis $\frac{29}{349}$. Iuxta quem valorem reſoluta quadrata ſuperiora erunt $\frac{1032256}{121801}$. $\frac{1038361}{121801}$. quorum vtrumque eſt inter limites datos 10 & 7. Si igitur hos quadratos cum duobus 9 & 4 tollas de 10 fient iterum quatuor ſegmenta quæſita numeri 10.

Aliud exemplum. Sit diuidendus 20 (compoſitus ex duobus quadratis quorum latera ſunt 2 & 4) in duos quadratos quorum vnus ſit maior 7 & minor 9. ſumma horum limitum 16 diuidatur bifariam, vt habeatur 8. & quæratur pars quadratica, quæ addita 8 faciat quadratum, ea eſt $\frac{1}{36}$ & ſic inuenitur pone illam eſſe $\frac{1}{1Q}$ ergo $\frac{1}{1Q}$ † 8 æquatur quadrato. Multiplica omnia per I Q (vt vitentur fractiones) igitur 1 † 8 Q æquantur quadrato. Finge latus illius 1 -- 3 R, huius quadratum 1 † 9 Q -- 6 R erit æquale I † 8 Q. & fit I R æqualis 6. ac proinde eius quadratum diuidens vnitatem dabit partem quadraticam, $\frac{1}{36}$ quæ addita 8 facit quadratum $\frac{289}{36}$ cuius latus eſt $\frac{17}{6}$. Quia vero detrahendo 8 ſemiſſem limitum datorum de numero diuidendo 20 reſtat 12, iterum quæres partem quadraticam, quæ addita 12 faciat quadratum (id non fecimus in exemplo præcedenti quia per accidens tollendo $\frac{17}{2}$ ſemiſſem limitum datorum de 17 numero diuidendo reſiduum fuiſſet $\frac{17}{2}$. & proinde eadem pars quadratica inuenta foret) ponatur illa $\frac{1}{1Q}$ ergo $\frac{1}{1Q}$ † 12 æquatur quadrato, & ducendo omnia in I Q (vt vitentur fractiones) fit 1 † 12 Q æquandus quadrato. Finge latus I -- 4 R. Igitur eius quadratum I † 16 Q -- 8 R

æquale eſt 1 † 12 Q. & fit 1 R æqualis 2. cuius quadratum diuidens vnitatem dat partem quadraticam $\frac{1}{4}$. quæ addita 12 facit quadratum $\frac{49}{4}$ cuius latus $\frac{7}{2}$ ſeu (vt reducatur ad eamdem denominationem cum ſuperiore parte quadratica) $\frac{21}{6}$. comparo igitur duo illa latera cum lateribus notis quadratorum ſummæ datæ 20, nempe cum 2 & 4 & 2 tollo ex $\frac{21}{6}$ reſiduum eſt $\frac{9}{6}$. ex 4 autem tollo $\frac{17}{6}$ reſiduum eſt $\frac{7}{6}$. Horum reſiduorum numeratores inſeruiunt propoſito nam 2 † 9 R & 4 -- 7 R ſunt latera quadratorum quæſitorum, (aduerte numeros abſolutos eſſe latera nota quadratorum æqualium 20 nempe 4 & 16) ac proinde illorum quadrata 4 † 81 Q † 36 R & 16 † 49 Q -- 56 R ſimul iuncta æquabuntur 20. & fit 1 R æqualis $\frac{2}{13}$ & quadrati quæſiti ſunt $\frac{1936}{169}$ & $\frac{1444}{169}$. quorum vltimus eſt inter limites datos 7 & 9.

Aduerte non capi temerè numerum radicum qui iungitur lateri noto ad inueniendam partem quadraticam, ſed talem debere ſumi vt valor radicis ſit maior vnitate: defectu enim huius conditionis, non ſucedere operatior in ſecunda parte quadratica præcedentis exempli ſi poneretur 1. - 6 R latus quadrati æquandi 1 † 12 Q. Hinc enim valor radicis $\frac{1}{2}$ minor vnitate, quod eſt contra conditionem.

Vt autem cognoſcas an numerus radicum qui aſſumitur, talis ſit vt valor radicis oriatur vnitate maior, ſic operare: ſi optas nectere radices per ſignum plus in exemplo præcedenti vbi 1 † 8 Q æquatur quadrato. inueniatur quadratus quo ſublato a 8 relinquatur numerus minor duplo lateris quadrati inueniendi: ſit ille 1 Q. ergo 8 -- 1 Q eſt minor 2 R. ac proinde 2 R † 1 Q maior 8. & 1 Q maior 8 -- 2 R

rum reſiduorum numeratores inſeruiunt propoſito, nam 1 † 23 R & 4 -- 13 R ſunt latera quadratorum quæſitorum (aduerte numeros abſolutos eſſe latera nota quadratorum quorum ſumma eſt numerus diuidendus 17) quare horum laterum quadrata 1 † 529 Q † 46 R & 16 † 169 Q -- 104 R ſimul addita æquari debent 17 & fit 1 R æqualis $\frac{29}{349}$. Iuxta quem valorem reſoluta quadrata ſuperiora erunt $\frac{1032256}{121801}$. $\frac{1038361}{121801}$. quorum vtrumque eſt inter limites datos 10 & 7. Si igitur hos quadratos cum duobus 9 & 4 tollas de 10 fient iterum quatuor ſegmenta quæſita numeri 10.

Aliud exemplum Sit diuidendus 20 (compoſitus ex duobus quadratis quorum latera ſunt 2 & 4) in duos quadratos quorum vnus ſit maior 7 & minor 9. ſumma horum limitum 16 diuidatur biſariam, vt habeatur 8. & quæratur pars quadratica, quæ addita 8 faciat quadratum, ea eſt $\frac{1}{36}$ & ſic inuenitur pone illam eſſe $\frac{1}{1Q}$ ergo $\frac{1}{1Q}$ † 8 æquatur quadrato. Multiplica omnia per 1 Q (vt vitentur fractiones) igitur 1 † 8 Q æquantur quadrato. Finge latus illius 1 -- 3 R. huius quadratum 1 † 9 Q -- 6 R erit æquale 1 † 8 Q & fit 1 R æqualis 6. ac proinde eius quadratum diuidens vnitatem dabit partem quadraticam, $\frac{1}{36}$ quæ addita 8 facit quadratum $\frac{289}{36}$ cuius latus eſt $\frac{17}{6}$. Quia vero detrahendo 8 ſemiſſem limitum datorum de numero diuidendo 20 reſtat 12, iterum quæres partem quadraticam, quæ addita 12 faciat quadratum (id non fecimus in exemplo præcedenti quia per accidens tollendo $\frac{17}{2}$ ſemiſſem limitum datorum de 17 numero diuidendo reſiduum fuiſſet $\frac{17}{2}$. & proinde eadem pars quadratica inuenta foret) ponatur illa $\frac{1}{1Q}$ ergo $\frac{1}{1Q}$ † 12 æquatur quadrato, & ducendo omnia in 1 Q (vt vitentur fractiones) fit 1 † 12 Q æquandus quadrato. Finge latus 1 -- 4 R. Igitur eius quadratum 1 † 16 Q -- 8 R

æquale eſt 1 † 12 Q. & fit 1 R æqualis 2. cuius quadratum diuidens vnitatem dat partem quadraticam $\frac{1}{4}$. quæ addita 12 facit quadratum $\frac{49}{4}$ cuius latus $\frac{7}{2}$ ſeu (vt reducatur ad eamdem denominationem cum ſuperiore parte quadratica) $\frac{21}{6}$. comparo igitur duo illa latera cum lateribus notis quadratorum ſummæ datæ 20, nempe cum 2 & 4. & 2 tollo ex $\frac{21}{6}$ reſiduum eſt $\frac{9}{6}$. ex 4 autem tollo $\frac{17}{6}$ reſiduum eſt $\frac{7}{6}$. Horum reſiduorum numeratores inſeruiunt propoſito nam 2 † 9 R & 4 -- 7 R ſunt latera quadratorum quæſitorum, (aduerte numeros abſolutos eſſe latera nota quadratorum æqualium 20 nempe 4 & 16) ac proinde illorum quadrata 4 † 8 1 Q † 36 R & 16 † 49 Q -- 56 R ſimul iuncta æquabuntur 20. & fit 1 R æqualis $\frac{2}{13}$ & quadrati quæſiti ſunt $\frac{1936}{169}$ & $\frac{1444}{169}$. quorum vltimus eſt inter limites datos 7 & 9.

Aduerte non capi temere numerum radicum qui iungitur lateri noto ad inueniendam partem quadraticam, ſed talem debere ſumi vt valor radicis ſit maior vnitate: defectu enim huius conditionis, non ſucedere operatio in ſecunda parte quadratica præcedentis exempli ſi poneretur 1. - 6 R latus quadrati æquandi 1 † 12 Q. Hinc enim valor radicis $\frac{1}{2}$ minor vnitate, quod eſt contra conditionem.

Vt autem cognoſcas an numerus radicum qui aſſumitur, talis ſit vt valor radicis oriatur vnitate maior, ſic operare: ſi optas nectere radices per ſignum plus in exemplo præcedenti vbi 1 † 8 Q æquatur quadrato, inueniatur quadratus quo ſublato a 8 relinquatur numerus minor duplo lateris quadrati inueniendi: ſit ille 1 Q. ergo 8 -- 1 Q eſt minor 2 R. ac proinde 2 R † 1 Q maior 8. & 1 Q maior 8 -- 2 R

cuius radix quadrata eſt 2, ſupra quem debet ſumi numerus radicum, taliter tamen vt eius quadratum minus ſit 8. Sumatur 1 † $\frac{5}{2}$ R. eius quadratum æquabitur I † 8 Q & fiet I R æqualis $\frac{20}{7}$. Sed ſi ſumatur I † 3 R vel I † 1 R. Res non ſuccederet. Quod ſi velis nectere radices lateri noto per ſignum minus, inueniendus erit quidam quadratus à quo auferendo (ſume priorem partem quadraticam in cuius perquiſitione I † 12 Q æquatur quadrato) 12 reſiduum ſit minus duplo lateris. Sit illud quadratum I Q ergo IQ -- 12 eſt minus 2 R. Igitur I Q eſt minus 2 R † 12 & fit I R æqualis ℞ 13 † 1 proxima autem & maior vera eſt $\frac{461}{100}$. Quare numerus radicum debet ſumi infra numerum iſtum inuentum, taliter tamen vt eius quadratum ſuperet 12 ſumatur I -- 4 R (vt fecimus) eius quadratum æquabitur I † 12 Q & fiet valor radicis 2. Si vero poneretur I -- $\frac{461}{100}$ R, valor radicis foret $\frac{92200}{92521}$ vnitate minor. Si ponatur I --- $\frac{460}{100}$ R valor radicis erit $\frac{230}{229}$ vnitate maior. En tibi terminum ſupra quem & terminum infra quem.

PROPOSITIO XXXVII.

Inuenire tres quadratos quorum bini adſciſcentes datam quantitatem faciant quadratum.

ESto data quantitas 15. & ponatur vnus quadratorum 9. quilibet ergo aliorum duorum cum 9 & 15 (ſeu cum 24) debet facere quadratũ. Sumantur numeri metientes 24, nẽpe 8 & 3, itẽ 6 & 4, & ſint latera circa rectũ trianguli rectanguli & ex duobus poſterioribus

fiant duo ſequentes numeri $\frac{4}{1R}$ & $6R$. Quorum ſemiſſes ſunt $\frac{2}{1R}$ & $3R$. Similiter ex duobus prioribus fiant $\frac{3}{1R}$ & $8R$ quorum ſemiſſes ſunt $\frac{3}{2R}$ & $4R$. Ponaturque vnius quadrati latus interuallum duarum priorum ſemiſſium $3R - \frac{2}{1R}$. alterius vero quadrati latus ſit interuallum duarum poſteriorum ſemiſſium $4R - \frac{3}{2R}$ (ſic enim vterque quadratorum cum 24 faciet quadratum) reſtat igitur vt ambo iuncti cum 15 faciant quadratum, faciunt autem $25Q - 9 + \frac{25}{4Q}$. ergo hæc æquantur quadrato. Sit illud $25Q$ fietque $1R$ æqualis $\frac{5}{6}$. & tres quæſiti quadrati erunt 9. $\frac{1}{100}$ $\frac{529}{225}$.

Geometricè, acceptæ tres quæcumque lineæ exhibebunt tria quadrata quæſita, quorum duo quælibet addentur more ſolito per angulum rectum cum quadrato dato. Per 47. primi.

Propositio XXXVIII.

Inuenire tres quadratos, quorum bini ſumpti detracta quantitate data, faciant quadratum.

ESto datus numerus 13. & ponatur vnus quadratorum 25. quærendi ergo alij duo tales, vt vterque ſigillatim cum 12 (differentia 25 & 13) faciant quadratum: ambo vero ſimul additi detractis 13 æquentur quadrato. cape 3 & 4 (vt in præcedente) metientes 12, & quæ ſint latera circa rectum trianguli rectanguli. Ergo primum latus erit interuallum $\frac{3R}{2}$ & $\frac{2}{1R}$ alterum vero latus erit

cuius radix quadrata eſt 2, ſupra quem debet ſumi numerus radicum, taliter tamen vt eius quadratum minus ſit 8. Sumatur 1 † $\frac{5}{2}$ R. eius quadratum æquabitur 1 † 8 Q & fiet 1 R æqualis $\frac{20}{7}$. Sed ſi ſumatur 1 † 3 R vel 1 † 1 R. Res non ſuccederet. Quod ſi velis nectere radices lateri noto per ſignum minus, inueniendus erit quidam quadratus à quo auferendo (ſume priorem partem quadraticam in cuius perquiſitione 1 † 12 Q æquatur quadrato) 12 reſiduum ſit minus duplo lateris. Sit illud quadratum 1 Q ergo 1Q -- 12 eſt minus 2 R. Igitur 1 Q eſt minus 2 R † 12 & fit 1 R æqualis ℞ 13 † 1 proxima autem & maior vera eſt $\frac{461}{100}$. Quare numerus radicum debet ſumi infra numerum iſtum inuentum; taliter tamen vt eius quadratum ſuperet 12. ſumatur 1 -- 4 R (vt fecimus) eius quadratum æquabitur 1 † 12 Q & fiet valor radicis 2. Si vero poneretur 1 -- $\frac{461}{100}$ R, valor radicis foret $\frac{92200}{92521}$ vnitate minor. Si ponatur 1 --- $\frac{460}{100}$ R valor radicis erit $\frac{230}{229}$ vnitate maior. En tibi terminum ſupra quem & terminum infra quem.

PROPOSITIO XXXVII.

Inuenire tres quadratos quorum bini adſciſcentes datam quantitatem faciant quadratum.

ESto data quantitas 15. & ponatur vnus quadratorum 9. quilibet ergo aliorum duorum cum 9 & 15 (ſeu cum 24) debet facere quadratũ. Sumantur numeri metientes 24, nẽpe 8 & 3, itẽ 6 & 4, & ſint latera circa rectũ trianguli rectanguli & ex duobus poſterioribus

fiant duo ſequentes numeri $\frac{4}{1R}$ & 6R. Quorum ſemiſſes ſunt $\frac{2}{1R}$ & 3R. Similiter ex duobus prioribus fiant $\frac{3}{1R}$ & 8R quorum ſemiſſes ſunt $\frac{3}{2R}$ & 4R. Ponaturque vnius quadrati latus interuallum duarum priorum ſemiſſium 3R --- $\frac{2}{1R}$. alterius vero quadrati latus ſit interuallum duarum poſteriorum ſemiſſium 4R -- $\frac{3}{2R}$ (ſic enim vterque quadratorum cum 24 faciet quadratum) reſtat igitur vt ambo iuncti cum 15 faciant quadratum, faciunt autem 25Q -- 9 † $\frac{25}{4Q}$. ergo hæc æquantur quadrato. Sit illud 25Q fietque 1R æqualis $\frac{5}{6}$. & tres quæſiti quadrati erunt $\frac{9}{100}$. 1. $\frac{529}{225}$.

Geometricè, acceptæ tres quæcumque lineæ exhibebunt tria quadrata quæſita, quorum duo quælibet addentur more ſolito per angulum rectum cum quadrato dato. Per 47. primi.

Propositio XXXVIII.

Inuenire tres quadratos, quorum bini ſumpti detracta quantitate data, faciant quadratum.

Esto datus numerus 13. & ponatur vnus quadratorum 25. quærendi ergo alij duo tales, vt vterque ſigillatim cum 12 (differentia 25 & 13) faciant quadratum: ambo vero ſimul additi detractis 13 æquentur quadrato. cape 3 & 4 (vt in præcedente) metientes 12, & quæ ſint latera circa rectum trianguli rectanguli. Ergo primum latus erit interuallum $\frac{3}{2}$R & $\frac{2}{1R}$ alterum vero latus erit

interuallum

interuallum 2 R & $\frac{3}{2R}$. Si enim cuilibet quadrato addas 12, fiet quadratum. Igitur reſtat vt ambo ſimul multati 13 faciant quadratum. Faciunt autem $\frac{25}{4Q}$ † $\frac{25Q}{4}$ -- 25. Hoc ergo æquatur quadrato. Sit illud $\frac{25}{4Q}$. & fit 1 R æqualis 2. & tres quæſiti quadrati 9. 7. $\frac{169}{16}$.

Geometricè, eligantur tres quæcumque lineæ, modo quadrata duarum quarumcumque ſint maiora quadrato dato: tum fiat additio per angulum rectum, & ſubtractio per inſcriptionem in ſemicirculo, per 47 primi. & 31 tertii.

Propositio XXXIX.

Inuenire tria quadrata, quorum ſumma faciat quadratum.

INſtituit Diophantus diuerſas poſitiones, & cum ex illis inciderit in irrationales concludit quærendos eſſe duos quadratos, & prætereà numerum arbitrarium à cuius quadrato auferendo quadratos duorum quæſitorum quadratorum, reſiduum ad duplum eiuſdem numeri ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponantur ergo illi duo quadrati 1 Q & 4. & numerus arbitrarius ſit 1 Q † 4. ab huius quadrato 1 Q Q † 16 † 8 Q tollantur quadrata prædictorum quadratorum: reſiduum 8 Q ad 2 Q † 8 (duplum videlicet numeri arbitrarii) debet habere rationem quadrati ad quadratum. Ergo ſemiſſis 4 Q ad ſemiſſem 1 Q † 4 eſt in ratione quadrati ad quadratum. Sed 4 Q eſt quadratum. Ergo 1 Q † 4 eſt quadratum. Finge latus eius 1 R † 1. Ergo 1 Q † 1 † 2 R æquabitur 1 Q † 4. & fit 1 R æqualis $\frac{3}{2}$ quare iuxta poſitiones, primus quadratus erit $\frac{9}{4}$. ſecundus 4. & numerus arbitrarius $\frac{25}{4}$. ſiue omnia ducendo in 4 erunt tres illi 9. 16. 25.

Nunc ad quæſtionem noſtram, ponamus primum quadratum

quæſitum I Q, ſecundum 9, tertium 16. Igitur ſumma quadratorum erit I Q Q † 337. & illa ſumma æquatur quadrato. Finge latus I Q -- 25. fietque I R æqualis $\frac{12}{5}$ vnde tria quadratorum latera ſunt $\frac{144}{25}$. 9. 16. quadrata autem $\frac{20736}{625}$. 81. 256.

Geometricè, res eſt per facilis, nam accipiantur tres lineæ quælibet, quarum duæ iungantur ad angulos rectos, & perficiatur triangulum: deinde tertia iungatur perpendiculariter iſti hypotenuſæ, & abſoluatur triangulum: quadratum iſtius poſterioris hypotenuſæ æquabitur quadratis trium pro libito acceptarum.

Scholium.

Diophantus labyrinthos quæſiuit plures in re per facili. Ponatur enim pro vno ex quadratis quæſitis quilibet quadratus puta 4, pro ſecundo I Q, & videatur quis numerus cum ſumma duorum illorum faciat quadratum, certum eſt eſſe 4 R. Nam I Q † 4 † 4 R eſt quadratus à latere I R † 2. reſtat ergo vt 4 R æquetur quadrato. Sit ille 64. Igitur I R erit 16 quare tres quæſiti numeri erunt 4. 64. 256. quorum ſumma 324 eſt quadratus à latere 18.

Aliter ſumatur quilibet quadratus puta 100 pro ſumma omnium: hic per primam huius diuidatur in duos quadratos 36. 64. tum vnus ex illis puta 36 iterum diuidatur in duos quadratos $\frac{576}{25}$. $\frac{324}{25}$. & habetur propoſitum.

Hinc ſolues ſequens problema: inuenire tria quadrata quorum ſumma faciat quadratum, & extremorum differentia faciat cubum. inuentis tribus quadratis, quorum ſumma ſit quadratus, nectatur character quadratorum, ſintque tria quadrata quæſita 4 Q 64 Q 256 Q. tollatur minus à maiore, reſiduum eſt 252 Q æquandum cubo. ſit ille cubus I C. ergo I R eſt æqualis 252. cuius quadratum 63504 ſi ducatur in quadratos 4. 64. 256. habebis tria quadrata quæſita 254016. 4064256. 16257024. horum enim ſumma eſt 20575296 quadratum à latere 4536. differentia vero maioris & minoris eſt 16003008 cubus à latere 252.

interuallum 2 R & $\frac{3}{2R}$. Si enim cuilibet quadrato addas 12, fiet quadratum. Igitur reſtat vt ambo ſimul multati 13 faciant quadratum. Faciunt autem $\frac{25}{4Q}$ † $\frac{25Q}{4}$ −25. Hoc ergo æquatur quadrato. Sit illud $\frac{25}{4Q}$. & fit 1 R æqualis 2. & tres quæſiti quadrati 9. 7. $\frac{169}{16}$.

Geometricè, eligantur tres quæcumque lineæ, modo quadrata duarum quarumcumque ſint maiora quadrato dato: tum fiat additio per angulum rectum, & ſubtractio per inſcriptionem in ſemicirculo, per 47 primi. & 31 tertii.

Propositio XXXIX.

Inuenire tria quadrata, quorum ſumma faciat quadratum.

INſtituit Diophantus diuerſas poſitiones, & cum ex illis inciderit in irrationales concludit quærendos eſſe duos quadratos, & præterea numerum arbitrarium à cuius quadrato auferendo quadratos duorum quæſitorum quadratorum, reſiduum ad duplum eiuſdem numeri ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponantur ergo illi duo quadrati 1 Q & 4. & numerus arbitrarius ſit 1 Q † 4. ab huius quadrato 1 QQ † 16 † 8 Q tollantur quadrata prædictorum quadratorum: reſiduum 8 Q ad 2 Q † 8 (duplum videlicet numeri arbitrarii) debet habere rationem quadrati ad quadratum. Ergo ſemiſſis 4 Q ad ſemiſſem 1 Q † 4 eſt in ratione quadrati ad quadratum. Sed 4 Q eſt quadratum. Ergo 1 Q † 4 eſt quadratum. Finge latus eius 1 R † 1. Ergo 1 Q † 1 † 2 R æquabitur 1 Q † 4. & fit 1 R æqualis $\frac{3}{2}$ quare iuxta poſitiones, primus quadratus erit $\frac{9}{4}$. ſecundus 4. & numerus arbitrarius $\frac{25}{4}$. ſiue omnia ducendo in 4 erunt tres illi 9. 16. 25.

Nunc ad quæſtionem noſtram, ponamus primum quadratum

quæſitum I Q, ſecundum 9, tertium 16. Igitur ſumma quadratorum erit I Q Q † 337. & illa ſumma æquatur quadrato. Finge latus I Q -- 25. fietque I R æqualis $\frac{12}{5}$ vnde tria quadratorum latera ſunt $\frac{144}{25}$. 9. 16. quadrata autem $\frac{20736}{625}$. 81. 256.

Geometricè, res eſt per facilis, nam accipiantur tres lineæ quælibet, quarum duæ iungantur ad angulos rectos, & perficiatur triangulum: deinde tertia iungatur perpendiculariter iſti hypotenuſæ, & abſoluatur triangulum: quadratum iſtius poſterioris hypotenuſæ æquabitur quadratis trium pro libito acceptarum.

Scholium.

Diophantus labyrinthos quæſiuit plures in re per facili. Ponatur enim pro vno ex quadratis quæſitis quilibet quadratus puta 4, pro ſecundo I Q, & videatur quis numerus cum ſumma duorum illorum faciat quadratum, certum eſt eſſe 4 R. Nam I Q † 4 † 4 R eſt quadratus à latere I R † 2. reſtat ergo vt 4 R æquetur quadrato. Sit ille 64. Igitur I R erit 16 quare tres quæſiti numeri erunt 4. 64. 256. quorum ſumma 324 eſt quadratus à latere 18.

Aliter ſumatur quilibet quadratus puta 100 pro ſumma omnium: hic per primam huius diuidatur in duos quadratos 36. 64. tum vnus ex illis puta 36 iterum diuidatur in duos quadratos $\frac{576}{25}$. $\frac{324}{25}$. & habetur propoſitum.

Hinc ſolues ſequens problema: inuenire tria quadrata quorum ſumma faciat quadratum, & extremorum differentia faciat cubum. inuentis tribus quadratis, quorum ſumma ſit quadratus, nectatur character quadratorum, ſintque tria quadrata quæſita 4 Q 64 Q 256 Q. tollatur minus à maiore, reſiduum eſt 252 Q æquandum cubo. ſit ille cubus I C. ergo I R eſt æqualis 252. cuius quadratum 63504 ſi ducatur in quadratos 4. 64. 256. habebis tria quadrata quæſita 254016. 4064256. 16257024. horum enim ſumma eſt 20575296 quadratum à latere 4536. differentia vero maioris & minoris eſt 16003008 cubus à latere 252.

Propositio XL.

Inuenire triangulum rectangulum vt area ipſius iuncta data quantitati, faciat quadratum.

Sit datus numerus 5 & ponatur triangulum datum ſpecie 3R. 4 R. 5 R. ergo area eſt *6* Q (ſemiſſis producti ſub duobus minoribus lateribus ſemper æquatur areæ) ac proinde area adſcito dato numero eſt *6* Q + 5. æquanda quadrato. æquetur *9* Q. Fit 1 R æqualis ℞ $\frac{5}{3}$. quod ad rem noſtram nihil confert, quia $\frac{5}{3}$ non eſt numerus quadratus. Eò igitur deuentum eſt vt inueniatur triangulum rectangulum & numerus quadratus talis, vt quadratus area trianguli multatis, faciat, quintam partem quadrati (quia datur 5.) formetur triangulum rectangulum ab 1 R & $\frac{1}{1R}$. (vt formatur triangulum ex duobus quibuſcumque numeris, nam ſumma quadratorum ab ipſis ortorum eſt hypotenuſa, differentia quadratorum eorumdem eſt perpendiculum, & duplum producti numerorum eſt baſis, vt ex duobus numeris *3* & 8 formalis triangulum rectangulum 73. 55. 48.) illius trianguli area erit 1 Q − $\frac{1}{1Q}$ quadratum vero formetur à latere habente 1 R plus fractione numerica, cuius numerator ſit duplum numeri dati, cui ſupponatur 1 R. ſit igitur hoc latus 1 R + $\frac{10}{1R}$. huius quadratus eſt 1 Q + $\frac{100}{1Q}$ + 20. vnde ſi tollas aream, reſiduum $\frac{101}{1Q}$ + 20 erit quinta pars quadrati. Ergo $\frac{505}{1Q}$ + 100 æquatur quadrato. Quibus ductis in 1 Q fient 505 + 100 Q æquales quadrato. Eſto latus eius 10 R + 5. eius quadratum 100 Q + 25 + 100 R

æquabitur 505 † 100 Q & fit 1R æqualis $\frac{24}{5}$. igitur $\frac{1}{1R}$ erit $\frac{5}{24}$. ac proinde formandum erit triangulum rectangulum a $\frac{24}{5}$ & $\frac{5}{24}$ (vti mox explicatum eſt) & fient tria latera $\frac{332401}{14400}$. $\frac{331151}{14400}$. 2.

Redintegretur operatio, & iſti numeri afficiantur charactere radicum, ſintque $\frac{332401}{14400}$R. $\frac{331551}{14400}$ R 2R. Igitur $\frac{331151}{14400}$Q eſt area, ac proinde illa addita 5 facit quadratum $\frac{72000}{1108849}$ æquale $\frac{170569}{3600}$Q. (hoc enim ſequitur ex operatione ſuperiori, in qua valor radicis repertus fuit $\frac{24}{5}$, iuxta quem debet reſolui quadratum prius repertum in numeris coſſicis $\frac{1Q † 100 † 20}{1Q}$) & fit 1R æqualis $\frac{600}{1325}$ iuxta quam reſoluti tres coſſici ſuperiores dabunt latera trianguli rectanguli quæſiti $\frac{997253}{95400}$. $\frac{993453}{95400}$. $\frac{48}{53}$

Geometricè, fiat quodcumque triangulum rectangulum. Deinde inter baſim & ſemiſſem perpendiculi ſumatur media proportionalis, quæ nectatur ad angulos rectos cum latere quadrati dati perficiaturque triangulum per hypotenuſam: hæc hypotenuſa poteſt quadratum datum, & aeream trianguli. Per 47. primi. & 17 ſexti.

Scholium.

Breuitèr ſic poteſt expediri problema: accipiatur aliquod quadratum maius quantitate data: & ex eo quantitas data tollatur: puta 5 ex 9 & remanet 4. Sumatur ergo 4 pro baſe, & 2 pro perpendiculo: deinde horum quadrata colligantur in vnam ſummam, & ſummæ huius radix quadrata ℞ 20 accipiatur pro hypotenuſa. Erit

Propositio XL.

Inuenire triangulum rectangulum vt area ipſius iuncta data quantitati, faciat quadratum.

Sit datus numerus 5 & ponatur triangulum datum ſpecie 3R. 4R. 5R. ergo area eſt 6Q (ſemiſſis producti ſub duobus minoribus lateribus ſemper æquatur areæ) ac proinde area adſcito dato numero eſt $6Q + 5$. æquanda quadrato. æquetur $9Q$. Fit 1R æqualis ℞ $\frac{5}{3}$. quod ad rem noſtram nihil confert, quia $\frac{5}{3}$ non eſt numerus quadratus. Eò igitur deuentum eſt vt inueniatur triangulum rectangulum & numerus quadratus talis, vt quadratus area trianguli multatis, faciat quintam partem quadrati (quia datur 5.) formetur triangulum rectangulum ab 1R & $\frac{1}{1R}$. (vt formatur triangulum ex duobus quibuſcumque numeris, nam ſumma quadratorum ab ipſis ortorum eſt hypotenuſa, differentia quadratorum eorumdem eſt perpendiculum, & duplum producti numerorum eſt baſis, vt ex duobus numeris 3 & 8 formalis triangulum rectangulum 73. 55. 48) illius trianguli area erit $1Q - \frac{1}{1Q}$ quadratum vero formetur à latere habente 1R plus fractione numerica, cuius numerator ſit duplum numeri dati, cui ſupponatur 1R. ſit igitur hoc latus $1R + \frac{10}{1R}$ huius quadratus eſt $1Q + \frac{100}{1Q} + 20$. vnde ſi tollas aream, reſiduum $\frac{101}{1Q} + 20$ erit quinta pars quadrati. Ergo $\frac{505}{1Q} + 100$ æquatur quadrato. Quibus ductis in 1Q fient $505 + 100Q$ æquales quadrato. Eſto latus eius $10R + 5$. eius quadratum $100Q + 25 + 100R$

æquabitur 505 † 100 Q & fit 1R æqualis $\frac{24}{5}$. igitur $\frac{1}{1R}$ erit $\frac{5}{24}$. ac proinde formandum erit triangulum rectangulum a $\frac{24}{5}$ & $\frac{5}{24}$ (vti mox explicatum eſt) & fient tria latera $\frac{332401}{14400}$. $\frac{331151}{14400}$. 2.

Redintegretur operatio, & iſti numeri afficiantur charactere radicum, ſintque $\frac{332401}{14400}$ R. $\frac{331551}{14400}$ R 2R. Igitur $\frac{331151}{14400}$ Q eſt area, ac proinde illa addita 5 facit quadratum $\frac{72000}{1108849}$ æquale $\frac{170569}{3600}$ Q. (hoc enim ſequitur ex operatione ſuperiori, in qua valor radicis repertus fuit $\frac{24}{5}$, iuxta quem debet reſolui quadratum prius repertum in numeris coſſicis $\frac{1Q \dagger 100 \dagger 20}{1Q}$) & fit 1R æqualis $\frac{600}{1325}$ iuxta quam reſoluti tres coſſici ſuperiores dabunt latera trianguli rectanguli quæſiti $\frac{997253}{95400}$. $\frac{993453}{95400}$. $\frac{48}{53}$

Geometricè, fiat quodcumque triangulum rectangulum. Deinde inter baſim & ſemiſſem perpendiculi ſumatur media proportionalis, quæ nectatur ad angulos rectos cum latere quadrati dati perficiaturque triangulum per hypotenuſam: hæc hypotenuſa poteſt quadratum datum, & aeream trianguli. Per 47. primi. & 17 ſexti.

Scholium.

Breuiter ſic poteſt expediri problema : accipiatur aliquod quadratum maius quantitate data : & ex eo quantitas data tollatur : puta 5 ex 9 & remanet 4. Sumatur ergo 4 pro baſe, & 2 pro perpendiculo : deinde horum quadrata colligantur in vnam ſummam, & ſummæ huius radix quadrata ℞ 20 accipiatur pro hypotenuſa.

Erit

ĕrit illud triangulum quæſitum. Nam huius trianguli areă eſt 4, cui ſi addas *5* quantitatem datam, fiet numerus quadratus *9*.

Propositio XLI.

Inuenire triangulum rectangulum tale, vt area area multata quantitate data faciat quadratum.

ESto data quantitas *6*. & ponatur triangulum ſpecie 3 R. 4 R. 5 R. ergo *6* Q eſt eius area, propter rationem in præcedente allatam. Igitur *6* Q – *6* æquatur quadrato. Sit ille 4 Q. fiet 1 R æqualis ℞ *3*. quod propoſito noſtro non ſatisfacit, nam eius quadratum eſt *3* cuius ſextuplum 18 multatum *6*, facit 12, qui non eſt quadratus. Eo igitur res deducta eſt vt inueniatur triangulum rectangulum & numerus quadratus, ita vt ſi quadratus de area trianguli auferatur reſidui ſextuplum (propter datam quantitatem *6*) fiat quadratus 1. formetur triangulum rectangulum ab 1 R & $\frac{1}{1R}$. latus autem quadrati ſit 1 R – $\frac{3}{1R}$. (debet enim quantitatis datæ dimidium diuidi pĕr 1 R, vt fiat fractio numericā) ergo ĕius quadratus ĕſt 1 Q + $\frac{9}{1Q}$ – *6*. hunc ſi ab area 1 Q – $\frac{1}{1Q}$ tollas reſiduum $6 - \frac{10}{1Q}$. ĕſt ſextans quadrati. Quare eius ſextuplum $36 - \frac{60}{1Q}$ æquatur quadrata. & ductis omnibus in 1 Q, fit *36* Q – *60* æquandus quadrato. Fingĕ latus eius *6* R – 2. ergo eius quadratum *36* Q + 4 – 24 R æquatur *36* Q – *60* & fit 1 R æqualis $\frac{8}{3}$. quare ſi formetur triangulum rectangulum ab $\frac{8}{3}$ & $\frac{3}{8}$ habebis tria latera $\frac{4177}{576}$. $\frac{4015}{576}$. 2.

Redintĕgrĕtur opĕratio & iſti numeri afficiantur charactĕrĕ ra-

dicum, ſintque tria latera trianguli ab initio quæſiti $\frac{4177}{576}$ R, $\frac{4015}{576}$ R. 2 R. Ergo area eſt $\frac{4015}{576}$ Q. quæ proinde multata 6, æquatur quadrato $\frac{1369}{576}$ Q (hoc enim ſequitur ex operatione ſuperiori in qua reperta eſt I R æqualis $\frac{8}{3}$ iuxta quam reſolui debet quadratum 1 Q $+ \frac{9}{1Q} - - 6$) igitur $\frac{1369}{576}$ Q + 6 æquãtur $\frac{4015}{576}$ Q, & fit I R æqualis $\frac{72}{63}$. iuxta quam reſoluti tres coſſici dabunt latera trianguli rectanguli quæſiti. $\frac{300744}{36288}$. $\frac{289080}{36288}$. $\frac{144}{63}$.

Geometricè, fiat quodcumque triangulum rectangulum, modo media proportionalis inter baſim & ſemiſſem perpendiculi linea maior linea data quæ poteſt ſuperficiem: ſuper hanc mediam proportionalem fiat ſemicirculus, in quo ab extremitate diametri inſcribatur linea data, quæ connectatur cum altera diametri extremitate: hæc connexa erit latus quadrati poſtulati. Per 17. ſexti 31. tertii. 47 primi.

Scholium.

Breuiter poteſt expediri problema hoc modo: Cuicumquē numēro quadrato addatur quantitas data, vt numero quadrato 4 addatur datus 6 & ſumma 10 accipiatur pro baſe. Deinde ſumatur 2 pro perpendiculo, ac tandem horum duorum quadrata iungantur in vnam ſummam, vt fiant 104, huius ſummæ radix quadrata ℞. 104 accipiatur pro hypotenuſa, & habebitur triangulum quæſitum. Nam huius trianguli area eſt 10, vnde ſi tollatur numerus datus 6, reſtat numerus quadratus 4.

erit illud triangulum quæſitum. Nam huius trianguli area eſt 4, cui ſi addas *5* quantitatem datam, fiet numerus quadratus *9*.

Propositio XLI.

Inuenire triangulum rectangulum tale, vt area multata quantitate data faciat quadratum.

Esto data quantitas *6*. & ponatur triangulum ſpecie 3 R. 4 R. 5 R. ergo *6* Q eſt eius area, propter rationem in præcedente allatam. Igitur *6* Q *6* æquatur quadrato. Sit ille 4 Q fiet 1 R æqualis ℞ *3*. quod propoſito noſtro non ſatisfacit, nam eius quadratum eſt *3* cuius ſextuplum 18 multatum *6*, facit 12, qui non eſt quadratus. Eo igitur res deducta eſt vt inueniatur triangulum rectangulum & numerus quadratus, ita vt ſi quadratus de area trianguli auferatur reſidui ſextuplum (propter datam quantitatem *6*) fiat quadratus. formetur triangulum rectangulum ab 1 R & $\frac{1}{1R}$. latus autem quadrati ſit 1 R -- $\frac{3}{1R}$. (debet enim quantitatis datæ dimidium diuidi per 1 R, vt fiat fractio numerica) ergo eius quadratus eſt 1 Q † $\frac{9}{1Q}$ -- *6*. hunc ſi ab area 1 Q --- $\frac{1}{1Q}$ tollas reſiduum *6* -- $\frac{10}{1Q}$. eſt ſextans quadrati. Quare eius ſextuplum *36* --- $\frac{60}{1Q}$ æquatur quadrata. & ductis omnibus in 1 Q, fit *36* Q -- *60* æquandus quadrato. Finge latus eius *6* R -- 2. ergo eius quadratum *36* Q † 4 -- 24 R æquatur *36* Q -- *60* & fit 1 R æqualis $\frac{8}{3}$. quare ſi formetur triangulum rectangulum ab $\frac{8}{3}$ & $\frac{3}{8}$ habebis tria latera $\frac{4177}{576}$. $\frac{4015}{576}$. 2.

Redintegretur operatio & iſti numeri afficiantur charactere ra-

dicum, ſintque tria latera trianguli ab initio quæſiti $\frac{4177 R.}{576}$ $\frac{4015 R.}{576}$ 2 R. Ergo areà eſt $\frac{4015 Q.}{576}$ quæ proinde multata 6, æquatur quadrato $\frac{1369 Q}{576}$ (hoc enim ſequitur ex operatione ſuperiori in qua reperta eſt 1 R æqualis $\frac{8}{3}$ iuxta quam reſolui debet quadratum 1 Q † $\frac{9}{1Q}$ -- 6) igitur $\frac{1369 Q}{576}$ † 6 æquantur $\frac{4015 Q}{576}$, & fit 1 R æqualis $\frac{72}{63}$. iuxta quam reſoluti tres coſſici dabunt latera trianguli rectanguli quæſiti. $\frac{300744}{36288}$. $\frac{289080}{36288}$. $\frac{144}{63}$.

Geometricè, fiat quodcumque triangulum rectangulum, modo media proportionalis inter baſim & ſemiſſem perpendiculi linea maior linea data quæ poteſt ſuperficiem: ſupet hanc mediam proportionalem fiat ſemicirculus, in quo ab extremitate diametri inſcribatur linea data, quæ connectatur cum altera diametri extremitate: hæc connexa erit latus quadrati poſtulati. Per 17. ſexti 31 tertii. 47 primi.

Scholium.

Breuiter poteſt expediri problema hoc modo: Cuicumquē numēro quadrato addatur quantitas data, vt numero quadrato 4 addatur datus 6 & ſumma 10 accipiatur pro baſe. Deinde ſumatur 2 pro perpendiculo. ac tandem horum duorum quadrata iungantur in vnam ſummam, vt fiant 104, huius ſummæ radix quadrata ℞. 104 accipiatur pro hypotenuſa, & habebitur triangulum quæſitum. Nam huius trianguli area eſt 10, vnde ſi tollatur numerus datus 6, reſtat numerus quadratus 4.

PROPOSITIO XLII.

Inuenire triangulum rectangulum taliter, vt data quantitas multata trianguli area, faciat quadratum.

ESto data quantitas 10. & ponatur triangulum 3 R. 4 R. 5 R. ergo 10 -- 6 Q æquantur quadrato. Sit ille quadratus 4 Q & fit 1 R æqualis 1. Sed ſi valor radicis contingeret numerus ſurdus, eo res tandem deuolueretur, vt inueniretur triangulum rectangulum, & numerus quadratus ita vt quadratus aſſumpto areæ numero faceret dextantem quadrati (ob datam quantitatem 10. formetur triangulum ab 1 & 1 R. & quadrati latus ſit $\frac{1}{1R}$ † 5 R. erit igitur ſumma $\frac{}{1R}$ areæ trianguli & quadrati 26 Q † 10, cuius decuplum 260 Q † 100 æquandum eſt quadrato. finge latus 10 † 16 R. eius quadratus 100 † 256 Q † 320 R æquabitur 260 Q † 100. & fit 1 R æqualis 80. reliqua vt in duabus præcedentibus.

Geometricè fiat quodcumque triangulum rectangulum, modo media proportionalis inter baſim & perpendiculi ſemiſſem ſit minor linea data. Super lineam datam fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur (pro more) media proportionalis: connexa ad alteram extremitatem dabit latus quadrati quæſiti. Per 31. tertii. 47 primi. & 17 ſexti.

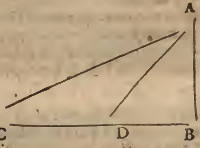
Scholium.

Sit data quantitas 28 hinc tollatur aliquis quadratus puta 16, reſiduum eſt 12. quem producunt 3 & 4. Sumantur 3 & 8 pro baſe & perpendiculo, & radix quadrata ſummæ quadratorum ab illis ortorum, ſeu ℞ 72 accipiatur pro hypotenuſa. & habebitur triangulum quæſitum. nam area huius trianguli rectanguli erit 12 quo ſublato ex 28, reſtat numerus quadratus 16.

Propositio LXIII.

Inuenite triangulum rectangulum, ita vt acutis eius angulis bifariam ſciſſis, ſecans angulum ſit rationalis.

IN triangulo A B C in quo A D ſecat bifariam angulum B A C, ponatur ſecans A D 5 R & A B perpendiculum 4 R. & D B 3 R. C B autem baſis trianguli ſtatuatur quotcumque vnitatum trientem habentium, vt vitentur fractiones, puta 3. ergo quoniam B D eſt 3 R. erit C D 3 --- 3 R. Sed quia ſupponitur angulus C A B viſariam ſectus, per A D, erit vt B D ad D C ita A B ad A C. Igitur cum tres priores lineæ notæ ſint, quarta A C nota erit 4 -- 4 R quare eius quadratus 16 † 16 Q --- 32 R debet æquari ſummæ quadratorum A B & B C quæ ſumma eſt 16 Q † 9. & fit I R æqualis $\frac{7}{32}$. & ductis omnibus in 32, erit A C 100. C B 96. A B 28 & A D ſecans 35.



Geometricè, fiat triangulum rectangulum habens baſim 96 & cathetum 28. erit illud quod poſcitur.

Propositio XLII.

Inuenire triangulum rectangulum taliter, vt data quantitas multata trianguli area, faciat quadratum.

ESto data quantitas 10. & ponatur triangulum 3 R. 4 R. 5 R. ergo 10 -- 6 Q æquantur quadrato. Sit ille quadratus 4 Q & ſit I R æqualis I. Sed ſi valor radicis contingeret numerus ſurdus, eo res tandem deuolueretur, vt inueniretur triangulum rectangulum, & numerus quadratus ita vt quadratus aſſumpto areæ numero faceret dextantem quadrati (ob datam quantitatem 10. formetur triangulum ab 1 & I R. & quadrati latus ſit 1 † 5 R. erit igitur ſumma

IR . IR

areæ trianguli & quadrati 26 Q † 10, cuius decuplum 260 Q † 100 æquandum eſt quadrato. finge latus 10 † 16 R. eius quadratus 100 † 256 Q † 320 R æquabitur 260 Q † 100. & ſit I R æqualis 80. reliqua vt in duabus præcedentibus.

Geometricè fiat quodcumque triangulum rectangulum, modo media proportionalis inter baſim & perpendiculi ſemiſſem ſit minor linea data. Super lineam datam fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur (pro more) media proportionalis: connexa ad alteram extremitatem dabit latus quadrati quæſiti. Per 31. tertii. 47 primi. & 17 ſexti.

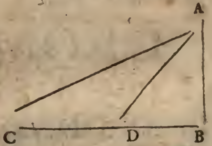
Scholium.

Sit data quantitas 28 hinc tollatur aliquis quadratus puta 16, reſiduum eſt 12. quem producunt 3 & 4. Sumantur 3 & 8 pro baſe & perpendiculo, & radix quadrata ſummæ quadratorum ab illis ortorum, ſeu ℞ 73 accipiatur pro hypotenuſa. & habebitur triangulum quæſitum. nam area huius trianguli rectanguli erit 12 quo ſublato ex 28, reſtat numerus quadratus 16.

Propositio LXIII.

Innenite triangulum rectangulum, ita vt acutis eius angulis bifariam ſciſsis, ſecans angulum ſit rationalis.

IN triangulo A B C in quo A D ſecat bifariam angulum B A C, ponatur ſecans A D 5 R & A B perpendiculum 4 R. & D B 3 R. C B autem baſis trianguli ſtatuatur quotcumque vnitatum trientem habentium, vt vitentur fractiones, puta 3. ergo quoniam B D eſt 3 R. erit C D 3 -- 3 R. Sed quia ſupponitur angulus C A B viſariam ſectus, per A D, erit vt B D ad D C ita A B ad A C. Igitur cum tres priores lineæ notæ ſint, quarta A C



nota erit 4 -- 4 R quare eius quadratus 16 † 16 Q -- 32 R debet æquari ſummæ quadratorum A B & B C quæ ſumma eſt 16 Q † 9. & fit I R æqualis $\frac{7}{32}$. & ductis omnibus in 32, erit A C 100. C B 96. A B 28 & A D ſecans 35.

Geometricè, fiat triangulum rectangulum habens baſim 96 & cathetum 28. erit illud quod poſcitur.

DIOPHANTI GEOMETRÆ.

LIBER SECVNDVS

IN QVO PLVRIMÆ QVÆSTIONES Diophantæis difficiliores & ſublimiores, tùm per Algebram communem, tùm etiam per ſpecioſam, & quod hic præſertim intendimus, per Geometriam abſoluuntur : vnde meritò Diophantus Geometra Promotus vocari poſſit.

Propositio I.

Datam quantitatem diuidere in quotlibet partes, quæ habeant inter ſe proportionem datam.

ESTO datus numerus 100 diuidendus in tres partes, taliter vt prima ad ſecundam ſit vt 1 ad 9, & ſecunda ad tertiam ſit vt 3 ad 5. Ponatur prima pars 1 R fiatque vt 1 ad 9 ita 1 R ad aliud, quod erit 9 R. Deinde fiat vt 3 ad 5 ita 9 R ad aliud, quod erit $\frac{45\,R}{3}$. Horum trium ſumma $\frac{75\,R}{3}$ æquatur numero diuidendo 100. igitur 75 R ſunt

æquales 300. & ſit I R ſiue prima pars æqualis 4. Ergo ſecunda erit 36, & tertia 60, quæ ſimul æquantur 100. & habent rationem datam.

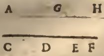
Per Algebram ſpecioſam, detur B quantitas diuidenda, & prima ratio C ad D, ſecunda autem D ad F. Ponatur A prima pars ipſius B, fiatque vt C ad D ita A ad aliud $\frac{DA}{C}$. Deinde vt D ad F ita fiat $\frac{DA}{C}$ ad aliud $\frac{DAF}{CD}$. tres illæ partes ſimul additæ conficiunt $\frac{AC + DA + AF}{C}$ æqualia B. igitur BC æquatur AC + DA + AF, ac proinde diuiſa vtraque parte æquationis per C + D F, fit A æqualis $\frac{BC}{C + D + F}$.

Hinc Canon.

Terminos rationum ita inter ſe aptato, vt conſequens primæ ſit etiam antecedens ſecundæ : & conſequens ſecundæ, ſit quoque antecedens tertiæ : & ſic deinceps : tùm fiat vt ſumma terminorum ad quemlibet, ita quantitas diuidenda ad alias, & habebuntur partes quæſitæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit A B quantitas diuidenda in tres partes, ita vt prima ad ſecundam ſit vt C D ad D E : ſecunda verò ad tertiam vt D E ad E F. Fiat vt C F ad C D ita A B ad A G. Deinde vt C F ad D E ita A B ad G H. Dico A B diuiſam eſſe in tres ſecundum rationes datas. Nam quia eſt C F ad C D vt A B ad A G, erit permutando C F ad A B vt C D ad A G. &



inuertendo vt A B ad C F ita G H ad D E. Ergo vt A G ad C D ita G H ad D E. & permutando vt A G ad G H ita C D ad D E. quod eſt vnum ex propoſitis.

Sed quia oſtenſum eſt vt A B ad C F ita eſſe A G ad C D & G H ad D E. erit etiam vt A B ad C F ita A H ad C E (per 12 quinti) quia igitur eſt vt tota A B ad totam C F ita ablata A H ad ablatam

DIOPHANTI GEOMETRÆ.

LIBER SECVNDVS

IN QVO PLVRIMÆ QVÆSTIONES Diophantæis difficiliores & ſublimiores, tùm per Algebram communem, tùm etiam per ſpecioſam, & quod hic præſertim intendimus, per Geometriam abſoluuntur : vnde meritò Diophantus Geometra Promotus vocari poſſit.

Propositio I.

Datam quantitatem diuidere in quotlibet partes, quæ habeant inter ſe proportionem datam.

ESTO datus numerus 100 diuidendus in tres partes, taliter vt prima ad ſecundam ſit vt 1 ad 9, & ſecunda ad tertiam ſit vt 3 ad 5. Ponatur prima pars 1 R fiatque vt 1 ad 9 ita 1 R ad aliud, quod erit 9 R. Deinde fiat vt 3 ad 5 ita 9 R ad aliud, quod erit 45 R. Horum trium ſumma $\frac{75 R}{3}$ æquatur numero diuidendo 100. igitur $\frac{75 R}{3}$ ſunt

æquales 300. & fit IR ſiue prima pars æqualis 4. Ergo ſecunda erit 36, & tertia 60, quæ ſimul æquantur 100. & habent rationem datam.

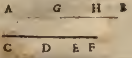
Per Algebram ſpecioſam, detur B quantitas diuidenda, & prima ratio C ad D, ſecunda autem D ad F. Ponatur A prima pars ipſius B, fiatque vt C ad D ita A ad aliud $\frac{DA}{C}$. Deinde vt D ad F ita fiat $\frac{DA}{C}$ ad aliud $\frac{DAF}{CD}$. tres illæ partes ſimul additæ conficiunt $\frac{AC+DA+AF}{C}$ æqualia B. igitur BC æquatur AC + DA + AF. ac proinde diuiſa vtraque parte æquationis per C + D F, fit A æqualis. $\frac{BC}{C+D+F}$

Hinc Canon.

Terminos rationum ita inter ſe aptato, vt conſequens primæ ſit etiam antecedens ſecundæ : & conſequens ſecundæ, ſit quoque antecedens tertiæ : & ſic deinceps : tùm fiat vt ſumma terminorum ad quemlibet, ita quantitas diuidenda ad alias, & habebuntur partes quæſitæ.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit A B quantitas diuidenda in tres partes, ita vt prima ad ſecundam ſit vt C D ad D E : ſecunda verò ad tertiam vt D E ad E F. Fiat vt C F ad C D ita A B ad A G. Deinde vt C F ad D E ita A B ad G H. Dico A B diuiſam eſſe in tres ſecundum rationes datas. Nam quia eſt C F ad C D vt A B ad A G, erit permutando C F ad A B vt C D ad A G. &



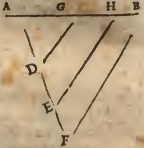
inuertendo vt A B ad C F ita G H ad D E. Ergo vt A G ad C D ita G H ad D E. & permutando vt A G ad G H ita C D ad D E. quod eſt vnum ex propoſitis.

Sed quia oſtenſum eſt vt A B ad C F ita eſſe A G ad C D & G H ad D E. erit etiam vt A B ad C F ita A H ad C E (per 12 quinti) quia igitur eſt vt tota A B ad totam C F ita ablata A H ad ablatam

CE. erit & reliqua H B ad reliquam E F vt tota A B ad totam CE. Sed iam probauimus eſſe vt A B ad CF GH ad D E. Ergo vt G H ad D E ita H B ad E F. & permutando vt GH ad HB ita DE ad E F. quod erat alterum ex propoſitis. Ergo diuiſa eſt A B in punctis G H ſecundum rationes poſtulatas. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Id in praxi facillimè fiet connectendo duas lineas ad angulum quemcumque in puncto A & nectendo F B, & à punctis D & E quæ iam habentur ducendo E H & G D parallelas F B Demonſtratio huius praxeos conſtat ex 2 ſexti.



Propositio II.

Quantitatem datam diuidere, in tres quarum partes præſcriptæ faciant datam quantitatem.

Esto datus numerus 29 diuidendus in tres, ita vt triens primi quadrans ſecundi & quintans tertii conficiant 7. Ponatur primus I R, igitur reliqui duo erunt 29 -- I R. primi triens eſt $\frac{1R}{3}$ proindeque quadrans ſecundi & quintans tertii erunt $7 - \frac{1R}{3}$. ergo propter conditionem explicatam in Propoſ. V. lib. 1. neceſſe eſt vt $7 - \frac{1R}{3}$ ſuperentur à quadrante 29 -- I R & ſuperent eius quintantem. Certum eſt autem $7 - \frac{1R}{3}$ ſuperari ab ipſius quadrante qui eſt $\frac{29 - 1R}{4}$. Nam reducto priori in fractionem fiunt $\frac{21 - 1R}{3}$ & duo-

bus poſterioribus multiplicatis in crucem, fit illinc 87 -- 3 R, hinc vero 84 -- 4 R. & ablatis vtrobique 84. - 3 R, fit illinc 3 hinc autem -- 1 R. igitur quadrans 29 -- 1 R prædictum numerum ſuperat. Nunc ergo oportet vt prædictus numerus ſuperet quintantem 29 -- 1 R. Quod ſi pro certo ſupponatur $\frac{21 - - 1 R}{3}$ maior erit $\frac{29 - - 1R}{5}$. ergo multiplicatis illis in crucem, fiet illinc 105 - 5 R, hinc verò 87 -- 3 R. Itaque 105 -- 5 R maior eſt 87 -- 3 R. ac proinde ſublatis vtrinque 87 & additis 5 R. fiet 18 maior 2 R. diuiſiſque 18 per 2, extat 9 pro termino infra quem debet ſumi valor 1 R. Quare ſi capias 6 pro valore 1 R eamque tollas a 29, vt fiant 23. & aufer trientem 6 nempe 2 à numero dato 7, vt fiant 5 diuidaſque 23 per Propoſ. V. Lib. I. in duos, ita vt quadrans primi & quintans ſecundi faciant 5. inuenies, tres numeros quæſitos 6. 8. 15. Similiter ſi capias 3 pro valore 1 R, inuenies tres numeros quæſitos 3. 16. 10. & ſic infinitè ſolui poteſt quæſtio.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & conficienda C, & iiſdem partibus quæ ſupra datæ ſunt: ſi ponas A pro prima parte, deprehendes 15 C -- 3 B maiorem eſſe debere 2 A. & ſic $\frac{15 C - - 3 B}{2}$ eſſe terminum, infra quem debet ſumi valor radicis.

Hinc Canon.

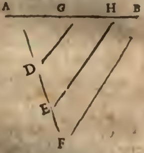
Ex tribus fractionibus datis partes præſcriptas indicantibus, elige quamcumque volueris pro prima, ac per huius denominatorem multiplica ſigillatim numeratorem & denominatorem fractionis ex ſequentibus à primâ remotioris: primum productum duc in quantitatem diuidendam, ſecundum verò in quantitatem conficiendam, minorem tolle à maiore, & reſiduum ſerua. Deinde primam fractionem diuide per eam, quæ à prima remotior eſt, & per numeratoris ac denominatoris de nouo facti differentiam, diuide reſiduum ſupra ſeruatum, habebiſque terminum, infra quem capies vt volueris quantitatis diuidendæ partem illam quæ prima fractione exprimitur. Vnde reliquæ per Propoſ. V, Lib. I. non latebunt,

Hinc

CE. erit & reliqua HB ad reliquam EF vt tota AB ad totam CE. Sed iam probauimus eſſe vt AB ad CF GH ad DE. Ergo vt GH ad DE ita HB ad EF. & permutando vt GH ad HB ita DE ad EF. quod erat alterum ex propoſitis. Ergo diuiſa eſt AB in punctis GH ſecundum rationes poſtulatas. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Id in praxi facillimè fiet connectendo duas lineas ad angulum quemcumque in puncto A & nectendo FB, & à punctis D & E quæ iam habentur ducendo EH & GD parallelas FB. Demonſtratio huius praxeos conſtat ex 2 ſexti.



PROPOSITIO II.

Quantitatem datam diuidere, in tres quarum partes præſcriptæ faciant datam quantitatem.

ESto datus numerus 29 diuidendus in tres, ita vt triens primi qua. drans ſecundi & quintans tertii conficiant 7. Ponatur primus 1 R, igitur reliqui duo erunt 29 -- 1 R. primi triens eſt $\frac{1R}{3}$ proindeque quadrans ſecundi & quintans tertii erunt 7 -- $\frac{1R}{3}$ ergo propter conditionem explicatam in Propoſ. V. lib. 1. neceſſe eſt vt 7 --- $\frac{1R}{3}$ ſuperentur à quadrante 29 -- 1 R & ſuperent eius quintantem. Certum eſt autem 7 --- $\frac{1R}{3}$ ſuperari ab ipſius quadrante qui eſt $\frac{29 -- 1R}{4}$. Nam reducto priori in fractionem fiunt 21 -- $\frac{1R}{3}$ & duo-

bus poſterioribus multiplicatis in crucem; fit illinc 87 -- 3 R, hinc vero 84 -- 4 R, & ablatis vtrobique 84 -- 3 R, fit illinc 3 hinc autem -- 1 R. igitur quadrans 29 -- 1 R prædictum numerum ſuperat. Nunc ergo oportet vt prædictus numerus ſuperet quintantem 29 -- 1 R. Quod ſi pro certo ſupponatur $\frac{21 - 1 R}{3}$ maior erit $\frac{29 - 1 R}{5}$ ergo multiplicatis illis in crucem, fiet illinc 105 - 5 R, hinc verò 87 -- 3 R. Itaque 105 -- 5 R maior eſt 87 -- 3 R. ac proinde ſublatis vtrinque 87 & additis 5 R. fiet 18 maior 2 R. diuiſiſque 18 per 2, extat 9 pro termino infra quem debet ſumi valor 1 R. Quare ſi capias 6 pro valore 1 R eamque tollas a 29, vt fiant 23. & aufer trientem 6 nempe 2 a numero dato 7, vt fiant 5 diuidaſque 23 per Propoſ. V. Lib. I. in duos, ita vt quadrans primi & quintans ſecundi faciant 5. inuenies, tres numeros quæſitos 6. 8. 15. Similiter ſi capias 3 pro valore 1 R, inuenies tres numeros quæſitos 3. 16. 10. & ſic infinitè ſolui poteſt quæſtio.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & conficienda C, & iiſdem partibus quæ ſupra datæ ſunt: ſi ponas A pro prima parte, deprehendes 15 C -- 3 B maiorem eſſe debere 2 A, & ſic $\frac{15 C - 3 B}{2}$ eſſe terminum, infra quem debet ſumi valor radicis.

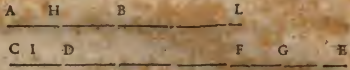
Hinc Canon.

Ex tribus fractionibus datis partes præſcriptas indicantibus, elige quamcumque volueris pro prima, ac per huius denominatorem multiplica ſigillatim numeratorem & denominatorem fractionis ex ſequentibus à primâ remotioris: primum productum duc in quantitatem diuidendam, ſecundum verò in quantitatem conficiendam, minorem tolle à maiore, & reſiduum ſerua. Deinde primam fractionem diuide per eam, quæ à prima remotior eſt, & per numeratoris ac denominatoris de nouo facti differentiam, diuide reſiduum ſupra ſeruatum, habebiſque terminum, infra quem capies vt volueris quantitatis diuidendæ partem illam quæ prima fractione exprimitur. Vnde reliquæ per Propoſ. V. Lib. I. non latebunt.

Hinc

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea A B diuidenda in tres partes, ita vt triens primæ, quadrans ſecundæ, & quintans tertiæ æquentur C D. accipiatur A L tripla A B & C E quindecupla C D, tùm reſecetur C F æqualis A L & reliqua F E diuidatur bifariam in G. accipiaturque A H minor F G, cuius triens ſit C I, & per propoſ. 5. lib. 1. huius diuidatur H B in duas tali ratione, vt quadrans vnius & quintans alterius æquentur I D. Dico duas illas cum A H fore tres quæſitas. Nam cum quadrans & quintans illarum duarum ſint æquales I D, & C I triens A H, ſequitur totam A B diuiſam eſſe in tres partes, ita vt triens primæ, quadrans ſecundæ, & quintans tertiæ, æquentur



toti C D. quod erat demonſtrandum.

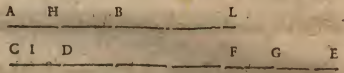
Dixi autem A H debere eſſe minorem F G, ſi enim ſumeretur æqualis ipſi non poſſet ſolui problema, quod ſic demonſtro. C I eſt triens A H, ergo H B debet diuidi in duas, ita vt quadrans vnius & quintans alterius æquentur I D. Igitur I D debet cadere inter quadrantem & quintantem H B (vt probauimus in propoſ. 5. libro 1.) at ſi A H eſt æqualis F G, non caderet I D inter quadrantem & quintantem H B, ſiquidem cum C E ſit quindecupla C D, & C F ſit æqualis A L, & F E dupla A H, erit A L plus dupla A H quindecupla C D. Ergo A L plus dupla A H eſt quindecupla C I, & quindecupla I D. ac proinde cum A H ſit tripla C I, erit A L quindecupla I D, & noncupla C I. ſed A B eſt triens A L, igitur A B æquatur triplo C I, plus quintuplo I D. A H autem tripla eſt C I. Ergo reliqua H B quintupla eſt I D. ac propterea cum I D ſit quintans H B, non poterit I D cadere inter quintantem & quadrantem H B. Ergo A H non poteſt ſumi æqualis F G, & à fortiori non poterit ſuum maior F G. ac proinde ſumi debet minor. Non definitur autem quantitas A H, quia eiuſmodi quæſtio infinities ſolus poteſt.

Scholium.

Rectè adnotauit Bachetus ad qu. 5. l. 1. Diophanti quamlibet quantitatem diuidi poſſe in plura ſegmenta quorum partes præſcriptæ faciant quantitatem datam. Sit enim numerus 70 diuidendus in quatuor, ita vt $\frac{1}{2}$ primi, $\frac{2}{3}$ ſecundi $\frac{4}{5}$ tertii, &. $\frac{6}{7}$ quarti ſint æquales 57. Ponatur primus 1 R, ergo reliqui ſimul erunt 70 -- 1 R, eſt autem ſemiſſis primi $\frac{1}{2}$ R, igitur 57 --- $\frac{1}{2}$ R continebit $\frac{2}{3}$ ſecundi & $\frac{4}{5}$ tertii & $\frac{6}{7}$ quarti. Oportet ergo vt 57 -- $\frac{1}{2}$ R cadat inter $\frac{2}{3}$ & $\frac{6}{7}$ de 70 --- 1 R. manifeſtum eſt autem eſſe maiorem $\frac{2}{3}$, reſtat ergo vt ſit minor $\frac{6}{7}$ quod ita efficiatur. $\frac{6}{7}$ de 70 — 1 R ſunt $\frac{420 --- 6 R}{7}$ quæ propterea debent ſuperare 57 — $\frac{1}{2}$ R. Ergo per multiplicationem in crucem 840 --- 12 R ſuperabunt 798 --- 7 R. igitur $\frac{42}{5}$ ſuperat 1 R. talis itaque eſt terminus infra quem ſumes valorem radicis. Capiatur ad libitum 2 & ſubtrahatur à 70, vt fiat 68. ſimiliter ſemiſſis 2 ſubtrahatur à 57 vt fiat 56, & per ea quæ dicta ſunt in propoſitione, diuidatur 68 in tres, ita vt $\frac{2}{3}$ vnius, $\frac{4}{5}$ alterius, & $\frac{6}{7}$ poſtremi faciant 56. infiniti ſunt numeri ſoluentes quæſtionem en tibi tres 9. 10. 49. ergo quatuor numeri ſequentes ſatisfaciunt quæſtioni 2, 9, 10, 49. hæc fert ex Gaſpare Bacheto.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea A B diuidenda in tres partes, ita vt triens primæ, quadrans ſecundæ, & quintans tertiæ æquentur C D. accipiatur A L tripla A B & C E quin de cupla C D, tùm reſecetur C F æqualis A L & reliqua F E diuidatur bifariam in G. accipiaturque A H minor F G, cuius triens ſit C I, & per propoſ. 5. lib. 1. huius diuidatur H B in duas tali ratione, vt quadrans vnius & quintans alterius æquentur I D. Dico duas illas cum A H fore tres quæſitas. Nam cum quadrans & quintans illarum duarum ſint æquales I D, & C I triens A H, ſequitur totam A B diuiſam eſſe in tres partes, ita vt triens primæ, quadrans ſecundæ, & quintans tertiæ, æquentur



toti C D. quod erat demonſtrandum.

Dixi autem A H debere eſſe minorem F G, ſi enim ſumeretur æqualis ipſi non poſſet ſolui problema, quod ſic demonſtro. C I eſt triens A H, ergo H B debet diuidi in duas, ita vt quadrans vnius & quintans alterius æquentur I D. Igitur I D debet cadere inter quadrantem & quintantem H B (vt probauimus in propoſ. 5. libro 1.) at ſi A H eſt æqualis F G, non caderet I D inter quadrantem & quintantem H B, ſiquidem cum C E ſit quindecupla C D, & C F ſit æqualis A L, & F E dupla A H, erit A L plus dupla A H quindecupla C D. Ergo A L plus dupla A H eſt quindecupla C I, & quindecupla I D. ac proinde cum A H ſit tripla C I, erit A L quindecupla I D, & noncupla C I. ſed A B eſt triens A L, igitur A B æquatur triplo C I, plus quintuplo I D. A H autem tripla eſt C I. Ergo reliqua H B quintupla eſt I D. ac propterea cum I D ſit quintans H B, non poterit I D cadere inter quintantem & quadrantem H B. Ergo A H non poteſt ſumi æqualis F G, & à fortiori non poterit ſuum maior F G. ac proinde ſumi debet minor. Non definitur autem quantitas A H, quia eiuſmodi quæſtio infinities ſolus poteſt.

Scholium.

Rectè adnotauit Bachetus ad qu. 5. l. 1. Diophanti quamlibet quantitatem diuidi poſſe in plura ſegmenta quorum partes præſcriptæ faciant quantitatem datam. Sit enim numerus 70 diuidendus in quatuor, ita vt $\frac{1}{2}$ primi, $\frac{2}{3}$ ſecundi $\frac{4}{5}$ tertii, & $\frac{6}{7}$ quarti ſint æquales 57. Ponatur primus 1 R, ergo reliqui ſimul erunt 70 -- 1 R, eſt autem ſemiſſis primi $\frac{1}{2}$ R, igitur 57 --- $\frac{1}{2}$ R continebit $\frac{2}{3}$ ſecundi & $\frac{4}{5}$ tertii & $\frac{6}{7}$ quarti. Oportet ergo vt 57 -- $\frac{1}{2}$ R cadat inter $\frac{2}{3}$ & $\frac{6}{7}$ de 70 --- 1 R. manifeſtum eſt autem eſſe maiorem $\frac{2}{3}$. reſtat ergo vt ſit minor $\frac{6}{7}$ quod ita efficiatur. $\frac{6}{7}$ de 70 —— 1 R ſunt $\frac{420 \text{ --- } 6\text{ R}}{7}$ quæ propterea debent ſuperare 57 —— $\frac{1}{2}$ R. Ergo per multiplicationem in crucem 840 --- 12 R ſuperabunt 798 --- 7 R. igitur $\frac{42}{5}$ ſuperat 1 R. talis itaque eſt terminus infra quem ſumes valorem radicis. Capiatur ad libitum 2 & ſubtrahatur à 70, vt fiat 68. ſimiliter ſemiſſis 2 ſubtrahatur à 57 vt fiat 56, & per ea quæ dicta ſunt in propoſitione, diuidatur 68 in tres, ita vt $\frac{2}{3}$ vnius, $\frac{4}{5}$ alterius, & $\frac{6}{7}$ poſtremi faciant 56. infiniti ſunt numeri ſoluentes quæſtionem en tibi tres. 9. 10. 49. ergo quatuor numeri ſequentes ſatisfaciunt quæſtioni 2. 9. 10. 49. hæc fert ex Gaſpare Bacheto.

Propositio III.

Quantitatem datam diuidere in quatuor ſegmenta, ita vt quolibet dante alteri imperatam ſui partem, & inſuper datam quantitatem, fiat æqualitas.

ESto datus numerus *96* diuidendus in quatuor ſegmēnta, ſic vt ſi primum det ſecundo trientem ſui plus *4*, ſecundum tertio decimam ſui partem plus 2, tertium quarto ſui ſeptantem plus 4, & quartum primo tres ſui nonas plus 8, fiat æqualitas. Ponatur primum ſegmentum 1 R, & quia debet fieri æqualitas in 24 quadrante numeri diuidendi *96* (ob rationem allatam in Propoſ. XXXII. Lib. I, & aliunde ſecundus ſegmentum plus accipit à primo quam tribuat tertio, differentia accepti 4 & dati 2 tollatur de 24 vt fiant 22. tùm quia ſecundum accipit à primo $\frac{1}{3}$ & retinet $\frac{9}{10}$ reductis illis ad eamdem denominationem $\frac{10}{30}$ & $\frac{27}{30}$ & multiplicatis 22 per denominatorem communem *30*, productus *660* continebit primum ſegmentum decies ob primum numeratorem 10, & ſegmentum ſecundum vigeſies ſepties ob ſecundum numeratorem *27*. Ergo quoniam primum ſegmentum eſt 1 R, ſi 10 R tollas ex *660*, reſiduum *660* — 10 R continebit ſecundum ſegmentum vigeſies ſepties & propterea ſecundum ſegmentum eſt. $\frac{660 - 10 R}{27}$.

Similiter quoniam ſegmentum tertium plus dat quarto quam accipiat à ſecundo, differentia accepti & dati 2 addatur 24 quadranti numeri diuidendi, vt fiant *26*, tùm quia tertium ſegmentum accipit $\frac{1}{10}$ ſecundi & retinet $\frac{6}{7}$ ſui, reductis illis fractionibus ad eamdem denominationem $\frac{7}{70}$ & $\frac{60}{70}$, multiplicentur *26* per denominatorem communem *70*, & fient 1820 in quibus continebitur ſecundum ſegmentum ſepties, & tertium ſexageſies (ob numeratores *7* &

60) quare ſi ſegmentum ſecundum ſupra inuentum ducas in 7 & productum tollas à 1820, & reſiduum diuidas per 60, fiet tertium ſegmentum $\frac{44520 \dagger 70\ R.}{1610}$

Deinde quartum ſegmentum dat primo plus quam primum ſecundo, & propterea ſi illorum differentiam 4 tollas de 24 quadrante numeri diuidendi vt fiant 20, in eo continebuntur exactè $\frac{2}{3}$ primi & $\frac{3}{9}$ quarti, ac proinde, ſi duas illas fractiones reducas ad eamdem denominationem $\frac{18}{27}$ & $\frac{19}{27}$ & per communem denomiuatorem 27 multiplices 20, productus 540 continebit octodecies primum ſegmentum, & nouies quartum. Quare cum primum ſegmentum ſit 1R, ſi 18 R tollas de 540, & reſiduum diuidas per 9, fiet quartum ſegmentum, $\frac{540 --- 18\ R.}{9}$

Hæc quatuor ſegmenta in vnam ſummam collecta faciunt $\frac{181320 --- 2150\ R}{1610}$ æqualia 96. igitur 1 R eſt 12, & quatuor ſegmenta quæſita ſigillatim ſunt 12 20 28 36 ſatisfacientia quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, data ſit quantitas diuidenda B, & oporteat illam diuidere in quatuor ſegmenta taliter vt ſi primum & ſecundo $\frac{1}{3}$ plus C, ſecundum tertio $\frac{1}{10}$ plus D, tertium quarto $\frac{1}{7}$ plus F & quartum primo $\frac{3}{9}$ plus H, fiat æqualitas. Ponatur primum ſegmentum A, & ſit C maior D, ergo C D tolli debet ex quadrante B, & ſit reſiduum $\frac{B \dagger 4 D -- 4 C}{4}$ æquale $\frac{1}{5}$ primi & $\frac{9}{10}$ ſecundi, & reductis illis fractiſque ſimilibus multiplicationibus & diuiſionibus erit ſecundum ſegmeutum $\frac{30 B \dagger 120 D -- 120 C -- 40 A.}{108}$

Similiter

Propositio III.

Quantitatem datam diuidere in quatuor ſegmenta, ita vt quolibet dante alteri imperatam ſui partem, & inſuper datam quantitatem, fiat æqualitas.

Esto datus numerus *96* diuidendus in quatuor ſegmēnta, ſic vt ſi primum det ſecundo trientem ſui plus *4*, ſecundum tertio decimam ſui partem plus 2, tertium quarto ſui ſeptantem plus 4, & quartum primo tres ſui nonas plus 8, fiat æqualitas. Ponatur primum ſegmentum I R, & quia debet fieri æqualitas in 24 quadrante numeri diuidendi *96* (ob rationem allatam in Propoſ. XXXII. Lib. I, & aliunde ſecundus ſegmentum plus accipit à primo quam tribuat tertio, differentia accepti 4 & dati 2 tollatur de 24 vt fiant 22. tùm quia ſecundum accipit à primo $\frac{1}{3}$ & retinet $\frac{9}{10}$ reductis illis ad eamdem denominationem $\frac{10}{30}$ & $\frac{27}{30}$ & multiplicatis 22 per denominatorem communem *30*, productus *660* continebit primum ſegmentum decies ob primum numeratorem 10, & ſegmentum ſecundum vigeſies ſepties ob ſecundum numeratorem 27. Ergo quoniam primum ſegmentum eſt I R, ſi 10 R tollas ex *660*, reſiduum *660* -- 10 R continebit ſecundum ſegmentum vigeſies ſepties & propterea ſecundum ſegmentum eſt. $\frac{660 - 10 R}{27}$.

Similiter quoniam ſegmentum tertium plus dat quarto quam accipiat à ſecundo, differentia accepti & dati 2 addatur 24 quadranti numeri diuidendi, vt fiant *26*, tùm quia tertium ſegmentum accipit $\frac{1}{10}$ ſecundi & retinet $\frac{6}{7}$ ſui, reductis illis fractionibus ad eamdem denominationem $\frac{7}{70}$ & $\frac{60}{70}$, multiplicentur *26* per denominatorem communem 70, & fient 1820 in quibus continebitur ſecundum ſegmentum ſepties, & tertium ſexageſies (ob numeratores 7 &

60) quare ſi ſegmentum ſecundum ſupra inuentum ducas in 7 & productum tollas à 1820, & reſiduum diuidas per 60, fiet tertium ſegmentum $\frac{44520 \dagger 70\,R}{1610}$.

Deinde quartum ſegmentum dat primo plus quam primum ſecundo, & propterea ſi illorum differentiam 4 tollas de 24 quadrante numeri diuidendi vt fiant 20, in eo continebuntur exactè $\frac{2}{3}$ primi & $\frac{3}{9}$ quarti, ac proinde, ſi duas illas fractiones reducas ad eamdem denominationem $\frac{18}{27}$ & $\frac{19}{27}$ & per communem denomiuatorem 27 multiplices 20, productus 540 continebit octodecies primum ſegmentum, & nouies quartum. Quare cum primum ſegmentum ſit 1 R, ſi 18 R tollas de 540, & reſiduum diuidas per 9, fiet quartum ſegmentum, $\frac{540 --- 18\,R}{9}$.

Hæc quatuor ſegmenta in vnam ſummam collecta faciunt $\frac{181320 --- 2150\,R}{1620}$ æqualia 96. igitur 1 R eſt 12, & quatuor ſegmenta quæſita ſigillatim ſunt 12 20 28 36 ſatisfacientia quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, data ſit quantitas diuidenda B, & oporteat illam diuidere in quatuor ſegmenta taliter vt ſi primum & ſecundo $\frac{1}{3}$ plus C, ſecundum tertio $\frac{1}{10}$ plus D, tertium quarto $\frac{1}{7}$ plus F & quartum primo $\frac{3}{9}$ plus H, fiat æqualitas. Ponatur primum ſegmentum A, & ſit C maior D, ergo C · D tolli debet ex quadrante B, & fit reſiduum $\frac{B \dagger 4D - 4C}{4}$ æquale $\frac{1}{3}$ primi & $\frac{9}{10}$ ſecundi, & reductis illis fractiſque ſimilibus multiplicationibus & diuiſionibus erit ſecundum ſegmentum $\frac{30B \dagger 120D -- 120C -- 40A}{108}$.

Similiter

Similiter quoniam tertium ſegmentum plus dat quarto, vt ſuppoſuimus, quam accipiat à ſecundo, differentia F--D addatur quadrāti B., & ſumma B † 4 F--4 D eſt æqualis 1 ſecundi ſegmenti & 6 tertij

4 . 10 . 7

exactè, quare poſt factas eaſdem multiplicationes ſubtractiones & diuiſiones quas fecimus in operatione Algebrica communi, extabit tandem tertium ſegmentum 1680 B † 840 C † 280 A † 7560 F--8400 D.

6410

Pari modo quoniam quartum ſegmentum dat primo plus quam primum ſecundo, (ſuppono enim H majorem C) tolli debet H--C de quadrante B, & reſiduum B † 4 C--4 H continet exactè 2 primi

4 . 3

& 1 quarti: ergo poſt ſupradictas operationes repetitas, erit quar-

3

tum ſegmentum 3 B † 12 C--12 H--8 A.

4

Horum quatuor ſegmentorum ſumma debet æquari quantitati B ergo A æqualis eſt 8340 B † 13080 C † 7560 F--622080--19440-H---1200 D.

8900

Hinc Canon.

Formari poteſt vt fecimus ad Propoſ. XXXII. Lib. 1. ſed quoniam eſt ad modum intricatus, ideò illum omittemus, tùm ne ſimus tædio lectori, tùm etiam quia ſine illius ope poteſt inſtitui.

Effectio Geometrica.

Sit linea AB diuidenda in quatuor ſegmenta taliter, vt ſi primum dederit ſecundo trientem ſui plus CD, ſecundum tertio ſui dextandem plus CI, tertium quarto ſeptantem ſui plus eadem CD, quartum denique primo tres nonas ſui plus CE, poſt datum & acceptum fiat æqualitas. Diuidatur primò linea AB quadrifariam in punctis FGH: & quoniam primum ſegmentum plus accipit à quarto, quam tribuat ſecundo, ſeu quoniam CE major eſt CD, capiatur FK æqualis DE. Deinde quia ſecundum ſegmentum plus accipit à primo quam tribuat tertio, ſeu quia CD maior eſt CI, propterea

bus poſterioribus multiplicatis in crucem; fit illinc 87 -- 3 R, hinc vero 84 -- 4 R. & ablatis vtrobique 84. -- 3 R, fit illinc 3 hinc autem -- 1 R. igitur quadrans 29 -- 1 R prædictum numerum ſuperat. Nunc ergo oportet vt prædictus numerus ſuperet quintantem 29 -- 1 R. Quod ſi pro certo ſupponatur $\frac{21 -- 1 R}{3}$ maior erit $\frac{29 - 1R}{5}$. ergo multiplicatis illis in crucem, fiet illinc 105 - 5 R, hinc verò 87 -- 3 R. Itaque 105 -- 5 R maior eſt 87 -- 3 R. ac proinde ſublatis vtrinque 87 & additis 5 R. fiet 18 maior 2 R. diuiſiſque 18 per 2, extat 9 pro termino infra quem debet ſumi valor 1 R. Quare ſi capias 6 pro valore 1 R eamque tollas a 29, vt fiant 23. & aufer trientem 6 nempe 2 a numero dato 7, vt fiant 5 diuidaſque 23 per Propoſ. V. Lib. I. in duos, ita vt quadrans primi & quintans ſecundi faciant 5. inuenies, tres numeros quæſitos 6. 8. 15. Similiter ſi capias 3 pro valore 1 R, inuenies tres numeros quæſitos 3. 16. 10. & ſic infinitè ſolui poteſt quæſtio.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & conficienda C, & iiſdem partibus quæ ſupra datæ ſunt: ſi ponas A pro prima parte, deprehendes 15 C -- 3 B maiorem eſſe debere 2 A. & ſic $\frac{15 C -- 3 B}{2}$ eſſe terminum, infra quem debet ſumi valor radicis.

Hinc Canon.

Ex tribus fractionibus datis partes præſcriptas indicantibus, elige quamcumque volueris pro prima, ac per huius denominatorem multiplica ſigillatim numeratorem & denominatorem fractionis ex ſequentibus à primâ remotioris: primum productum duc in quantitatem diuidendam, ſecundum verò in quantitatem conficiendam, minorem tolle à maiore, & reſiduum ſerua. Deinde primam fractionem diuide per eam, quæ à prima remotior eſt, & per numeratoris ac denominatoris de nouo facti differentiam, diuide reſiduum ſupra ſeruatum, habebiſque terminum, infra quem capies vt volueris quantitatis diuidendæ partem illam quæ prima fractione exprimitur. Vnde reliquæ per Propoſ. V. Lib. I. non latebunt.

Hinc

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea A B diuidenda in tres partes, ita vt triens primæ, quadrans ſecundæ, & quintans tertiæ æquentur C D. accipiatur A L tripla A B & C E quindecupla C D, tùm reſecetur C F æqualis A L & reliqua F E diuidatur bifariam in G. accipiaturque A H minor F G, cuius triens ſit C I, & per propoſ. 5. lib. 1. huius diuidatur H B in duas tali ratione, vt quadrans vnius & quintans alterius æquentur I D. Dico duas illas cum A H fore tres quæſitas. Nam cum quadrans & quintans illarum duarum ſint æquales I D, & C I triens A H, ſequitur totam A B diuiſam eſſe in tres partes, ita vt triens primæ, quadrans ſecundæ, & quintans tertiæ, æquentur



toti C D. quod erat demonſtrandum.

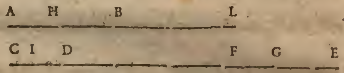
Dixi autem A H debere eſſe minorem F G, ſi enim ſumeretur æqualis ipſi non poſſet ſolui problema, quod ſic demonſtro. C I eſt triens A H, ergo H B debet diuidi in duas, ita vt quadrans vnius & quintans alterius æquentur I D. Igitur I D debet cadere inter quadrantem & quintantem H B (vt probauimus in propoſ. 5. libro 1.) at ſi A H eſt æqualis F G, non caderet I D inter quadrantem & quintantem H B, ſiquidem cum C E ſit quindecupla C D, & C F ſit æqualis A L, & F E dupla A H, erit A L plus dupla A H quindecupla C D. Ergo A L plus dupla A H eſt quindecupla C I, & quindecupla I D. ac proinde cum A H ſit tripla C I, erit A L quindecupla I D, & noncupla C I. ſed A B eſt triens A L, igitur A B æquatur triplo C I, plus quintuplo I D. A H autem tripla eſt C I. Ergo reliqua H B quintupla eſt I D. ac propterea cum I D ſit quintans H B, non poterit I D cadere inter quintantem & quadrantem H B. Ergo A H non poteſt ſumi æqualis F G, & à fortiori non poterit ſumi maior F G. ac proinde ſumi debet minor. Non definitur autem quantitas A H, quia eiuſmodi quæſtio infinities ſolui poteſt.

Scholium.

Rectè adnotauit Bachetus ad qu. 5. l. 1. Diophanti quamlibet quantitatem diuidi poſſe in plura ſegmenta quorum partes præſcriptæ faciant quantitatem datam. Sit enim numerus 70 diuidendus in quatuor, ita vt $\frac{1}{2}$ primi, $\frac{2}{3}$ ſecundi $\frac{4}{5}$ tertii, & $\frac{6}{7}$ quarti ſint æquales 57. Ponatur primus 1 R, ergo reliqui ſimul erunt $70 - 1R$, eſt autem ſemiſſis primi $\frac{1}{2}R$, igitur $57 - \frac{1}{2}R$ continebit $\frac{2}{3}$ ſecundi & $\frac{4}{5}$ tertii & $\frac{6}{7}$ quarti. Oportet ergo vt $57 - \frac{1}{2}R$ cadat inter $\frac{2}{3}$ & $\frac{6}{7}$ de $70 - 1R$. manifeſtum eſt autem eſſe maiorem $\frac{2}{3}$, reſtat ergo vt ſit minor $\frac{6}{7}$ quod ita efficiatur. $\frac{6}{7}$ de $70 - 1R$ ſunt $\frac{420 - 6R}{7}$ quæ propterea debent ſuperare $57 - \frac{1}{2}R$. Ergo per multiplicationem in crucem $840 - 12R$ ſuperabunt $798 - 7R$, igitur $\frac{42}{5}$ ſuperat 1 R. talis itaque eſt terminus infra quem ſumes valorem radicis. Capiatur ad libitum 2 & ſubtrahatur à 70, vt fiat 68. ſimiliter ſemiſſis 2 ſubtrahatur à 57 vt fiat 56, & per ea quæ dicta ſunt in propoſitione, diuidatur 68 in tres, ita vt $\frac{2}{3}$ vnius, $\frac{4}{5}$ alterius, & $\frac{6}{7}$ poſtremi faciant 56. infiniti ſunt numeri ſoluentes quæſtionem en tibi tres 9. 10. 49. ergo quatuor numeri ſequentes ſatisfaciunt quæſtioni 2. 9. 10. 49. hæc fert ex Gaſpare Bacheto.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea A B diuidenda in tres partes, ita vt triens primæ, quadrans ſecundæ, & quintans tertiæ æquentur C D. accipiatur A L tripla A B & C E quin de cupla C D, tùm reſecetur C F æqualis A L & reliqua F E diuidatur biſariam in G. accipiaturque A H minor F G, cuius triens ſit C I, & per propoſ. 5. lib. 1. huius diuidatur H B in duas tali ratione, vt quadrans vnius & quintans alterius æquentur I D. Dico duas illas cum A H fore tres quæſitas. Nam cum quadrans & quintans illarum duarum ſint æquales I D, & C I triens A H, ſequitur totam A B diuiſam eſſe in tres partes, ita vt triens primæ, quadrans ſecundæ, & quintans tertiæ, æquentur



toti C D. quod erat demonſtrandum.

Dixi autem A H debere eſſe minorem F G, ſi enim ſumeretur æqualis ipſi non poſſet ſolui problema, quod ſic demonſtro. C I eſt triens A H, ergo H B debet diuidi in duas, ita vt quadrans vnius & quintans alterius æquentur I D. Igitur I D debet cadere inter quadrantem & quintantem H B (vt probauimus in propoſ. 5. libro 1.) at ſi A H eſt æqualis F G, non caderet I D inter quadrantem & quintantem H B, ſiquidem cum C E ſit quindecupla C D, & C F ſit æqualis A L, & F E dupla A H, erit A L plus dupla A H quindecupla C D. Ergo A L plus dupla A H eſt quindecupla C I, & quindecupla I D. ac proinde cum A H ſit tripla C I, erit A L quindecupla I D, & noncupla C I. ſed A B eſt triens A L, igitur A B æquatur triplo C I, plus quintuplo I D. A H autem tripla eſt C I. Ergo reliqua H B quintupla eſt I D. ac propterea cum I D ſit quintans H B, non poterit I D cadere inter quintantem & quadrantem H B. Ergo A H non poteſt ſumi æqualis F G, & à fortiori non poterit ſumi maior F G. ac proinde ſumi debet minor. Non definitur autem quantitas A H, quia eiuſmodi quæſtio infinities ſolui poteſt.

Scholium.

Rectè adnotauit Bachetus ad qu. 5. l. 1. Diophanti quamlibet quantitatem diuidi poſſe in plura ſegmenta quorum partes præſcriptæ faciant quantitatem datam. Sit enim numerus 70 diuidendus in quatuor, ita vt $\frac{1}{2}$ primi, $\frac{2}{3}$ ſecundi $\frac{4}{5}$ tertii, & $\frac{6}{7}$ quarti ſint æquales 57. Ponatur primus 1 R, ergo reliqui ſimul erunt 70 -- 1 R, eſt autem ſemiſſis primi $\frac{1}{2}$ R, igitur 57 --- $\frac{1}{2}$ R continebit $\frac{2}{3}$ ſecundi & $\frac{4}{5}$ tertii & $\frac{6}{7}$ quarti. Oportet ergo vt 57 -- $\frac{1}{2}$ R cadat inter $\frac{2}{3}$ & $\frac{6}{7}$ de 70 --- 1 R. manifeſtum eſt autem eſſe maiorem $\frac{2}{3}$. reſtat ergo vt ſit minor $\frac{6}{7}$ quod ita efficiatur. $\frac{6}{7}$ de 70 —— 1 R ſunt $\frac{420 --- 6\,R}{7}$ quæ propterea debent ſuperare 57 —— $\frac{1}{2}$ R. Ergo per multiplicationem in crucem 840 --- 12 R ſuperabunt 798 --- 7 R. igitur $\frac{42}{5}$ ſuperat 1 R. talis itaque eſt terminus infra quem ſumes valorem radicis. Capiatur ad libitum 2 & ſubtrahatur à 70, vt fiat 68. ſimiliter ſemiſſis 2 ſubtrahatur à 57 vt fiat 56, & per ea quæ dicta ſunt in propoſitione, diuidatur 68 in tres, ita vt $\frac{2}{3}$ vnius, $\frac{4}{5}$ alterius, & $\frac{6}{7}$ poſtremi faciant 56. infiniti ſunt numeri ſoluentes quæſtionem en tibi tres. 9. 10. 49. ergo quatuor numeri ſequentes ſatisfaciunt quæſtioni 2, 9. 10. 49. hæc ferè ex Gaſpare Bacheto.

PROPOSITIO III.

Quantitatem datam diuidere in quatuor ſegmenta, ita vt quolibet dante alteri imperatam ſui partem, & inſuper datam quantitatem, fiat æqualitas.

ESto datus numerus *96* diuidendus in quatuor ſegmēta, ſic vt ſi primum det ſecundo trientem ſui plus *4*, ſecundum tertio decimam ſui partem plus 2, tertium quarto ſui ſeptantem plus 4, & quartum primo tres ſui nonas plus 8, fiat æqualitas. Ponatur primum ſegmentum 1 R, & quia debet fieri æqualitas in 24 quadrante numeri diuidendi *96* (ob rationem allatam in Propoſ. XXXII. Lib. I, & aliunde ſecundus ſegmentum plus accipit à primo quam tribuat tertio, differentia accepti 4 & dati 2 tollatur de 24 vt fiant 22. tùm quia ſecundum accipit à primo $\frac{1}{3}$ & retinet $\frac{9}{10}$ reductis illis ad eamdem denominationem $\frac{10}{30}$ & $\frac{27}{30}$ & multiplicatis 22 per denominatorem communem 30, productus *660* continebit primum ſegmentum decies ob primum numeratorem 10, & ſegmentum ſecundum vigeſies ſepties ob ſecundum numeratorem 27. Ergo quoniam primum ſegmentum eſt 1 R, ſi 10 R tollas ex *660*, reſiduum *660* — 10 R continebit ſecundum ſegmentum vigeſies ſepties & propterea ſecundum ſegmentum eſt. $\frac{660 - 10 R}{27}$.

Similiter quoniam ſegmentum tertium plus dat quarto quam accipiat à ſecundo, differentia accepti & dati 2 addatur 24 quadranti numeri diuidendi, vt fiant 26, tùm quia tertium ſegmentum accipit $\frac{1}{10}$ ſecundi & retinet $\frac{6}{7}$ ſui, reductis illis fractionibus ad eamdem denominationem $\frac{7}{70}$ & $\frac{60}{70}$, multiplicentur 26 per denominatorem communem 70, & fient 1820 in quibus continebitur ſecundum ſegmentum ſepties, & tertium ſexageſies (ob numeratores 7 &

60) quare ſi ſegmentum ſecundum ſupra inuentum ducas in 7 & productum tollas à 1820, & reſiduum diuidas per 60, fiet tertium ſegmentum $\frac{44520 \dagger 70\text{ R}}{1610}$.

Deinde quartum ſegmentum dat primo plus quam primum ſecundo, & propterea ſi illorum differentiam 4 tollas de 24 quadrante numeri diuidendi vt fiant 20, in eo continebuntur exactè $\frac{2}{3}$ primi & $\frac{3}{9}$ quarti, ac proinde, ſi duas illas fractiones reducas ad eamdem denominationem $\frac{18}{27}$ & $\frac{19}{27}$ & per communem denomiuatorem 27 multiplices 20, productus 540 continebit octodecies primum ſegmentum, & nouies quartum. Quare cum primum ſegmentum ſit 1 R, ſi 18 R tollas de 540, & reſiduum diuidas per 9, fiet quartum ſegmentum, $\frac{540 - 18\text{ R}}{9}$.

Hæc quatuor ſegmenta in vnam ſummam collecta faciunt $\frac{181320 - 2150\text{ R}}{1610}$ æqualia 96. igitur 1 R eſt 12, & quatuor ſegmenta quæſita ſigillatim ſunt 12 20 28 36 ſatiſfacientia quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, data ſit quantitas diuidenda B, & oporteat illam diuidere in quatuor ſegmenta taliter vt ſi primum & ſecundo $\frac{1}{3}$ plus C, ſecundum tertio $\frac{1}{10}$ plus D, tertium quarto $\frac{1}{7}$ plus F & quartum primo $\frac{3}{9}$ plus H, fiat æqualitas. Ponatur primum ſegmentum A, & ſit C maior D, ergo C-D tolli debet ex quadrante B, & fit reſiduum $\frac{B \dagger 4D - 4C}{4}$ æquale $\frac{1}{3}$ primi & $\frac{9}{10}$ ſecundi, & reductis illis fractiſque ſimilibus multiplicationibus & diuiſionibus erit ſecundum ſegmcutum $\frac{30B \dagger 120D - 120C - 40A}{108}$.

Similiter

Propositio III.

Quantitatem datam diuidere in quatuor ſegmenta, ita vt quolibet dante alteri imperatam ſui partem, & inſuper datam quantitatem, fiat æqualitas.

ESto datus numerus 96 diuidendus in quatuor ſegmēta, ſic vt ſi primum det ſecundo trientem ſui plus 4, ſecundum tertio decimam ſui partem plus 2, tertium quarto ſui ſeptantem plus 4, & quartum primo tres ſui nonas plus 8, fiat æqualitas. Ponatur primum ſegmentum 1 R, & quia debet fieri æqualitas in 24 quadrante numeri diuidendi 96 (ob rationem allatam in Propoſ. XXXII. Lib. I, & aliunde ſecundus ſegmentum plus accipit à primo quam tribuat tertio, differentia accepti 4 & dati 2 tollatur de 24 vt fiant 22. tùm quia ſecundum accipit à primo $\frac{1}{3}$ & retinet $\frac{9}{10}$ reductis illis ad eamdem denominationem $\frac{10}{30}$ & $\frac{27}{30}$ & multiplicatis 22 per denominatorem communem 30, productus 660 continebit primum ſegmentum decies ob primum numeratorem 10, & ſegmentum ſecundum vigeſies ſepties ob ſecundum numeratorem 27. Ergo quoniam primum ſegmentum eſt 1 R, ſi 10 R tollas ex 660, reſiduum 660 — 10 R continebit ſecundum ſegmentum vigeſies ſepties & propterea ſecundum ſegmentum eſt. $\frac{660 - 10\,R}{27}$.

Similiter quoniam ſegmentum tertium plus dat quarto quam accipiat à ſecundo, differentia accepti & dati 2 addatur 24 quadranti numeri diuidendi, vt fiant 26, tùm quia tertium ſegmentum accipit $\frac{1}{10}$ ſecundi & retinet $\frac{6}{7}$ ſui, reductis illis fractionibus ad eamdem denominationem $\frac{7}{70}$ & $\frac{60}{70}$, multiplicentur 26 per denominatorem communem 70, & fient 1820, in quibus continebitur ſecundum ſegmentum ſepties, & tertium ſexageſies (ob numeratores 7 &

Similiter quoniam tertium ſegmentum plus dat quarto, vt ſuppoſuimus, quam accipiat à ſecundo, differentia F--D addatur quadrāti B, & ſumma $\frac{B + 4F - 4D}{4}$ eſt æqualis $\frac{1}{10}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{6}{7}$ tertij exactè, quare poſt factas eaſdem multiplicationes ſubtractiones & diuiſiones quas fecimus in operatione Algebrica communi, extabit tēmdem tertium ſegmentum $\frac{1680B + 840C + 280A + 7560F - 8400D}{6480}$.

Pari modo quoniam quartum ſegmentum dat primo plus quam primum ſecundo, (ſuppono enim H majorem C) tolli debet H--C de quadrante B, & reſiduum $\frac{B + 4C - 4H}{4}$ continet exactè $\frac{2}{3}$ primi & $\frac{1}{3}$ quarti: ergo poſt ſupradictas operationes rēpetitas, erit quartum ſegmentum $\frac{3B + 12C - 12H - 8A}{4}$.

Horum quatuor ſegmentorum ſumma debēt æquari quantitati B ergo A æqualis eſt $\frac{8340B + 13080C + 7560F - 622080 - 19440H - 1200D}{8900}$.

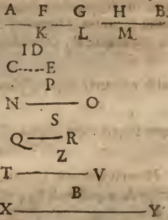
Hinc Canon.

Formari poteſt vt fecimus ad Propoſ. XXXII. Lib. 1. ſed quoniam eſt ad modum intricatus, ideò illum omittemus, tùm ne ſimus tædio lectori, tùm etiam quia ſine illius ope poteſt inſtituj.

Effectio Geometrica.

Sit linea AB diuidenda in quatuor ſegmenta taliter, vt ſi primum dederit ſecundo trientem ſui plus CD, ſecundum tertio ſui dextandem plus CI, tertium quarto ſeptantem ſui plus eadem CD, quartum denique primo tres nonas ſui plus CE, poſt datum & acceptum fiat æqualitas. Diuidatur primò linea AB quadrifariam in punctis FGH: & quoniam primum ſegmentum plus accipit à quarto, quam tribuat ſecundo, ſeu quoniam CE major eſt CD, capiatur FK æqualis DE. Deinde quia ſecundum ſegmentum plus accipit à primo quam tribuat tertio, ſeu quia CD maior eſt CI, propterea

ID tollatur iterum FG, ſitque GL æqualis ID. Tertiò cum tertium ſegmentum minus accipiat à ſecundo, quam tribuat quarto, hoc eſt, quoniam CI minor eſt CD, differentia ID addatur quadranti GH, ſitque HM æqualis ID. Rurſus accipiantur quatuor numeri quicumque habentes preſcriptas partes, ſintque 3 10 7 9. & quoniam partes relictæ primi ſegmenti ſunt $\frac{2}{3}$ & datæ quarti $\frac{3}{9}$ ſumantur $\frac{2}{3}$ primi numeri & $\frac{3}{9}$ quarti & fiat vt horum ſumma 5 ad ſummam numerorum primi & quarti 12 ita AK ad NO, & ſecetur NO taliter in P vt $\frac{2}{3}$ NP cum $\frac{3}{9}$ PO æquentur AK (id autem fiet per Propoſ. V Lib. 1.) deinde quia partes datæ primi ſegmenti ſunt $\frac{1}{3}$ & partes relictæ ſecundi $\frac{9}{10}$ ſumãtur $\frac{9}{10}$ ſecundi numeri & $\frac{1}{3}$ primi, & fiat vt horum ſumma 10 ad ſummam primi & ſecundi numeri 13, ita FL ad QR, & ſecetur QR taliter in S, vt $\frac{9}{10}$ QS & $\frac{1}{3}$ SR æquales ſint FL. Prætereà quoniam partes datæ ſecundi ſegmenti ſunt $\frac{1}{9}$ & partes relictæ tertij ſunt $\frac{6}{7}$ accipiantur $\frac{1}{9}$ ſecundi numeri & $\frac{6}{7}$ tertij, fiatque vt horum ſumma 7 ad ſummam ſecundi & tertij numeri 17 ita GM ad TV, & ſecetur TV in Z ſic vt $\frac{6}{7}$ TZ & $\frac{1}{9}$ ZV æquetur GM. Denique quiâ partes datæ tertij ſeg-



Similiter quoniam tertium ſegmentum plus dat quarto, vt ſupponimus, quam accipiat à ſecundo, differentia F--D addatur quadrāti B, & ſumma B † 4 F--4 D eſt æqualis 1 ſecundi ſegmenti & 6 tertij

4 10 7

ex actè, quare poſt factas eaſdem multiplicationes ſubtractiones & diuiſiones quas fecimus in operatione Algebrica communi, extabit temdem tertium ſegmentum 1680 B † 840 C † 280 A † 7560-F-- 8400 D.

6480

Pari modo quoniam quartum ſegmentum dat primo plus quam primum ſecundo, (ſuppono enim H majorem C) tolli debet H--C de quadrante B, & reſiduum B † 4 C --4 H continet exactè 2 pri-

4 5

mi & 1 quarti: ergo poſt ſupradictas operationes repetitas, erit quar-

3

tum ſegmentum 3 B † 12 C--12 H--8 A.

4

Horum quatuor ſegmentorum ſumma debet æquari quantitati B ergo A æqualis eſt 8340 B † 13080 C † 7560 F--622080--19440-H---1200 D.

8900

Hinc Canon.

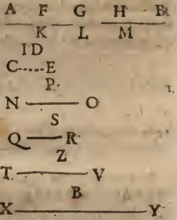
Formari poteſt vt fecimus ad Propoſ. XXXII. Lib. 1. ſed quoniam eſt ad modum intricatus, ideò illum omittemus, tùm ne ſimus tædio lectori, tùm etiam quia ſine illius ope poteſt inſtituj.

Effectio Geometrica.

Sit linea A B diuidenda in quatuor ſegmenta taliter, vt ſi primum dederit ſecundo trientem ſui plus C D, ſecundum tertio ſui dextandem plus C I, tertium quarto ſeptantem ſui plus eadem C D, quartum denique primo tres nonas ſui plus C E, poſt datum & acceptum fiat æqualitas. Diuidatur primò linea AB quadrifariam in punctis F G H: & quoniam primum ſegmentum plus accipit à quarto, quam tribuat ſecundo, ſeu quoniam CE major eſt C D, capiatur F K æqualis D E. Deinde quia ſecundum ſegmentum plus accipit à primo quam tribuat tertio, ſeu quia C D maior eſt C I, propterea

Kk

I D tollatur iterum F G, ſitque G L æqualis I D. Tertiò cum tertium ſegmentum minus accipiat à ſecundo, quam tribuat quarto, hoc eſt, quoniam C I minor eſt C D, differentia I D addatur quadranti G H, ſitque H M æqualis I D. Rurſus accipiantur quatuor numeri quicumque habentes preſcriptas partes, ſintque 3 10 7 9, & quoniam partes relictæ primi ſegmenti ſunt $\frac{2}{3}$ & datæ quarti $\frac{3}{9}$ ſumantur $\frac{2}{3}$ primi numeri & $\frac{3}{9}$ quarti & fiat vt horum ſumma 5 ad ſummam numerorum primi & quarti 12 ita A K ad N O, & ſecetur N O taliter in P vt $\frac{2}{3}$ N P cum $\frac{3}{9}$ P O æquentur A K (id autem fiet per Propoſ. V Lib. 1.) deinde quia partes datæ primi ſegmenti ſunt $\frac{1}{3}$ & partes relictæ ſecundi $\frac{9}{10}$ ſumãtur $\frac{9}{10}$ ſecundi numeri & $\frac{1}{3}$ primi, & fiat vt horum ſumma 10. ad ſummam primi & ſecundi numeri 13, ita F L ad Q R, & ſecetur Q R taliter in S, vt $\frac{9}{10}$ Q S & $\frac{1}{3}$ S R æquales ſint F L.



Prætereà quoniam partes datæ ſecundi ſegmenti ſunt $\frac{1}{9}$ & partes relictæ tertij ſunt $\frac{6}{7}$ accipiantur $\frac{1}{9}$ ſecundi numeri & $\frac{6}{7}$ tertij, fiatque vt horum ſumma 7 ad ſummam ſecundi & tertij numeri 17 ita G M ad T V, & ſecetur T V in Z ſic vt $\frac{6}{7}$ T Z & $\frac{1}{9}$ Z V æquetur G M. Denique quiã partes datæ tertij ſeg-

menti ſunt 1 & partes relictæ quarti 6 fiat vt 7 ad ſummam tertij &

7 9

quarti numeri 16, ita MB plus GL plus FK ad XY, & ſecetur XY in B taliter vt 6 XB & 1 BY æqualis ſint MB plus GL plus FK.

9 7

Dico NP QS TZ XB eſſe ſegmenta quæſita lineæ AB, ſicuti etiam SR ZV. BY PO. Nam quia AB ſecta eſt quadrifariam in FGH, erit AF ſeu FG ſeu GH vel HB id in quo debet fieri æqualitas quia dum vnum ſegmentum dat alteri aliquid ſui, & accipit ab altero aliquid ipſius, nihil perditur ergo cum poſt mutuò datum & acceptum fiat æqualitas partium inter ſe, & æqualitas omnium partitis cum numero diuidendo, neceſſe eſt vt æqualitas fiat in tali parte AB, quot requiruntur ſegmenta, at requiruntur quatuor, ergo oportet æqualitatem fieri in quadrante AB ſcilicet in AF aut FG aut GH aut HB. Et quia ex quadrante AF tollitur FK æqualis DE, idem plane eſt ac ſi tolleretur CE minus CD, ergo cum AF debeat æquari 2 primi ſegmenti & 3 quarti plus CE minus CD,

3 9

hoc eſt DE ſeu Fk, conſequens eſt vt ſi collatur ex ea FK, reſidua AK æquetur 2 primi ſegmenti plus 3 quarti. Sed quia factum eſt vt

3 9

2 primi numeri plus 3 quarti ad ſummam numeri primi & quarti, ita

3 9

AK ad NO, erit NO ſumma primi & quarti ſegmenti quæſiti ipſius AB. Ergo cum NO ſit ſecta in P tali ratione vt 2 NP cum

3

3 PO æquentur AK, ſequitur NP eſſe primũ ſegmentum & PO

quartum ex quæſitis; ſiquidem 2 NP plus 3 PO plus CE mi-

3 9

nus CD æquantur AF Quod eſt vnum ex demonſtrandis.

Præterea quoniam primum ſegmentum dat $\frac{1}{3}$ ſui & CD, ſecundum autem retinet $\frac{9}{10}$ minus CI, & fieri debet horum omnium cum FG quadrante ipſius AB, ſequitur $\frac{1}{3}$ primi & $\frac{9}{10}$ ſecundi ſegmenti plus ID æquari FG (quia CD minus CI æquatur DI) at ID æqualis eſt GL ex conſtructione, ergo FL eſt æqualis $\frac{9}{10}$ ſecundi & $\frac{1}{3}$ primi. Sed factum eſt vt $\frac{1}{3}$ primi numeri plus $\frac{9}{10}$ ſecundi ad ſummam primi & ſecundi numeri ita FL ad QR. Igitur QR eſt æqualis ſummæ primi & ſecundi ſegmenti. Ac proinde cum QR ſecta ſit in S, ita vt $\frac{9}{10}$ QS & $\frac{1}{3}$ SR æquentur FL, erit QS ſecundum ſegmentum, & SR primum: ſiquidem $\frac{1}{3}$ SR plus $\frac{9}{10}$ QS plus CD minus CI æquantur quadranti FG. Quod eſt alterum ex demonſtrandis.

Deinde quia ſecundum ſegmentum dat tertio $\frac{1}{10}$ ſui plus CI, & tertium retinet $\frac{6}{7}$ dando CD, & fieri debet æqualitas in quadrante GH, differentia autem CD & CI eſt ID, ſeu ipſis æqualis HM, ſequitur lineam quæ continebit quadrantem AB plus CD minus CI, æquari $\frac{1}{10}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{6}{7}$ tertij: ſed talis eſt linea GM, nam HM ſumpta eſt æqualis ID. Ergo GM æquatur $\frac{1}{10}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{6}{7}$ tertij. At factum eſt vt $\frac{1}{10}$ ſecundi numeri plus $\frac{6}{7}$ tertij ad

menti ſunt $\frac{1}{7}$ & partes relictæ quarti $\frac{6}{9}$ fiat vt 7 ad ſummam tertij & quarti numeri 16, ita MB plus GL plus FK ad XY, & ſecetur XY in B taliter vt $\frac{6}{9}$ XB & $\frac{1}{7}$ BY æqualis ſint MB plus GL plus FK.

Dico NP QS TZ XB eſſe ſegmenta quæſita lineæ AB, ſicuti ētiam SR ZV. BY PO. Nam quia AB ſecta eſt quadrifariam in FGH, erit AF ſeu FG ſeu GH vel HB id in quo debet fieri æqualitas quia dum vnum ſegmentum dat alteri aliquid ſui, & accipit ab altero aliquid ipſius, nihil perditur ergo cum poſt mutuò datum & acceptum fiat æqualitas partium inter ſe, & æqualitas omnium partiū cum numero diuidendo, neceſſe eſt vt æqualitas fiat in tali parte AB, quot requiruntur ſegmenta, at requiruntur quatuor, ergo oportet æqualitatem fieri in quadrante AB ſcilicet in AF aut FG aut GH aut HB. Et quia ex quadrante AF tollitur FK æqualis DE, idem plane eſt ac ſi tolleretur CE minus CD, ergo cum AF debeat æquari $\frac{2}{3}$ primi ſegmenti & $\frac{3}{9}$ quarti plus CE minus CD, hoc eſt DE ſeu Fk, conſequens eſt vt ſi tollatur ex ea FK, reſidua AK æquetur $\frac{2}{3}$ primi ſegmenti plus $\frac{3}{9}$ quarti. Sed quia factum eſt vt $\frac{2}{3}$ primi numeri plus $\frac{3}{9}$ quarti ad ſummam numeri primi & quarti, ita AK ad NO, erit NO ſumma primi & quarti ſegmenti quæſiti ipſius AB. Ergo cum NO ſit ſecta in P tali ratione vt $\frac{2}{3}$ NP cum $\frac{3}{9}$ PO æquentur AK, ſequitur NP eſſe primū ſegmentum & PO quartum ex quæſitis: ſiquidem $\frac{2}{3}$ NP plus $\frac{3}{9}$ PO plus CE minus CD æquantur AF Quod eſt vnum ex dēmonſtrandis.

Prætérea quoniam primum ſegmentum dat $\frac{1}{3}$ ſui & CD, ſecundum autem retinet $\frac{9}{10}$ minus CI, & fieri debet horum omnium cum FG quadrante ipſius AB, ſequitur $\frac{1}{3}$ primi & $\frac{9}{10}$ ſecundi ſegmenti plus ID æquari FG (quia CD minus CI æquatur DI) at ID æqualis eſt GL ex conſtructione, ergo FL eſt æqualis $\frac{9}{10}$ ſecundi & $\frac{1}{3}$ primi. Sed factum eſt vt $\frac{1}{3}$ primi numeri plus $\frac{9}{10}$ ſecundi ad ſummam primi & ſecundi numeri ita FL ad QR. Igitur QR eſt æqualis ſummæ primi & ſecundi ſegmenti. Ac proinde cum QR ſecta ſit in S, ita vt $\frac{9}{10}$ QS & $\frac{1}{3}$ SR æquentur FL, erit QS ſecundum ſegmentum, & SR primum: ſiquidem $\frac{1}{3}$ SR plus $\frac{9}{10}$ QS plus CD minus CI æquantur quâdranti FG. Quod eſt alterùm ex demonſtrandis.

Deinde quia ſecundum ſegmentum dat tertio $\frac{1}{10}$ ſui plus CI, & tertium retinet $\frac{6}{7}$ dando CD, & fieri debet æqualitas in quadrante GH, differentia autem CD & CI eſt ID, ſeu ipſis æqualis HM, ſequitur lineam quæ continebit quadrantem AB plus CD minus CI, æquari $\frac{1}{10}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{6}{7}$ tertij: ſed taliseſt linea GM, nam HM ſumpta eſt æqualis ID. Ergo GM æquatur $\frac{1}{10}$ ſecundi ſegmenti & $\frac{6}{7}$ tertij. At factum eſt vt $\frac{1}{10}$ ſecundi numeri plus $\frac{6}{7}$ tertij ad

ad ſummam ſecundi & tertij numeri, ita G M ad T V. Ergo T V æquatur ſummæ ſecundi & tertij ſegmenti. Ac proinde cum ſecta ſit ‡V in Z taliter vt $\frac{6}{7}$ T Z plus $\frac{1}{10}$ Z V æquentur G M, neceſſe eſt T Z eſſe tertium ſegmentum & Z V ſecundum: ſiquidem $\frac{1}{10}$ Z V plus $\frac{6}{7}$ T Z plus C I minus C D æquantur quadranti G H. Quod eſt tertium ex demonſtrandis.

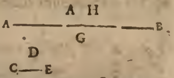
Denique quoniam tres trientes primi ſegmenti, plus decem dextantibus ſecundi, plus ſeptem ſeptantibus tertij, plus nouem nonis quarti, æquantur toti A B, cumque A K æquetur $\frac{2}{3}$ primi ſegmenti & $\frac{3}{9}$ quarti, & F L $\frac{1}{3}$ primi plus $\frac{9}{10}$ ſecundi, & G M $\frac{1}{9}$ ſecundi plus $\frac{6}{7}$ tertij neceſſe eſt M B, G L F K, quæ prædictis non cõmunicant, æquari $\frac{1}{7}$ tertij & $\frac{6}{9}$ quarti: at factum eſt vt $\frac{1}{7}$ tertij numeri plus $\frac{6}{9}$ quarti ad ſummam tertij & quarti numeri ita M B plus G L plus F-K ad X Y: ergo X Y æqualis eſt tertio & quarto ſegmento: quia igitur X Y ſecta eſt in B ſic vt $\frac{1}{7}$ B Y plus $\frac{6}{9}$ X B equentur M B plus G L plus F K, erit B Y tertium ſegmentum & X B quartum: ſiquidem $\frac{1}{7}$ B Y plus $\frac{6}{9}$ X B minus C E plus C D æquantur H B (nam G L eſt æqualis H M, & F K æquatur D E) Quod erat tandem demonſtrandum.

Scholium.

Quantitas data poteſt diuidi in quotlibet ſegmenta eodem prorſus artificio & fiet ſemper æqualitas in tali parte quantitatis diuidendæ quot poſtulantur ſegmẽta: in quinta parte, ſi quinque ſegmenta

poſtulantur: in ſextá, ſi ſex; in ſemiſſe, ſi duo.

Vnde ſolues iſtud problema omiſſum à Diophanto: datum quantitatem diuide in duo ſegmenta quorum partes præſcriptæ mutuò traditæ cum quantitate data, faciant ſummas æquales. Omiſſis numeris rẽſic efficio Geometricè. Sit A B diuidenda in duas partes, puta in H taliter vt ſi A H dederit duos ſui trientes & præterea C D ipſi H B: hæc autem H B dederit quatuor ſui ſeptantes & præterea C E ipſi A H, poſt mutuo datum & acceptum, fiat æqualitas. Diuidatur A B bifariã in F ponatur F G qualis D E. Tum, per propoſ. 5. lib. 1. diuidatur A B in duas partes ad punctum H taliter, vt primæ A H triens & quatuor ſeptantes ſecundæ H B ſint æquales. A G. Dico duo ſegmenta A H & H B eſſe quæſita. Nam cum æqualitas debeat fieri in ſemiſſe A B (vt iam à nobis demonſtratum eſt) pars relicta ipſius A H & partes datæ H B plus C E minus C D æquari debent A F ſed pars relicta A H quæ eſt eius triens & partes datæ H B quæ ſunt quatuor ſeptantes æquantur A G, igitur A G plus C E minus C D debent æquari A F ſemiſſe totius A B. Sed C E minus C D æqualis eſt D E, fuit autem F G ex conſtructione capta æqualis D E. Ergo triens A H cum ſeptantibus H B plus C E minus C D æquantur A F. Quod erat primò demonſtrandum.



Deinde cùm tres trientes A H & ſeptem ſeptantes H B æquentur toti A B, Contineat autem A G vnum trientem A H & quatuor ſeptantes A B; ſequitur G B continere duos trientes A H & tres ſeptantes H B. Sed G B minus C E plus C D æquantur G B minus D E eſt autem G F ſumpta æqualis D E, ergo G B minus G F, æquatur duobus trientibus A B plus tribus ſeptantibus H B minus C E plus C D æquatur F B. Igitur triens A H cùm quatuor ſeptantibus H B plus C E minus C D, æquatur duobus trientibus H A plus tribus ſeptantibus A B minus C E plus C D. Quod erat demonſtrandum.

ad ſummam ſecundi & tertij numeri, ita G M ad T V. Ergo T V æquatur ſummæ ſecundi & tertij ſegmenti. Ac proinde cum ſecta ſit † V in Z taliter vt *6* $\overline{TZ}$ plus 1 $\overline{ZV}$ æquentur G M, neceſſe

7 10

eſt T Z eſſe tertium ſegmentum & Z V ſecundum: ſiquidem 1 $\overline{Z}$-

10

V plus *6* $\overline{TZ}$ plus C I minus C D æquantur quadranti G H. Quod

7

eſt tertium ex demonſtrandis.

Denique quoniam tres trientes primi ſegmenti, plus decem dextantibus ſecundi, plus ſeptem ſeptantibus tertij, plus nouem nonis quarti, æquantur toti A B, cumque A K æquetur 2 $\overline{\text{primi}}$ ſegmenti

3

& *3* $\overline{\text{quarti}}$, & F L 1 $\overline{\text{primi}}$ plus *9* $\overline{\text{ſecundi}}$, & G M 1 $\overline{\text{ſecundi}}$ plus

9 3 10 9

6 $\overline{\text{tertij}}$ neceſſe eſt M B, G L F K, quæ prædictis non cõmunicant,

7

æquari 1 $\overline{\text{tertij}}$ & *6* $\overline{\text{quarti}}$: at factum eſt vt 1 $\overline{\text{tertij}}$ numeri plus *6*

7 9 7 9

$\overline{\text{quarti}}$ ad ſummam tertij & quarti numeri ita M B plus G L plus F-K ad X Y: ergo X Y æqualis eſt tertio & quarto ſegmento: quia igitur X Y ſecta eſt in B ſic vt 1 $\overline{BY}$ plus *6* $\overline{XB}$ equentur M B plus

7 9

G L plus F K, erit B Y tertium ſegmentum & X B quartum: ſiquidem 1 $\overline{BY}$ plus *6* $\overline{XB}$ minus C E plus C D æquantur H B (nam

7 9

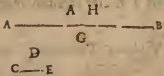
G L eſt æqualis H M, & F K æquatur D E) Quod erat tandem demonſtrandum.

Scholium.

Quantitas data poteſt diuidi in quotlibet ſegmenta eodem prorſus artificio & fiet ſemper æqualitas in tali parte quantitatis diuidendæ quot poſtulantur ſegmẽta: in quinta parte, ſi quinque ſegmenta

poſtulantur : in ſexta, ſi ſex; in ſemiſſe, ſi duo.

Vnde ſolues iſtud problema omiſſum à Diophanto: datum quantitatem diuide in duo ſegmenta quorum partes præſcriptæ mutuò traditæ cum quantitate data, faciant ſummas æquales. Omiſſis numeris ſic efficio Geometricè. Sit A B diuidenda in duas partes; puta in H taliter vt ſi A H dederit duos ſui trientes & præterea C D ipſi H B: hæc autem H B dederit quatuor ſui ſeptantes & præterea C E ipſi A H, poſt mutuo datum & acceptum, fiat æqualitas. Diuidatur A B bifariã in F ponatur F G qualis D E. Tum per propoſ. 5. lib. 1. diuidatur A B in duas partes ad punctum H taliter, vt primæ A H triens & quatuor ſeptantes ſecundæ H B ſint æquales. A G. Dico duo ſegmenta A H & H B eſſe quæſita. Nam cum æqualitas debeat fieri in ſemiſſe A B (vt iam à nobis demonſtratum eſt) pars relicta ipſius A H & partes datæ H B plus C E minus C D æquari debent A F ſed pars relicta A H quæ eſt eius triens & partes datæ H B quæ ſunt quatuor ſeptantes æquantur A G, igitur A G plus C E minus C D debent æquari A F ſemiſſe totius A B. Sed C E minus C D æqualis eſt D E, fuit autem F G ex conſtructione capta æqualis D E. Ergo triens A H cum ſeptantibus H B plus C E minus C D æquantur A F. Quod erat primò demonſtrandum.



Deinde cum tres trientes A H & ſeptem ſeptantes H B æquentur toti A B, Contineat autem A G vnum trientem A H & quatuor ſeptantes A B; ſequitur G B continere duos trientes A H & tres ſeptantes H B. Sed G B minus C E plus C D æquantur G B minus D E. eſt autem G F ſumpta æqualis D E, ergo G B minus G F æquatur duobus trientibus A B plus tribus ſeptantibus H B minus C E plus C D æquatur F B. Igitur triens A H cum quatuor ſeptantibus H B plus C E minus C D, æquatur duobus trientibus H A plus tribus ſeptantibus A B minus C E plus C D. Quod erat demonſtrandum.

Propositio IV.

Datam quantitatem diuidere media & extrema ratione Geometricè.

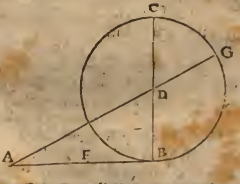
Sit datus numerus 2 diuidendus & ponatur pro maiore 1R. Ergo minor erit 2 - 1R. Igitur eſt vt 2 ad 1R ita 1R ad 2---1R ac ideò productus ſub extremis 4—2R æquabitur producto ſub mediis ſeu quadrato medij 1Q. Et fit 1R æqualis ℞ 5---1 & tres numeri quæſiti ſunt 2. ℞ 5--1. 3--℞ 5.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, ponatur A maior pars, ergo minor erit B--A. Igitur B quadr.--B A æquabitur A quadrato.

Hinc Canon.

Quadrato quantitatis diuidendæ adde quadratum quod fit à ſemiſſe eiuſdem quantitatis: huius enim ſummæ radix quadrata, eadem multata ſemiſſe, exhibet majorem partem quæſitam. Vnde minor non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



Eſto linea A B diuidenda in F ita vt ſit tota A B ad maius ſegmentum A F vt maius ſegmentum A F ad minus F B. Ponatur B C perpendicularis & æqualis B A; diuiſaque ea bifariam in D deſcribatur centro D. & interuallo D B. Circulus & ducatur A D G ſecans circulum in E, ponatur que A F æqualis A E. Dico A B ſectam eſſe in F media & extrema ratione. Nam cum A B & B C ſint perpendiculares, erit A B tangens. Ac proinde quadratum A B æquatur rectangulo G A E. Ergo vt G A ad A B (hoc eſt E G) ita A B ad A E (hoc eſt A F) & diuidendo

vt A E ad E G ita BF ad F A. Seu vt A F ad A B ita BF ad F A. Igitur inuertendo vt A B ad A F ita A F ad F B. Quod erat demonſtrandum.

Propositio V.

Quantitatem datam diuidere media & extrema ratione harmonicè.

DEtur numerus 6 hoc modo diuidendus & ponatur I R pro maiore quæſito ergo minor erit 9--I R. Et quoniam ex tribus quantitatibus harmonicè proportionalibus eſt vt maior ad minorem, ita differentia maioris & mediæ ad differentiam mediæ & minoris, erit vt 6 ad 6--I R ita 6--I R ad 2 R--6. Ergo productus ſub extremis 12 R--36. æquatur producto ſub mediis 36 † I Q--12 R. Ac proinde I Q eſt æquale 24 R--72. Et ſic I R eſt 12 - ℞ 72. & tres numeri harmonicè proportionales ſunt 6. 12--℞ 72. ℞ 72--6. duoque minores æquantur maiori.

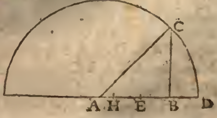
Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B ponatur maior pars quæſita A. Ergo minor erit B—A. Igitur vt B ad B--A ita B—A ad 2 A—B. Ac propterea productus ſub extremis 2 A-B—B quadr. æquatur producto ſub mediis B quadr. † A quadr.—2 B A. Ergo poſt reductionem debitam A quadr. æquatur 4 A B—2 B quadr.

Hinc Canon.

Cape quadratum quantitatis datæ, illudque duplica: huius enim dupli radix quadrata multata quantitate data, exhibet minorem ex quæſitis. Vnde maior non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda in E taliter, vt A B, A E, E B, ſint tres harmonice proportionales. Ponatur B C æqualis & perpendicularis A B Et centro A interuallo A C deſcribatur ſemicirculus ſecans A B productã in puncto D. Dico B D fore



minus

Propositio IV.

Datam quantitatem diuidere media & extrema ratione Geometricè.

SIt datus numerus 2 diuidendus & ponatur pro maiorè 1R. Ergo minor erit 2.-1R. Igitur eſt vt 2 ad 1R ita 1R ad 2---1R ac ideò productus ſub extremis 4—2R æquabitur producto ſub mediis ſeu quadrato medij 1Q. Et fit 1R æqualis ℞ 5---1 & tres numeri quæſiti ſunt 2. ℞ 5--1. 3--℞ 5.

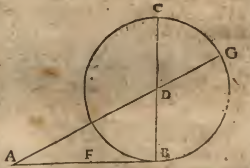
Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, ponatur A maior pars, ergo minor erit B--A. Igitur B quadr.--B A æquabitur A quadrato.

Hinc Canon.

Quadrato quantitatis diuidendæ adde quadratum quod fit à ſemiſſe eiuſdem quantitatis: huius enim ſummæ radix quadrata eadem multata ſemiſſe, exhibet majorem partem quæſitam. Vnde minor non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto linea A B diuidenda in F ita vt ſit tota A B ad maius ſegmentum A F vt maius ſegmentum A F ad minus F B. Ponatur B C perpendicularis & æqualis B A, diuiſaque ea bifariam in D deſcribatur centro D. & interuallo D B. Circulus &c. ducatur A D G ſecans circulum in E, ponatur que A F æqualis A E. Dicò A B ſectam eſſe in F media & extrema ratione.



Nam cum A B & B C ſint perpendiculares, erit A B tangens. Ac proinde quadratum A B æquatur rectangulo G A E. Ergo vt G A ad A B (hoc eſt E G) ita A B ad A E (hoc eſt A F) & diuidendo

vt A E ad E G ita BF ad F A. Seu vt AF ad A B ita BF ad F A. Igitur inuertendo vt A B ad A F ita AF ad F B. Quod erat demonſtrandum.

Propositio V.

Quantitatem datam diuidere media & extrema ratione harmonicè.

DEtur numerus 6 hoc modo diuidendus & ponatur 1R pro maiore quæſito ergo minor erit 9--1 R. Et quoniam ex tribus quantitatibus harmonicè proportionalibus eſt vt maior ad minorem, ita differentia maioris & mediæ ad differentiam mediæ & minoris, erit vt 6 ad 6--1 R ita 6--1 R ad 2 R--6. Ergo productus ſub extremis 12 R--36. æquatur producto ſub mediis 36 † 1 Q--12R. Ac proinde 1 Q eſt æquale 24 R--72. Et ſic 1 R eſt 12 -- ℞ 72. & tres numeri harmonicè proportionales ſunt 6. 12--℞ 72. ℞ 72--6. duoque minores æquantur maiori.

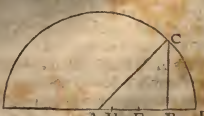
Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B ponatur maior pars quæſita A. Ergo minor erit B—A. Igitur vt B ad B A ita B—A ad 2 A—B. Ac propterea productus ſub extremis 2 A-B—B quadr. æquatur producto ſub mediis B quadr. † A quadr.—2 B A. Ergo poſt reductionem debitam A quadr. æquatur 4 A B—2 B quadr.

Hinc Canon.

Cape quadratum quantitatis datæ, illudque duplica: huius enim dupli radix quadrata multata quantitate data, exhibet minorem ex quæſitis. Vnde maior non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda in E taliter, vt A B, A E, E B, ſint tres harmonice proportionales. Ponatur B C æqualis & perpendicularis A B Et centro A interuallo A C deſcribatur ſemicirculus ſecans A B productâ in puncto D. Dico BD fore



minor

minus ſegmentum quæſitum, ſumptaque BE æquali BD, lineam AB fore ſectam in E vt poſcitur. Sumpta enim EH æquali EB cum quadratum AC ſit æquale quadratis AB & BC, erit duplum quadrati AB, ſed quadratum AD æquatur quadrato AC, igitur quadratum AD duplum eſt quadrati AB. At quadratum AD æquale eſt quadratis AH & HD & duplo rectanguli AHD. Ergo duplum quadratũ AB æquatur quadratis AH & HD & duplo rectanguli AHD. Eſt autẽ HD quadratũ noncuplum quadrati DB, ſeu BE, ſeu HE, quia tres illæ lineæ ex conſtructione ſunt æquales, & duplum rectangulum AHD æquale eſt ſextuplo rectanguli AHE. Igitur duplum quadratum AB æquatur quadrato AH, noncuplo quadrato HE & ſextuplo rectanguli AHE. Sed per 4 ſecundi duplum quadratum AB æquatur duplo quadrato AH duplo quadrato HB & quadruplo rectangulo AHB. Eſt verò duplũ quadratum HB æquale octuplo quadrati HE, quadruplum autem rectanguli AHB æquatur octuplo rectanguli AHE. Igitur duplum quadratum AH plus octuplo quadrato HE plus octuplo rectangulo AHE, æquale eſt quadrato AH plus noncuplo quadrato HE plus ſextuplo rectangulo AHE. Demptiſque communibus, reſtabit AH quadratum plus duplo rectangulo AHE æquale quadrato HE ſeu EB Ergo cum duplum rectangulum AHE æquetur rectangulo AHB erit quadratum AH plus rectangulo AHB æquale quadrato EB. Sed quadratũ AH plus rectangulo AHB (per 3 ſecundi) æquatur rectangulo BAH, igitur rectangulum BAH eſt æquale quadrato EB. Ac proinde (per 17 ſexti vt AB ad EB ita EB ad AH. Sed EB eſt differentia AB & AE & AH differentia AE & EB (eſt enim EB æqualis HE. Ergo vt maior AB ad minorem EB, ita differentia maioris & mediæ ad differentiam mediæ & minoris. Igitur AB diuiſa eſt in E media extrema ratione harmonicè. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Si fuerint tres lineæ harmonicè proportionales & maior ſit æqualis duabus reliquis, quadratum minoris æquabitur rectangulo ſub maiore in minorem differentiam.

Propositio VI.

Datam quantitatem deuidere mediâ & extrema ratione Arithmeticè.

ESto numerus diuidendus 6. ponaturque maior quæſitus 1 R, ergo 6—1 R erit minor. Igitur differentiâ totius 6 & maioris 1 R erit æqualis differentiæ maioris ſegmenti & minoris proinde 6---1 R æquabitur 2 R – 6. & fit 1 R æqualis 4. erunt ergo tres numeri arithmeticè proportionales 6. 4. 2.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, ponatur maior quæſita A, ergo minor erit B--A. Igitur B—A æqualis eſt 2 A--B. & ita 2 B æquabuntur 3 A. & fit A æqualis $\frac{2\,B}{3}$.

Hinc Canon.

Cape duplum quantitatis diuidendæ, & huius dupli trientem: habebiſque maiorem quantitatem ex quæſitis. Vel Quantitatis diuidendæ triens erit minor quæſitarum.

Hinc Effectio Geometrica,

Sit data linea A diuidenda in duas partes, taliter vt differentia A & maioris partis æquetur differentiæ partium. Cape trientem lineæ A, & erit minor quæſitarum. Hanc tolle ex A & fiet maior. Nam cum tollatur triens ex A reſtabunt duo trientes, at duo trientes differunt à triente per trientem, & ſimiliter duo trientes differunt à tribus trientibus per trientem. Igitur cum duæ minores lineæ æquentur toti A, ſequitur lineam A diuiſam eſſe mediâ & extrema ratione arithmeticè. Quod erat demonſtrandum.

Propositio VII.

Diuidere quantitatem datam in duas tali ratione vt quadratum vnius ſegmenti ad planum ſub altero ſegmento in quantitatem diuidendam, habeat rationem datam.

SIt datus numerus 10 diuidendus in duos ſic vt quadratum minoris ad planũ ſub maiore ie 10 habeat rationem 2 ad 5. Ponatur

minus ſegmentum quæſitum, ſumptaque BE æquali BD, lineam AB fore ſectam in E vt poſcitur. Sumpta enim EH æquali EB cum quadratum AC ſit æquale quadratis AB & BC, erit duplum quadrati AB, ſed quadratum AD æquatur quadrato AC, igitur quadratum AD duplum eſt quadrati AB. At quadratum AD æquale eſt quadratis AH & HD & duplo rectanguli AHD. Ergo duplum quadratũ AB æquatur quadratis AH & HD & duplo rectauguli AHD. Eſt autẽ HD quadratũ noncuplum quadrati DB, ſeu BE, ſeu HE, quia tres illæ lineæ ex conſtructione ſunt æquales, & duplum rectangulum AHD æquale eſt ſextuplo rectanguli AHE. Igitur duplum quadratum AB æquatur quadrato AH, noncuplo quadrato HE & ſextuplo rectanguli AHE. Sed per 4 ſecundi duplum quadratum AB æquatur duplo quadrato AH duplo quadrato HB & quadruplo rectangulo AHB. Eſt verò duplũ quadratum HB æquale octuplo quadrati HE, quadruplum autem rectanguli AHB æquatur octuplo rectanguli AHE. Igitur duplum quadratum AH plus octuplo quadrato HE plus octuplo rectangulo AHE, æquale eſt quadrato AH plus noncuplo quadrato HE plus ſextuplo rectangulo AHE. Demptiſquæ communibus, reſtabit AH quadratum plus duplo rectangulo AHE æquale quadrato HE ſeu EB. Ergo cùm duplum rectangulum AHE æquætur rectangulo AHB erit quadratum AH plus rectangulo AHB. æquale quadrato EB. Sed quadratũ AH plus rectangulo AHB (per 3 ſecundi) æquatur rectangulo BAH, igitur rectangulum BAH eſt æquale quadrato EB. Ac proinde (per 17 ſexti vt AB ad EB ita EB ad AH. Sed EB eſt differentia AB & AE & AH differentia AE & EB (eſt enim EB æqualis HE. Ergo vt maior AB ad minorem EB, ita differentia maioris & mediæ ad differentiam mediæ & minoris. Igitur AB diuiſa eſt in E media extrema ratione harmonicè. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Si fuerint tres lineæ harmonicè proportionales & maior ſit æqualis duabus reliquis, quadratum minoris æquabitur rectangulo ſub maiore in minorem differentiam.

PROPOSITIO VI.

Datam quantitatem diuidere mediâ & extrema ratione Arithmeticè.

ESto numerus diuidendus 6. ponaturque maior quæſitus I R, ergo 6—I R erit minor. Igitur differentia totius 6 & maioris I R erit æqualis differentiæ maioris ſegmenti & minoris proinde 6—I R æquabitur 2 R – 6. & fit I R æqualis 4. erunt ergo tres numeri arithmeticè proportionales 6. 4. 2.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B, ponatur maior quæſita A, ergo minor erit B—A. Igitur B—A æqualis eſt 2 A—B. & ita 2 B æquabuntur 3 A. & fit A æqualis $\frac{2\ B}{3}$.

Hinc Canon.

Cape duplum quantitatis diuidendæ, & huius dupli trientem: habebiſque maiorem quantitatem ex quæſitis. Vel Quantitatis diuidendæ triens erit minor quæſitarum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A diuidenda in duas partes, taliter vt differentia A & maioris partis æquetur differentiæ partium. Cape trientem lineæ A, & erit minor quæſitarum. Hanc tolle ex A & fiet maior. Nam cum tollatur triens ex A reſtabunt duo trientes, at duo trientes differunt à triente per trientem, & ſimiliter duo trientes differunt à tribus trientibus per trientem. Igitur cum duæ minores lineæ æquentur toti A, ſequitur lineam A diuiſam eſſe mediâ & extrema ratione arithmeticè. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Diuidere quantitatem datam in duas tali ratione vt quadratum vnius ſegmenti ad planum ſub altero ſegmento in quantitatem diuidendam, habeat rationem datam.

SIt datus numerus 10 diuidendus in duos ſic vt quadratum minoris ad planũ ſub maiore ie 10 habeat rationem 2 ad 5. Ponatur

minor quæſitus I R, ergo maior erit 10--I R. Ac proinde I Q ad 100--10 R eſt vt 2 ad 5. Igitur productus ſub extremis 5 Q æquatur producto ſub mediis 200--20R. Et ſit I R ſeu minor quæſitorum ℞ 44 -2. maior autem 12 -- 44.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B eſto ratio data D ad B, & ponatur A minor, ergo B - A maior. Igitur A quadr. Ad B quadr.—B A eſt in ratione data D ad B & ita productus ſub extremis B A quadr. eſt æqualis producto ſub mediis D B quadr. D B A. Et proinde A quadratum æquatur D B—D A.

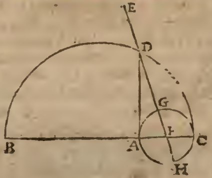
Hinc Canon.

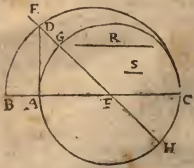
Reducito rationem datam taliter vt quantitas diuidenda ſit poſterior terminus rationis: tum prioris termini cape dimidium, & eius dimidij quadrato adde planum ſub duobus terminis rationis: huius ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio dabit maius ſegmentum quantitatis diuidendæ (ſi data ſit ratio quadrati maioris partis ad planum ſub tota in minorem) dabit verò minus ſegmentū. (ſi data ſit ratio quadrati minoris partis ad planum ſub tota in maiorem)

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda in duas taliter vt quadratū vnius partis ad rectangulum ſub altera in totam A B habeat rationem datam R ad S. Fiat vt S ad R ita A B ad A C quæ ponatur in directum cum A B & ſuper B C fiat ſemicirculus ſuper A C autem circulus in leger. Deinde ducatur A D perpendicularis ipſi B C donec occurrat peripheriæ in puncto D, & per centrum circuli ducatur D F H ſecans circulum in G, ſumaturque G E æqualis A B. Dico G D & D E fore duo ſegmenta quæſita. Cum enim (per 8 ſexti) tres illæ lineæ A C A D A B ſint continuè proportionales, erit vt A C ad A B ita quadratum A D ad quadratum A B (hoc eſt G E) ſed A D eſt tangens, ergo eius quadratum æquatur rectangulo H D G (per 36 tertij) igitur vt A C ad A B ita rectangulum H D G ad quadratum G E. Sed vt A C ad A B (ſeu H G ad G E) ita eſt propter eamdem altitudinem G D, rectangulum H G D ad rectangulum E D G Ergo vt rectangulum H D G ad quadratum G E ita H G D rectangulum ad E G D rectangulum Quoniam igitur eſt vt totum rectangulum H D G ad totum quadratum G E, ita ablatum

rectangulum H G D ad ablatum rectangulum E G D, erit & reliquum quadratum G D ad reliquum rectangulum G E D, vt totum ad totum, ſeu vt A C ad A B. Ergo linea A B data, ſeu ipſi ſumpta æqualis G E diuiſa eſt in D taliter, vt quadratum G D ad rectangulum G E D habeat rationem datam A C ad A B ſeu R ad S. Quod erat demonſtrandũ.





Scholium.

Hic aduertè lineam datam ſecari longè ſubtilius & vniuerſalius quam quæ ſecatur media & extrema ratione Geometricè: ſiquidẽ in ipſa quadratum maioris ſegmenti ad rectangulum ſub tota & minori ſegmento habet proportionem æqualitatis; in illa vero quadratum cuiuſcumque ſegmenti ad rectangulum ſub tota in alterum ſegmentum habet rationem datam.

Propositio VIII.

Datam quantitatem diuidere in duas partes, ita vt planum ſub tota in differentiam partium ad planum ſub minore in differentiam totius & maioris habeat rationem datam.

SIt datus numerus *6* & ratio *3* ad *2*. ponatur autem 1 R pro maiore parte, ergo minor erit *6* -- 1 R, ac proinde differentia partium eſt *2* R -- *6* quæ ducta in *6*, facit productum 12 R — *36* qui ad planum ſub minore in differentiam totius & maioris, quod qui-

dem

minor quæſitus 1 R, ergo maior erit 10--1 R. Ac proinde 1 Q ad 100--10 R eſt vt 2 ad 5. Igitur productus ſub extremis 5 Q æquatur producto ſub mediis 200---20R. Et fit 1 R ſeu minor quæſitorum ℞ 44--2. maior autem 12--44.

Per Algebram ſpecioſam; data quantitate diuidenda B eſto ratio data D ad B, & ponatur A minor, ergo B--A maior. Igitur A quadr. Ad B quadr.—B A eſt in ratione data D ad B & ita productus ſub extremis B A quadr. eſt æqualis producto ſub mediis D B quadr. D B A. Et proinde A quadratum æquatur D B—D A.

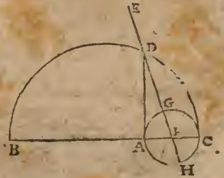
Hinc Canon.

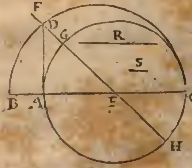
Reducito rationem datam taliter vt quantitas diuidenda ſit poſterior terminus rationis: tum prioris termini cape dimidium, & eius dimidij quadrato adde planum ſub duobus terminis rationis: huius ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio dabit maius ſegmentum quantitatis diuidendæ (ſi data ſit ratio quadrati maioris partis ad planum ſub tota in minorem) dabit verò minus ſegmentū. (ſi data ſit ratio quadrati minoris partis ad planum ſub tota in maiorem)

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea A B diuidenda in duas taliter vt quadratū vnius partis ad rectangulum ſub altera in totam A B habeat rationem datam R ad S. Fiat vt S ad R ita A B ad A C quæ ponatur in directum cum A B & ſuper B C fiat ſemicirculus ſuper A C autem circulus in leger. Deinde ducatur A D perpendicularis ipſi B C donec occurrat peripheriæ in puncto D, & per centrum circuli ducatur D E H ſecans circulum in G, ſumaturque G E æqualis A B. Dico G D & D E fore duo ſegmenta quæſita. Cum enim (per 8 ſexti) tres illæ lineæ A C A D A B ſint continuè proportionales, erit vt A C ad A B ita quadratum A D ad quadratum A B (hoc eſt G E) ſed A D eſt tangens, ergo eius quadratum æquatur rectangulo H D G (per 36 tertij) igitur vt A C ad A B ita rectangulum H D G ad quadratum G E. Sed vt A C ad A B (ſeu H G ad G E) ita eſt propter eamdem altitudinem G D, rectangulum H G D ad rectangulum E D G. Ergo vt rectangulum H D G ad quadratum G E ita H G D rectangulum ad E G D rectangulum. Quoniam igitur eſt vt totum rectangulum H D G ad totum quadratum G E, ita ablatum

rectangulum H G D ad ablatum rectangulum E G D, erit & reliquum quadratum G D ad reliquum rectangulum G E D, vt totum ad totum, ſeu vt A C ad A B. Ergo linea A B data, ſeu ipſi ſumpta æqualis G E diuiſa eſt in D taliter, vt quadratum G D ad rectangulum G E D habeat rationem datam A C ad A B ſeu R ad S Quod erat demonſtrandũ.





Scholium.

Hic aduerte lineam datam ſecari longè ſubtilius & vniuerſalius quam quæ ſecatur media & extrema ratione Geometricè: ſiquidẽ in ipſa quadratum maioris ſegmenti ad rectangulum ſub tota & minori ſegmento habet proportionem æqualitatis; in illa vero quadratum cuiuſcumque ſegmenti ad rectangulum ſub tota in alterum ſegmentum habet rationem datam.

Propositio VIII.

Datam quantitatem diuidere in duas partes, ita vt planum ſub tota in differentiam partium ad planum ſub minore in differentiam totius & maioris habeat rationem datam.

Sit datus numerus 6 & ratio 3 ad 2. ponatur autem 1 R pro maiore parte, ergo minor erit 6 -- 1 R, ac proinde differentia partium eſt 2 R -- 6 quæ ducta in 6, facit productum 12 R — 36 qui ad planum ſub minore in differentiam totius & maioris, quod quidem

dem planum eſt 36 † 1 Q -- 12 R, erit vt 3 ad 2. igitur productus ſub extremis 24 R -- 72 æqualis erit producto ſub mediis 108 † 3 Q -- 36 R. Et fit 1 R ſiue maior 10 -- ℞ 40. minor autem ℞ 40 -- 4.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & ratione C ad B ponatur maior pars quæſita A, ergo minor erit B A. Igitur differentia partium eſt 2 A -- B ac proinde 2 A B -- B quadr. ad B quadr. † A quadr. -- 2 A B eſt vt C ad B. Ergo productus ſub extremis 2 A B quadr. -- B cub. æquatur producto ſub mediis C B quadr. † C A quadr. -- 2 A B C & fit A quadratum æquale

$$\frac{2\text{ A B quadr.} -- \text{B cub.} \dagger 2\text{ A B C} -- \text{C B quadr.}}{\text{C}}$$

Hinc Canon.

Solidum ſub quadrato poſterioris termini rationis datæ in priorem adde cubo poſterioris termini, & ſummam & diuide per priorem terminum, & quotientem ſerua. Tùm duplum quadratum poſterioris termini adde cum duplo plano terminorum, & aggragatum diuide per terminum priorem: huius quotientis cape dimidium, & huius dimidij quadrato detrahe quotientem ſeruatum; reſiduj radix quadrata ſupradicto detracta dimidio, dabit maiorem partem quæſitam, poſteriore termino rationis exiſtente numero diuidendo.

Vel.

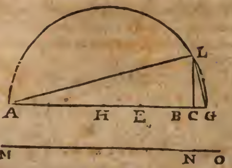
Ex quadrato ſummæ terminorum rationis datæ tolle quadratum prioris terminij iunctum plano ſub terminis: reſiduj radix quadrata ſummæ terminorum detracta, dabit maiorem partem quæſitam priore termino rationis exiſtente numero diuidendo.

Effectio Geometrica.

Sit data linea diuidenda A B in duas A E, E B taliter vt rectangulum ſub A B in differentiam A E & E B ad rectangulum ſub minore E B in differentiam A B & A E habeat rationem datam M N ad N O. Fiat vt M N ad N O, ita A B ad B C, tum ſumatur C G æqualis B C, & ſuper totam A G fiat ſemicirculus, & ex puncto C educatur C L perpendicularis ad A G donec occurrat peripheriæ

Nn

in L, tùm ſumatur C E æqualis C L. Dico A B ſectam eſſe in E vt poſcitur. Accipiatur enim E H æqualis E B. Quoniam igitur C L eſt perpendicularis, erunt (per 8 ſexti) tres illæ A C, C L, C G continuè proportionales. ergo cum C E æquetur C L ex cõſtructione,



& C G ſit etiam æqualis C B erit vt A C ad C E ita C E ad C B. & diuidendo vt A E ad C E, ita E B ad B C. Et permutando vt A E ad E B ita C E ad B C. & diuidendò vt A H ad H E ita E B ad B C. Igitur (per. 17 ſexti) rectangulum ſub A H & B C eſt æquale rectangulo H E B. Ergo vt rectangulum B A in A H ad rectangulum H E B, ita erit (per 7 quinti) rectangulum B A in A H ad rectangulum ex A H & B C. Sed vt rectangulum B A in A H ad rectangulum ex A H & B C, ita eſt, ob eamdem altitudinem, A B linea ad lineam B C. Igitur cum A H ſit differentia partium, A E & E B, erit A B ſecta in E taliter vt rectangulum ſub tota A B in differentiam partium A H, ad rectangulum ſub minore E B in H E differentiam totius A B & maioris partis A E (eſt enim H E æqualis E B) habeat rationem datam A B ad B C ſeu M N ad N O. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hic iterùm aduerte lineam quamcumque huius propoſitionis beneficio ſecari longe ſubtilius & vniuerſalius, quam illam quæ ſecatur media & extrema ratione harmonicè: nam in iſta rectangulum ſub tota in differentiam partium ad rectangulum ſub minore in differẽtiam maioris partis & totius habet rationem æqualitatis: in illa vero prius rectangulum ad poſterius habet rationem quamcumque datam.

dem planum eſt 36 † 1 Q -- 12 R, erit vt 3 ad 2. igitur productus ſub extremis 24 R -- 72 æqualis erit producto ſub mediis 108 † 3 Q -- 36 R. Et fit 1 R ſiue maior 10 -- ℞ 40 minor autem ℞ 40 -- 4.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & ratione C ad B ponatur maior pars quæſita A, ergo minor erit B A. Igitur differentia partium eſt 2 A - B ac proinde 2 A B -- B quadr. ad B quadr. † A quadr. -- 2 A B eſt vt C ad B. Ergo productus ſub extremis 2 A B quadr. -- B cub. æquatur producto ſub mediis C B quadr. † C A quadr. -- 2 A B C & fit A quadratum æquale $\frac{2\ AB\ quadr. -- B\ cub. \dagger\ 2\ ABC -- CB\ quadr.}{C}$

Hinc Canon.

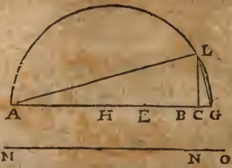
Solidum ſub quadrato poſterioris termini rationis datæ in priorem adde cubo poſterioris termini, & ſummam & diuide per priorem terminum, & quotientem ſerua. Tùm duplum quadratum poſterioris termini adde cum duplo plano terminorum, & aggragatum diuide per terminum priorem: huius quotientis cape dimidium, & huius dimidij quadrato detrahe quotientem ſeruatum; reſiduj radix quadrata ſupradicto detracta dimidio, dabit maiorem partem quæſitam, poſteriore termino rationis exiſtente numero diuidendo.

Vel.

Ex quadrato ſummæ terminorum rationis datæ tolle quadratum prioris terminij iunctum plano ſub terminis: reſiduj radix quadrata ſummæ terminorum detracta, dabit maiorem partem quæſitam priore termino rationis exiſtente numero diuidendo.

Effectio Geometrica.

Sit data linea diuidenda A B in duas A E, E B taliter vt rectangulum ſub A B in differentiam A E & E B ad rectangulum ſub minore E B in differentiam A B & A E habeat rationem datam M N ad N O. Fiat vt M N ad N O, ita A B ad B C, tum ſumatur C G æqualis B C, & ſuper totam A G fiat ſemicirculus, & ex puncto C educatur C L perpendicularis ad A G donec occurrat peripheriæ



in L, tùm ſumatur C E æqualis C L. Dico A B ſectam eſſe in E vt poſcitur. Accipiatur enim E H æqualis E B. Quoniam igitur C-L eſt perpendicularis, erunt (per 8 ſexti) tres illæ A C, C L, C G continuè proportionales, ergo cum C E æquetur C L ex cõſtructione, & C G ſit etiam æqualis C B erit vt A C ad C E ita C E ad C B & diuidendo vt A E ad C E, ita E B ad B C. Et permutando vt A E ad E B ita C E ad B C, & diuidendo vt A H ad H E ita E B ad B C. Igitur (per. 17 ſexti) rectangulum ſub A H & B C eſt æquale rectangulo H E B. Ergo vt rectangulum B A in A H ad rectangulum H E B, ita erit (per 7 quinti) rectangulum B A in A H ad rectangulum ex A H & B C. Sed vt rectangulum B A in A H ad rectangulum ex A H & B C, ita eſt, ob eamdem altitudinem, A B linea ad lineam B C. Igitur cum A H ſit differentia partium A E & E B, erit A B ſecta in E taliter vt rectangulum ſub tota A B in differentiam partium A H, ad rectangulum ſub minore E B in H E differentiam totius A B & maioris partis A E (eſt enim H E æqualis E B) habeat rationem datam A B ad B C ſeu M N ad N-O. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hic iterùm aduerte lineam quamcumque huius propoſitionis beneficio ſecari longe ſubtilius & vniuerſalius, quam illam quæ ſecatur media & extrema ratione harmonicè: nam in iſta rectangulum ſub tota in differentiam partium ad rectangulum ſub minore in differẽtiam maioris partis & totius habet rationem æqualitatis: in illa vero prius rectangulum ad poſterius habet rationem quamcumque datam.

Propositio IX.

Diuidere quantitatem datam in duas tali ratione vt differentia totius & maioris ſegmenti ad differentiam Partium habeat rationem datam.

Sit datus numerus 230 & ratio 10 ad 3. ponatur 1 R pro maiore, ergo 230 — 1 R erit minor. Igitur 230 -- 1 R ad 2 R -- 230 eſt vt 10 ad 3. ac proinde planus ſub extremis 690 -- 3 R æquatur plano ſub mediis 20 R -- 2300. & fit 1 R æqualis 130.

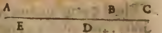
Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & ratione B ad C, ponatur pars maior A, minor erit B -- A. Igitur B -- A ad 2A -- B eſt vt B ad C. Ac proinde CB -- CA æquatur 2 AB -- B. quadr. & fit A æqualis $\frac{\text{CB} + \text{B quadr.}}{\text{2B} + \text{C}}$.

Hinc Canon.

Quadratum prioris termini rationis datæ iunctum cum plano terminorum diuide per ſummam terminorum plus priore termino, & fiet maior pars quæſita, priore termino rationis exiſtente numero diuidendo.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data A B linea diuidenda & ratio A B ad B C. Oporteat autem diuidere A B in duas taliter vt minor pars ad differentiam partium ſit vt A B ad BC. Fiat vt A B plus A C ad A C ita A B ad A D. Dico duas partes quæſitas eſſe A D & D B. Nam cum ſit vt A B plus A C ad A C ita A B ad A D, erit diuidendo vt A B ad A C ita D B ad D A. & per mutando vt A B ad D B ita A C ad D A. Sumendoque D E æqualẽ D B erit vt A D ad D B ſeu DE, ita C D ad D A. Et iterũ diuidendo vt A E ad E D ita C D minus D A ad D A. Rurſus quoniam eſt vt A B plus A C ad A C ita A B ad A D, erit permutando vt A B plus A C ad A B, ita A C ad A D. Et diuidendo vt A C ad A B ita C D ad D A. Et iterùm diuidendo, vt B C ad



A B ita C D minus D A ad D A. Ergo quoniam iam oſtenſum eſt vt C D minus D A ad D A, ita A E ad E D, erit vt A E ad E D, erit vt A E ad E D ita B C ad A B. Et inuertendo, vt E D ſeu D B ad A E ita A B ad B C. Ergo totius A B minor pars D B ad differentiam partium A E eſt in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hic iterùm aduertendum eſt lineam per hanc praxim longe ſecari ſubtilius & vniuerſalius, quam quæ ſecatur media & extrema ratione arithmeticè: ſiquidem in iſta differentia ſunt æquales inter ſe, illic vero quamcumque habeat proportionem.

Propositio X.

Inuenire tria quadrata proportionalia Geometricè, quorum duo minora æquentur maiori.

Elige quemcumque quadratum pro maiori puta 4 cuius radix eſt 2 & ponatur minor quadratus 1 Q ergo quoniam debent eſſe in continua proportione, quadratū medium inuenies 2 R multiplicando videlicet latera maioris & minoris igitur 2 R † 1 Q æquantur 4. & fit 1 R æqualis ℞ 5 -- 1. Quo multiplicato per radicem maioris quæ eſt 2 fit medius quadratus ℞ 20 — 2. & tria quadrata quæſita ſunt 4 ℞ 20 — 2. 6 -- ℞ 20.

Per Algebram ſpecioſam, poſito B quadrato pro maiori eius radix eſt B. Minor ſit A. Ergo B A eſt medius quadratus. Igitur B A † A quadr. æquatur B quadr. & fit A quadratū æquale B quadr. -- B A.

Hinc Canon.

Elige quemcumque numerum quadratum pro maiore: huius quadrati radicem diuide media & extrema ratione per quartam huius: maior pars erit radix minoris quadrati quæſiti. Hac radice ducta in latus maioris dabit quadratum medium quæſitum.

Hinc Effectio Geometrica.

Ducatur quæcumque linea A B diuidaturque per 4 huius media & extrema ratione in C, & facto ſuper totam A B ſemicirculo, erigatur C D perpendicularis ad A B nectanturque A D & D B. Dico

tria

PROPOSITIO IX.

Diuidere quantitatem datam in duas tali ratione vt differentia totius & maioris ſegmenti ad differentiam Partium habeat rationem datam.

Sit datus numerus 230 & ratio 10 ad 3. ponatur 1 R pro maiore, ergo 230—1 R erit minor. Igitur 230 -1 R ad 2 R--230 eſt vt 10 ad 3. ac proinde planus ſub extremis 690--3 R æquatur plano ſub mediis 20 R--2300. & fit 1 R æqualis 130.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & ratione B ad C, ponatur pars maior A, minor erit B--A. Igitur B--A ad 2A--B eſt vt B ad C. Ac proinde CB--CA æquatur 2AB--B quadr. & fit A æqualis

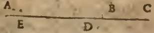
$$\frac{CB + B\ \text{quadr.}}{2B + C}$$

Hinc Canon.

Quadratum prioris termini rationis datæ iunctum cum plano terminorum diuide per ſummam terminorum plus priore termino, & fiet maior pars quæſita, priore termino rationis exiſtente numero diuidendo.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data A B linea diuidenda & ratio A B ad B C. Oporteat autem diuidere A B in duas taliter vt minor pars ad differentiam partium ſit vt A B ad BC. Fiat vt A B plus A C ad A C ita A B ad A D. Dico duas partes quæſitas eſſe A D & D B. Nam cum ſit vt A B plus A C ad A C ita A B ad A D, erit diuidendo vt A B ad A C ita D B ad D A.



& permutando vt A B ad D B ita A C ad D A. Sumendoque D E æqualē D B erit vt A D ad D B ſeu DE, ita C D ad D A. Et iterū diuidendo vt A E ad E D ita C D minus D A ad D A. Rurſus quoniam eſt vt A B plus A C ad A C ita A B ad A D, erit permutando vt A B plus A C ad A B, ita A C ad A D. Et diuidendo vt A C ad A B ita C D ad D A. Et iterùm diuidendo, vt B C ad

A B ita C D minus D A ad D A. Ergo quoniam iam oſtenſum eſt vt C D minus D A ad D A, ita A E ad E D, erit vt A E ad E D, erit vt A E ad E D ita B C ad A B. Et inuertendo, vt E D ſeu D-B ad A E ita A B ad B C. Ergo totius A B minor pars D B ad differentiam partium A E eſt in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hic iterùm aduertendum eſt lineam per hanc praxim longe ſecari ſubtilius & vniuerſalius, quam quæ ſecatur media & extrema ratione arithmeticè: ſiquidem in iſta differentia ſunt æquales inter ſe, illic vero quamcumque habeat proportionem.

Propositio X.

Inuenire tria quadrata proportionalia Geometricè, quorum duo minora æquentur maiori.

Elige quemcumque quadratum pro maiori puta 4 cuius radix eſt 2 & ponatur minor quadratus 1 Q ergo quoniam debent eſſe in continua proportione, quadratũ medium inuenies 2 R multiplicando videlicet latera maioris & minoris igitur 2 R † 1 Q æquantur 4. & fit 1 R æqualis ℞ 5 -- 1. Quo multiplicato per radicem maioris quæ eſt 2 fit medius quadratus ℞ 20 — 2. & tria quadrata quæſita ſunt 4 ℞ 20 — 2. 6 -- ℞ 20.

Per Algebram ſpecioſam, poſito B quadrato pro maiori eius radix eſt B. Minor ſit A. Ergo B A eſt medius quadratus. Igitur B A † A quadr. æquatur B quadr. & fit A quadratũ æquale B quadr.--- B A.

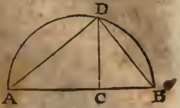
Hinc Canon.

Elige quemcumque numerum quadratum pro maiore: huius quadrati radicem diuide media & extrema ratione per quartam huius: maior pars erit radix minoris quadrati quæſiti. Hac radice ducta in latus maioris dabit quadratum medium quæſitum.

Hinc Effectio Geometrica.

Ducatur quæcumque linea A B diuidaturque per 4 huius media & extrema ratione in C, & facto ſuper totam A B ſemicirculo, erigatur C D perpendicularis ad A B nectanturque A D & D B. Dico

tria



tria quadrata A B, A D, D B eſſe continuè proportionalia, & quadrata duarum minorum linearum A D, B D æquari quadrato A B. Nam cum A B ſecta ſit media & extrema ratione in C, erit vt A B ad A C ita A C ad C B. Ergo quadratum A C æquatur rectangulo A B C. Sed (per 8 ſexti) eſt vt A B ad B D ita B D ad B C. Igitur quadratum B D eſt æquale rectangulo A B D. Ac cum duo quadrata A C & B D ſigillatim ſumpta æquentur eidem rectangulo A B C, erunt inter ſe æqualia. Sed (per eamdẽ 8 ſexti) eſt vt A B ad A D ita A D ad A C. Ergo cum A C ſit æqualis B D, erit quoque vt A B ad A D ita A D ad D B. Igitur earum quadrata erunt etiam. Sed angulus A D B in ſemicirculo eſt rectus, ergo quadrata A D & D B æquantur quadrato A B. Igitur inuenta ſunt tria quadrata proportionalia quorum maius æquatur duobus reliquis. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc duo elegantiſſima problemata abſolues; primum eſt, Triangulum rectangulum efficere cuius tria latera ſint continuè proportionalia. Secundum eſt eiuſmodi, diuidere datam quantitatem in tres continuè proportionales, ita vt quadratum maioris æquetur quadratis reliquarum: ſi enim fiat vt ſumma harum trium A B, A D D B ad ſingulas, ita linea data ad alias; effectũ erit quod poſtulatur.

PROPOSITIO XI.

Inuenire tres quantitates quarum duæ minores æquentur maiori, ita vt differentia quadratorum à duabus maioribus ad differentiam quadratorum à duabus minoribus habeat rationem datam.

ESto ratio data 16 ad 5. & ſũpto priori termino rationis 16 pro minori trium numerorum quæſitorum pono medium eſſe 1 R. Ergo quoniam duo minores debent æquari maiori, erit 16 † 1 R. Huius quadratum eſt 256 † 1 R † 32 R, à quo ſi tollatur quadratum mediæ nẽpe 1 Q reſtabit differentia 256 † 32 R quæ ad differentiã

medij & minoris 1 Q---256 habet rationem datam 16 ad 5. ac ideo productus ſub extremis 1280 † 160 R æquatur producto ſub mediis 16 Q---4096. & proinde 1 Q eſt æquale 336 † 10 R. & fit 1 R æqualis 24. ergo tres numeri quæſiti ſunt 16. 24. 40.

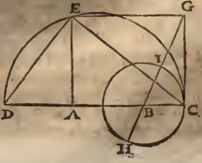
Per Algebram ſpecioſam. C ad D, ſumatur C pro minori, & ponatur A pro media quantitate, ergo C † A erit maior. Huius quadratum eſt C quadr. † A quadr. † 2 C A. vnde ſublato mediæ quadrato reſtat C quadr. † 2 C A quæ ad A quadr. --- C quadr. habet rationē C ad D. Igitur productus D C quadr. † 2 D C A æquantur C A quadr. -- C cub. ac poſt debitam reductionem fit A quadratum æquale D C † C quadr. † 2 D A.

Hinc Canon.

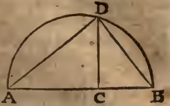
Quadratum prioris termini rationis datæ iunge cum quadrato poſterioris & plano ſub terminis: huius ſummæ radix quadrata poſteriori termino aucta dat mediam quantitatē quæſitam, minore exiſtēte priore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B C. Sumatur autem A D æqualis A B, & ſuper totam D C fiat ſemicirculus, erigaturque A F perpēdicularis ad A C, cui parallela & æqualis ſit C G. Tum centro B, interuallo B C fiat circulus, & ducatur G B H ſecans circulum in I. Dico A B eſſe minorem ex quæſitis, G H mediam, & compoſitam ex vtraquē A B & G H eſſe maiorem quæſitam. Et enim (per 8 ſexti) F A eſt midia proportionalis inter A C & A D. Ergo eius quadratum æquatur rectangulo D A C. Sed rectangulum D A C æquatur quadrato A B & rectangulo A B C, quia A D ſumpta eſt æqualis A B. Ergo quadratum A F (hoc eſt C G) æquale eſt quadrato A B & rectangulo A B C. Sed G C eſt tangens, igitur quadratum G C æquale eſt rectangulo H G I. Ac proinde cum (per 2 ſecundi) quadratū H G æquetur rectangulis H G · erit quadrat H G æquale rectangulo G H I plus rectangulo A B C plus quadrato A B. Sed rectangulum G H I æquatur rectangulo G H B duplo Igitur quadratorum A B & H G differentia eſt rectangulum



tria quadrata A B, A D, D B eſſe continuè proportionalia, & quadrata duarum minorum linearum A D, B D æquari quadrato A B. Nam cum A B ſecta ſit media & extrema ratione in C, erit vt A B ad A C ita A C ad C B. Ergo quadratum A C æquatur rectangulo A B C. Sed (per 8 ſexti) eſt vt A B ad B D ita B D ad B C. Igitur quadratum B D eſt æquale rectangulo A B D. Ac cum duo quadrata A C & B D ſigillatim ſumpta æquentur eidem rectangulo A B C, erunt inter ſe æqualia. Sed (per eamdē 8 ſexti) eſt vt A B ad A D ita A D ad A C. Ergo cum A C ſit æqualis B D, erit quoque vt A B ad A D ita A D ad D B. Igitur earum quadrata erunt etiam. Sed angulus A D B in ſemicirculo eſt rectus, ergo quadrata A D & D B æquantur quadrato A B. Igitur inuenta ſunt tria quadrata proportionalia quorum maius æquatur duobus reliquis. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Hinc duo elegantiſſima problemata abſolues; primum eſt, Triangulum rectangulum efficere cuius tria latera ſint continuè proportionalia. Secundum eſt eiuſmodi, diuidere datam quantitatem in tres continuè proportionales, ita vt quadratum maioris æquetur quadratis reliquarum: ſi enim fiat vt ſumma harum trium A B, A D D B ad ſingulas, ita linea data ad alias, effectū erit quod poſtulatur.

Propositio XI.

Inuenire tres quantitates quarum duæ minores æquentur maiori, ita vt differentia quadratorum à duabus maioribus ad differentiam quadratorum à duabus minoribus habeat rationem datam.

Esto ratio data 16 ad 5. & ſūpto priori termino rationis 16 pro minori trium numerorum quæſitorum pono medium eſſe 1 R. Ergo quoniam duo minores debent æquari maiori, erit 16 † 1 R. Huius quadratum eſt 256 † 1 R † 32 R, à quo ſi tollatur quadratum mediæ nēpe 1 Q reſtabit differentia 256 † 32 R quæ ad differentiā

medij & minoris I Q---256 habet rationem datam 16 ad 5. ac ideo productus ſub extremis 1280 † 160 R æquatur producto ſub mediis 16 Q---4096. & proinde I Q eſt æquale 336 † 10 R. & fit I R æqualis 24. ergo tres numeri quæſiti ſunt 16. 24. 40.

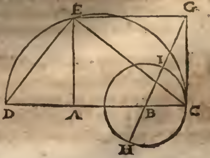
Per Algebram ſpecioſam, C ad D, ſumatur C pro minori, & ponatur A pro media quantitate, ergo C † A erit maior. Huius quadratum eſt C quadr. † A quadr. † 2 C A. vnde ſublato mediæ quadrato reſtat C quadr. † 2 C A quæ ad A quadr. --- C quadr. habet ratione͂ C ad D. Igitur productus D C quadr. † 2 D C A æquantur C A quadr. --C cub. ac poſt debitam reductionem fit A quadratum æquale D C † C quadr. † 2 D A.

Hinc Canon.

Quadratum prioris termini rationis datæ iunge cum quadrato poſterioris & plano ſub terminis: huius ſummæ radix quadrata poſteriori termino aucta dat mediam quantitate͂ queſitam, minore exiſte͂te priore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B C. Sumatur autem A D æqualis A B, & ſuper totam D C fiat ſemicirculus, erigaturque A F perpe͂dicularis ad A C, cui parallela & æqualis ſit C G. Tum centro B, interuallo B C fiat circulus, & ducatur G B H ſecans circulum in I. Dico A B eſſe minorem ex quæſitis, G H mediam, & compoſitam ex vtraque A B & G H eſſe maiorem quæſitam. Et enim (per 8 ſexti) F A eſt midia proportionalis inter A C & A D. Ergo eius quadratum æquatur rectangulo D A C. Sed rectangulum D A C æquatur quadrato A B & rectangulo A B C, quia A D ſumpta eſt æqualis A B. Ergo quadratum A F (hoc eſt C G) æquale eſt quadrato A B & rectangulo A B C. Sed G C eſt tangens, igitur quadratum G C æquale eſt rectangulo H G I. Ac proinde cum (per 2 ſecundi) quadratu͂ H G æquetur rectangulis H G I erit qu adrat H G æquale rectangulo G H I plus rectangulo A B C plus quadrato A B. Sed rectangulum G H I æquatur rectangulo G H B duplo. Igitur quadratorum A B & H G differentia eſt rectangulum



A B C & duplum rectangulum G H B. Sed iſta duæ rectangula propter eamdem altitudinem B C & H B æqualia ſunt rectangulo ex B C in A B & duplam G H. Igitur differentia quadratorum A-B & H G æquatur rectangulo ex B C in A B plus dupla H G. Eſt vero quadratum compoſitæ ex A B & G H æquale quadratis A B & G H & duplo rectangulo ex A B in G H (per 4 ſecundi) ergo differentia quadrati compoſitæ ex A B & G H à quadrato G H eſt quadratum A B & rectangulum ex A B in duplam G H. Igitur ea differentia æquabitur rectangulo ſub A B in compoſitam ex A B & dupla G H. iſtud autem rectangulum ſub A B in compoſitam ex A B & dupla G H ad rectangulum ſub B C in compoſitam ex A B & dupla G H propter eamdem altitudinem eſt vt A B ad B C. Ergo differentia quadrati compoſitæ ex A B & G H & quadrati G-H ad differentiam quadratorũ G H & A B eſt in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium,

Hinc ſolues iſtud problema: Diuidere lineam datam in duas ita vt differentia quadratorum totius & maioris ſegmenti ad differentiam, quadratorum à ſegmentis ortorum habeat rationem datam; ſi enim fiat vt ſumma ex A B & G H ad quod libet ſegmentum ita linea data ad aliud, abſolutum erit problema.

Potuiſſent poni maior vel minor, ſicut poſuimus mediam I R. Vnde diuerſi canones & effectiones Geometricæ oritentur: ſed hoc indicaſſe ſatis eſto.

PROPOSITIO XII.

Inuenire tres quantitates tales vt ſumma quadratorum primo & ſecundæ ad differentiam quadratorum ſecundæ & tertiæ, habeat rationem datam.

SIt data ratio 5 ad 3. accipiaturque quilibet numerus, puta 2, pro primo ex quæſitis & ponatur ſecundus I R, ergo horum duorum quadrata erunt 4 † I Q. Fiat iam vt 5 ad 3 ita 4 † I Q ad aliud, & habebis 12 † 3 Q. pro differentia quadratorum ſecundi & tertij,

quare ſi huic differentiâ addas quadratum ſecundi 1 Q fiet quadratum tertij $\frac{12 \dagger 8\,Q.}{5}$ Igitur tertius numerus erit ℞ $\left(\frac{12 \dagger 8\,Q}{5}\right)$ & eſt quæſtio ſoluta indefinitè, poteſtque ſumi quilibet numerus pro valore radicis. Primo itaque exiſtente 2 ſumatur ſecundus ad libitũ 6, tertius ergo qui inuentus eſt ℞ $\left(\frac{12 \dagger 8\,Q}{5}\right)$ erit ℞ 60. & ſatiſfaciunt quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, detur ratio C ad D, accipiaturque pro prima quantitate B & ponatur A pro ſecunda. Fiatque vt C ad D ita ſumma quadratorum primæ & ſecundæ B quadr. † A quadr. ad aliud, fiet differentia quadratorum ſecundæ & tertiæ $\frac{\text{D B quadr.} \dagger \text{D A quadr.}}{\text{C}}$ cui ſi addas quadratum ſecundæ, & aggregati capias radicem quadratam exiſtet tertia quantitas ℞ $\left(\frac{\text{D B quadr.} \dagger \text{D A quadr.} \dagger \text{C A quadr.}}{\text{C}}\right)$ & eſt ſoluta quæſtio indefinitè.

Hinc Canon.

Cape pro duabus prioribus quantitatibus, quas volueris: & quadratorum ab illis ortorum ſummam duc in poſteriorem rationis terminum: productum adde producto qui fit ex quadrato ſecunda in priorem terminũ rationis: ſummam qua inde naſcitur diuide per priorem terminũ. quotientis radix quadrata dabit tertiam quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B C & ſumatur E A æqualis A B, & C D æqualis B C. Tum ſupra totam E D fiat ſemicirculus, & ex puncto A erigatur perpendicularis A F & ipſi æqualis ſumatur B G. Dico E A, A B & B G fore tres quæſitas, nam (per 8 ſexti) E A A F A D erunt continuè proportionales, ac proinde vt E A ad A D, ita quadratum E A ad quadratum A F (hoc eſt B G) & inuertendo vt A D ad A E (ſeu A B) ita quadratum B G ad E A. & diuidendo, vt B D ad E A ita quadratum B G multatum quadrato E A ſeu A B ad quadratum E A & duplando conſequantia vt B D

ad

A B C & duplum rectangulum G H B. Sed iſta duæ rectangula propter eamdem altitudinem B C & H B æqualia ſunt rectangulo ex B C in A B & duplam G H. Igitur differentia quadratorum A-B & H G æquatur rectangulo ex B C in A B plus dupla H G. Eſt vero quadratum compoſitæ ex A B & G H æquale quadratis A B & G H & duplo rectangulo ex A B in G H (per 4 ſecundi) ergo differentia quadrati compoſitæ ex A B & G H à quadrato G H eſt quadratum A B & rectangulum ex A B in duplam G H. Igitur ea differentia æquabitur rectangulo ſub A B in compoſitam ex A B & dupla G H. iſtud autem rectangulum ſub A B in compoſitam ex A B & dupla G H ad rectangulum ſub B C in compoſitam ex A B & dupla G H propter eamdem altitudinem eſt vt A B ad B C. Ergo differentia quadrati compoſitæ ex A B & G H & quadrati G-H ad differentiam quadratorũ G H & A B eſt in ratione data A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium,

Hinc ſolues iſtud problema: Diuidere lineam datam in duas ita vt differentia quadratorum totius & maioris ſegmenti ad differentiam, quadratorum à ſegmentis ortorum habeat rationem datam. ſi enim fiat vt ſumma ex A B & G H ad quodlibet ſegmentum ita linea data ad aliud, abſolutum erit problema.

Potuiſſent poni maior vel minor, ſicut poſuimus mediam I R. Vnde diuerſi canones & effectiones Geometricæ orirentur: ſed hoc indicaſſe ſatis eſto.

PROPOSITIO XII.

Inuenire tres quantitates tales vt ſumma quadratorum primæ & ſecundæ ad differentiam quadratorum ſecundæ & tertiæ, habeat rationem datam.

SIt data ratio 5 ad 3. accipiaturque quilibet numerus, puta 2, pro primo ex quæſitis & ponatur ſecundus 1 R, ergo horum duorum quadrata erunt 4 † 1 Q. Fiat iam vt 5 ad 3 ita 4 † 1 Q ad aliud, & habebis 12 † 3 Q. pro differentia quadratorum ſecundi & tertij,

quare ſi huic differentià addas quadratum ſecundi 1 Q fiet quadratum tertij 12 † 8 Q. Igitur tertias numerus erit ℞ (12 † 8 Q)&

5 5

eſt quæſtio ſoluta indefinitè, poteſtque ſumi quilibet numerus pro valore radicis. Primo itaque exiſtente 2 ſumatur ſecundus ad libitū 6. tertius ergo qui inuentus eſt ℞ (12 † 8 Q) erit ℞ 60. & ſatiſfa-

5

ciunt quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, detur ratio C ad D, accipiaturque pro prima quantitate B & ponatur A pro ſecunda. Fiatque vt C ad D ita ſumma quadratorum primæ & ſecundæ B quadr. † A quadr. ad aliud, fiet differentia quadratorum ſecundæ & tertiæ D B quadr † D A quadr. cui ſi addas quadratum ſecundæ, & aggregati

C

capias radicem quadratam exiſtet tertia quantitas ℞ (D B quadr.

† D A quadr. † C A quadr.) & eſt ſoluta quæſtio indefinitè.

C

Hinc Canon.

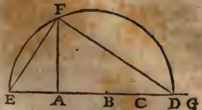
Cape pro duabus prioribus quantitatibus, quas volueris: & quadratorum ab illis ortorum ſummam duc in poſteriorem rationis terminum: productum adde producto qui fit ex quadrato ſecunda in priorem terminū rationis: ſummam qua inde naſcitur diuide per priorem terminū. quotientis radix quadrata dabit tertiam quantitatem quæſitam.

Hinc Effectio Geometrica.

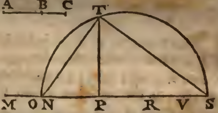
Sit data ratio A B ad B C & ſumatur E A æqualis A B, & C D æqualis B C. Tum ſupra totam E D fiat ſemicirculus, & ex puncto A erigatur perpendicularis A F & ipſi æqualis ſumatur B G. Dico E A, A B & B G fore tres quæſitas, nam (per 8 ſexti) E A A F A D erunt continuè proportionales, ac proinde vt E A ad A D, ita quadratum E A ad quadratum A F (hoc eſt B G) & inuertendo vt A D ad A E (ſeu A B) ita quadratum B G ad E A. & diuidendo, vt B D ad E A ita quadratum B G multatum quadrato E-A ſeu A B ad quadratum E A & duplando conſequantia vt B D

ad

ad E B ita quadratũ B G multatum quadrato E A ſeu A B ad duplũ quadratum E A. Et inuertendo vt E B ad B D ita duplum quadratum E A ad quadratum B G multatum quadrato B A. Sed vt E B ad B D ita earum ſemiſſes A B ad B C. Eſt autem duplum quadratum E A æqualis ſummæ quadratorũ E A & A B. & B G vero quadratum minus quadrato A B eſt differentia quadratorum B G & A B. Ergo vt ſumma quadratorum E A & A B ad differentiam quadratorum A B & B G ita A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.



Sumantur deinde prima & ſecunda M N & N P inæquales, & duabus P N & M N inueniatur tertia proportionalis N O. Tum fiat vt A B ad B C (quæ eſt ratio data) ſic O P ad P R, accipiaturque R S æqualis P N. Præterea ſuper totũ N S fiat ſemicirculus, & ex puncto P erigatur P T perpendicularis ad N S, & ipſi P T æqualis abſcindatur P V. Dico tres M N, N P, P V eſſe quales poſcuntur. Cum enim N O ſit tertia proportionalis duabus P N & M N erit rectãgulum P N O æquale quadrato M N. Igitur ſumma quadrato M N & N P æquatur rectangulo O P N (per 3 ſecundi) ſed rectangulũ O P N ad rectangulum N P R, eſt propter eamdem altitudinem N P, vt O P ad P R (hoc eſt ex conſtructione vt A B ad B C ſeu in proportione data) eſt vero rectangulum N P R differentia quadratorum N P & P V. Si quidem P V quadratum æquatur quadrato T P ſeu rectangulo N P S, hoc eſt rectangulo P S R, (quia R S. Sumpta eſt æqualis N P) rectangulum autem P S R, (per 3 ſecundi) differt à quadrato R S, ſeu N P, per rectangulum P R S ſeu N P R. Ergo ſumma quadratorum M N & N P ad differentiam quadratorum N P & P V eſt in ratione data A B ad B C ſeu O P ad P R. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Hinc intelleges quomodo diuidere oporteat quantitatem datam in tres ita vt quadrata primæ & ſecundæ ad differentiam quadratorum ſecundæ & tertiæ habeant rationem datam. Fiat enim vt ſumma trium inuentarum ad quamlibet ita quantitas data ad alias, & habebis intentum.

Vt quoniam inuenti ſunt tres illi numeri 2. *6.* ℞ *60.* ita vt quadrata duorum priorum 40 ad differentiam quadratorum à duobus poſterioribus 24, habeant rationem 5 ad 3. ſi iubeatur diuidi 20 in tres ita vt ſumma quadratorum à duobus prioribus ad differentiam quadratorum à duobus poſterioribus ſit vt *5* ad *3.* facies vt 8 + ℞ *60* ſumma trium inuentorum ad ſingulos, ita 20 ad alios & inuenies 80 --- ℞*6000.* 240 --- ℞ 54000. ℞ *96000*---300.

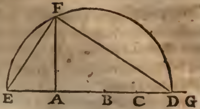
PROPOSITIO XIII.

Datam quantitatem diuidere ratione totius & partium in proportione data.

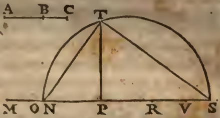
ESto numerus 12 diuidendus in 3 taliter vt tota ad vnam eius partem ſe habeat ſicut ſecunda ad teriam, ſitque ratio data *3* ad I. Fiat vt *3* ad 1 ita 12 ad aliud nempe 4. ponatur pars vna ex duobus reliquis I R, ergo altera erit 8—I R Igitur 12 ad 4 ita ſe habet vt I R ad 8--I R, ac proinde productus ſub extremis *96*--12 R æquatur producto ſub mediis 4 R & fit I R æqualis *6.*

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & ratione C ad D ponaturque pro vna ex mediis A tum fiat vt C ad D ita B ad aliud quod ſit D B tollaturque ex B. Reſiduum eſt $\frac{BC - DB}{C}$ inde ſi tollas A, reſtabit $\frac{BC - DB - CA}{C}$. Igitur vt B ad $\frac{DB}{C}$ ſic A ad $\frac{BC - DB - CA}{C}$. Ergo productus ſub extremis æquatur producto ſub mediis & fit A æqualis $\frac{CB - DB}{D + C}$.

ad E B ita quadratū B G multatum quadrato E A ſeu A B ad duplū quadratum E A. Et inuertendo vt E B ad B D ita duplum quadratum E A ad quadratum B G multatum quadrato B A. Sed vt E B ad B D ita earum ſemiſſes A-B ad B C. Eſt autem duplum quadratum E A æqualis ſummæ quadratorū E A & A B. & B G vero quadratum minus quadrato A B eſt differentia quadratorum B G & A B. Ergo vt ſumma quadratorum E A & A B ad differentiam quadratorum A B & B G ita A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.



Sumantur deinde prima & ſecunda M N & N P inæquales, & duabus P N & M N inueniatur tertia proportionalis N O. Tum fiat vt A B ad B C (quæ eſt ratio data) ſic O P ad P R, accipiaturque R S æqualis P N. Præterea ſuper totū N S fiat ſemicirculus, & ex puncto P erigatur P T perpendicularis ad N S, & ipſi P T æqualis abſcindatur P V. Dico tres M N, N P, P V eſſe quales poſcuntur. Cum enim N O ſit tertia proportionalis duabus P N & M N erit rectā-gulum P N O æquale quadrato M N. Igitur ſumma quadrato M N & N P æquatur rectangulo O P N (per 3 ſecundi) ſed rectangulū O P N ad rectangulum N P R, eſt propter eamdem altitudinem N P, vt O P ad P R (hoc eſt ex conſtructione vt A B ad B C ſeu in proportione data) eſt vero rectangulum N P R differentia quadratorum N P & P V. Siquidem P V quadratum æquatur quadrato T P ſeu rectangulo N P S, hoc eſt rectangulo P S R, (quia R S. Sumpta eſt æqualis N P) rectangulum autem P S R, (per 3 ſecundi) differt à quadrato R S, ſeu N P, per rectangulum P R S ſeu N P R. Ergo ſumma quadratorum M N & N P ad differentiam quadratorum N P & P V eſt in ratione data A B ad B C ſeu O P ad P R. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Hinc intelleges quomodo diuidere oporteat quantitatem datam in tres ita vt quadrata primæ & ſecundæ ad differentiam quadratorum ſecundæ & tertiæ habeant rationem datam. Fiat enim vt ſumma trium inuentarum ad quamlibet ita quantitas data ad alias, & habebis intentum.

Vt quoniam inuenti ſunt tres illi numeri 2. 6. ℞ 60. ita vt quadrata duorum priorum 40 ad differentiam quadratorum à duobus poſterioribus 24, habeant rationem 5 ad 3. ſi iubeatur diuidi 20 in tres ita vt ſumma quadratorum à duobus prioribus ad differentiam quadratorum à duobus poſterioribus ſit vt 5 ad 3. facies vt 8 † ℞ 60 ſumma trium inuentorum ad ſingulos, ita 20 ad alios & inuenies 80 --- ℞ 6000. 240 --- ℞ 54000. ℞ 96000 --- 300.

PROPOSITIO XIII.

Datam quantitatem diuidere ratione totius & partium in proportione data.

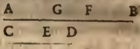
ESto numerus 12 diuidendus in 3 taliter vt tota ad vnam eius partem ſe habeat ſicut ſecunda ad teriam, ſitque ratio data 3 ad 1. Fiat vt 3 ad 1 ita 12 ad aliud nempe 4. ponatur pars vna ex duobus reliquis 1 R, ergo altera erit 8 — 1 R Igitur 12 ad 4 ita ſe habet vt 1 R ad 8 -- 1 R, ac proinde productus ſub extremis 96 -- 12 R æquatur producto ſub mediis 4 R & fit 1 R æqualis 6.

Per Algebram ſpecioſam, data quantitate diuidenda B & ratione C ad D ponaturque pro vna ex mediis A tum fiat vt C ad D ita B ad aliud quod ſit $\frac{DB}{C}$ tollaturque ex B. Reſiduum eſt $\frac{BC -- DB}{C}$. inde ſi tollas A, reſtabit $\frac{BC -- DB --- CA}{C}$. Igitur vt B ad $\frac{DB}{C}$ ſic A ad $\frac{BC -- DB -- CA}{C}$. Ergo productus ſub extremis æquatur producto ſub mediis & fit A æqualis $\frac{CB -- DB}{D + C}$.

Hinc Canon.

Productum ex poſteriori termino rationis in quantitatem diuidendam partire per priorem rationis terminum : quotiens erit vna pars ex mediis quæſitis. Deinde productum ſub quantitate diuidenda in priorem terminum rationis multatum productum ex quantitate diuidenda in poſteriorem terminum diuide per ſummam terminorum, fietque altera ex mediis vnde reliqua non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit data linea A B diuidenda ratione totius & partium ſecundum proportionem C A ad D E. Fiat vt C D ad D E ita A B ad B F. Deinde A F per propoſ. II Lib. I diuidatur taliter in G vt ſit A G ad G F ſicuti A B ad B F. Dico A B ſectam eſſe vt poſcitur in punctis G & F. Nam eſt vt C D ad D E ita A B, ad B F, & vt A B ad B F ita A G ad G F. Ergo tam A B ad B F quam A G ad G F habet rationem C D ad D E. Quod erat demonſtrandum.

Carollarium.

Hinc elicitur ſingulare illud theorema ! Si fuerint quatuor quãtitates diſcretè proportionales, & harũ maior reliquis tribus ſit æqualis ! minima omnium addita tribus minoribus, exhibebit rurſus tres quæ cum maiori intacta erunt proportionales.

Et ex theoremate prodit illud problema : datam quantitatẽ diuidere in quatuor proportionales, ita vt minima omnium addita tribus minoribus, ad huc exhibeantur quatuor proportionales. Etenim diuiſa quantitate quæcumque bifariam, & eius ſemiſſe diuiſa ratione totius & partium, habetur intentum.

PROPOSITIO XIV.

Datis duobus punctis deſcribere circulum tali ratione vt duæ lineæ à prædictis punctis ductæ ad quod libet punctum peripheriæ datam habeant rationem

HOc problema, quod eſt magni geometræ Apollonij Pergæi, ſic abſoluemus. Eſto data ratio 2 ad 1. & capiatur quilibet numerus pro illorum punctorum diſtantia. Tùm pro interuallo vnius pun-

ꝺi. Ad extremitatem diametri ponatur IR. Ergo quoniam lineæ ductæ à duobus punctis ad extremitatem circuli, æque ad aliud quodcumque punctum debet eſſe in ratione data, erit vt 6 † IR ad IR ita 2 ad I. Et fit IR æqualis 6. pro ea quantitate quæ adiungi debet diſtantiæ duorum punctorũ. Si vero hæc diſtantia punctorum datorum ſecetur in ratione data & minor addatur inuentæ, habebitur diameter circuli.

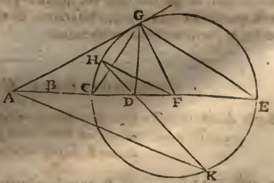
Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C ſumatur D pro diſtantia punctorum, & ponatur A pro interuallo vnius puncti ad extremitatem diametri. Ergo vt D † A ad A ita B ad C ac proinde C D † C A æquabuntur B A. Igitur A fit æquales $\frac{C\,D}{B - C}$.

Hinc Canon.

Cape quemcumquē numerum pro diſtantia punctorum, eumque multiplica per poſteriorem terminum rationis datæ: productum diuide per differentiam terminorum rationis & quotientem ſerua. Deinde diſtantiam punctorum duc in minorem terminum rationis & productum diuide per ſummam terminorum, fietque quotiens ſecundus qui primo quotienti ſeruato additus, dabit diametrum circuli.

Hinc Effectio Geometrica.

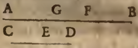
Sit data ratio M ad N & datis duobus punctis A & D oporteat deſcribere circulum taliter vt ductæ lineæ ad quodcumque circumferentiæ punctum ex prædictis punctis A & D habeant rationem M ad N. Secetur primum diſtantiâ AD in C (per 2 lib. 1 huius) tali ratione vt AC ad CD ſit in ratione data M ad N. deinde CB accipiatur æqualis CD. Et fiat vt AB ad AC ita BD ad CE. Diuidatur autem CE bifariam in F & interuallo FC vel FE deſcribatur circulus. Dico illum eſſe circulum quæſitum



Hinc Canon.

Productum ex poſteriori termino rationis in quantitatem diuidendam partire per priorem rationis terminum : quotiens erit vna pars ex mediis quæſitis. Deinde productum ſub quantitate diuidenda in priorem terminum rationis multatum productum ex quantitate diuidenda in poſteriorem terminum diuide per ſummam terminorum, fietque altera ex mediis vnde reliqua non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit data linea AB diuidenda ratione totius & partium ſecundum proportionem CA ad DE. Fiat vt CD ad DE ita AB ad BF. Deinde AF per propoſ. 11 Lib. I diuidatur taliter in G vt ſit AG ad GF ſicuti AB ad BF. Dico AB ſectam eſſe vt poſcitur in punctis G & F. Nam eſt vt CD ad DE ita AB, ad BF, & vt AB ad BF ita AG ad GF. Ergo tam AB ad BF quam AG ad GF habet rationem CD ad DE. Quod erat demonſtrandum.

Carollarium.

Hinc elicitur ſingulare illud theorema ! Si fuerint quatuor quãtitates diſcretè proportionales,& harũ maior reliquis tribus ſit æqualis ! minima omnium addita tribus minoribus, exhibebit rurſus tres quæ cum maiori intacta erunt proportionales.

Et ex theoremate prodit illud problema : datam quantitatẽ diuidere in quatuor proportionales, ita vt minima omnium addita tribus minoribus, ad huc exhibeantur quatuor proportionales. Etenim diuiſa quantitate quæcumque bifariam, & eius ſemiſſe diuiſa ratione totius & partium, habetur intentum.

Propositio XIV.

Datis duobus punctis deſcribere circulum tali ratione vt duæ lineæ à prædictis punctis ductæ ad quod libet punctum peripheriæ datam habeant rationem

HOc problema, quod eſt magni geometræ Apollonij Pergæi, ſic abſoluemus. Eſto data ratio 2 ad 1. & capiatur quilibet numerus pro illorum punctorum diſtantia. Tùm pro interuallo vnius pun-

cti. Ad extremitatem diametri ponatur 1R. Ergo quoniam lineæ ductæ à duobus punctis ad extremitatem circuli, æque ad aliud quodcumque punctum debet eſſe in ratione data, erit vt 6 † 1R ad 1R ita 2 ad 1. Et fit 1R æqualis 6. pro ea quantitate quæ adiungi debet diſtantiæ duorum punctorũ. Si vero hæc diſtantia punctorum datorum ſecetur in ratione data & minor addatur inuentæ, habebitur diameter circuli.

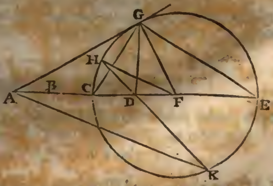
Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C ſumatur D pro diſtantia punctorum, & ponatur A pro interuallo vnius puncti ad extremitatem diametri. Ergo vt D † A ad A ita B ad C ac proinde C D † C A æquabuntur B A. Igitur A fit æquales $\frac{C D}{B - C}$.

Hinc Canon.

Cape quemcumquẽ numerum pro diſtantia punctorum, eumque multiplica per poſteriorem terminum rationis datæ: productum diuide per differentiam terminorum rationis & quotientem ſerua. Deinde diſtantiam punctorum duc in minorem terminum rationis & productum diuide per ſummam terminorum, fietque quotiens ſecundus qui primo quotienti ſeruato additus, dabit diametrum circuli.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio M ad N & datis duobus punctis A & D oporteat deſcribere circulum taliter vt ductæ lineæ ad quodcumque circumferentiæ punctum ex prædictis punctis A & D habeant rationem M ad N. Secetur primum diſtantià A D in C (per 2 lib. 1 huius) tali ratione vt A C ad C D ſit in ratione data



M ad N. deinde C B accipiatur æqualis C D. Et fiat vt A B ad A C ita B D ad C E. Diuidatur autem C E bifariam in F & interuallo F C vel F E deſcribatur circulus. Dico illum eſſe circulum quæſitum

quæſitum. Primo enim erit vt A C ad C D ita A E ad E D ſiquidem ducta tangente A G erit G F ad centrum perpendicularis ipſi A G quare demiſſa G D perpendiculari ad C E, erit (per 8 ſexti) vt A F ad F G ita F G ad F D. Sed quia factum eſt vt A B ad A C ita B D ad C E erit etiam vt A B ad A C ita B C (dimidia B D) ad C F (dimidiam C E) & permutando vt A B ad B C ita A C ad C F. Et componendo vt A C ad B C (hoc eſt C D) ita A F ad F C (ſeu F G) ſed iam oſtenſum eſt eſſe vt A F ad F G ita F G ad F D. Ergo cum F E ſit æqualis F G, erit (per 12 quinti) vt A C ad C D ita A E ad E D. Quod eſt propoſitum.

Deinde aio eſſe vt A C ad C D ita A G ad G D. Nam (per 32 tertij) angulus A G C eſt æqualis angulo A E G & (per 8 ſexti) angulus C G D æqualis angulo C E G. Ergo angulus A G C æquatur angulo C G D. Et ita angulus A G D diuiditur bifariam per lineam G C ergo (per 3 ſexti) eſt vt A C ad C D ita A G ad G D. Quod eſt alterum ex propoſitis.

Tertio dico ſumpto quocumque puncto peripheriæ K duas lineas à duobus punctis A & D ad illud ductas A K & K D fore fore vt A C ad C D (hoc eſt M ad N.) Siquidem producta K D vſque ad H & ducta H F, erit rectangulum K D H æquale rectangulo C D E (per 35 tertij) ſed rectangulum C D E æquatur quadrato D G (per 8 & 17 ſexti) idem autem quadratum D G per eaſdem propoſitiones eſt æquale rectangulo A D F. Igitur rectangulũ A D F æquatur rectangulo K D H. Ac proinde (per 16 ſexti) vt A D ad K D ita D H ad D F. Sed anguli A D K & H D F iſtis lateribus comprehenſi ſunt æquales, quia ad verticem. Ergo (per 6 ſexti) duo triangula A D K & D H F ſunt æquiangula. Igitur vt A K ad K D ita ita H F (hoc eſt G F) ad F D. Sed vt G F ad F D ita eſt ob æquiangulcitatem triangulorum A G ad G D, hoc eſt vt iam probatum fuit A C ad C D. Ergo vt A K ad K D ita A C ad C D ſeu M ad N, quod erat demonſtrandum.

Propositio XV.

Inuenire quatuor qantitates diſcretè proportionales, ita vt ſumma extremarum habeat rationem datam ad ſummam mediarum.

ESto data ratio 11 ad 9 & ſumptis duobus quibuſlibet numeris 1 & 2 pro duobus prioribus ponatur duo poſteriores I R & 2 R. Ergo ſumma extremorm 1 † 2 R ad ſummam mediorum 2 † 1 R eſt vt 11 ad 9. & ita productus ſub extremis 9 † 18 R æquatur producto ſub mediis 22 † 11 R ergo I R eſt æqualis $\frac{13}{7}$. & quatuor numeri, ſequentes 1. 2. $\frac{13}{7}$. $\frac{26}{7}$ ſatiſſaciunt quæſtioni.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione D ad B ſumatur B pro prima & C pro ſecunda, & ponatur tertia A. Ergo quarta erit $\frac{CA}{B}$. Igitur ſumma extremarum $\frac{CA \dagger B \text{ quadr.}}{B}$ ad ſummã mediarum C † A eſt in ratione data D ad B. Et ſic productus ſub extremis $\frac{BCA \dagger B \text{ cub.}}{B}$ æquatur producto ſub mediis D C † D A. Et proinde poſt debitam reductionẽm A fit æqualis $\frac{DC -- B \text{ quadr}}{C -- D}$ & faciendo vt B ad C ita D ad Z. Erit iterũ A æqualis $\frac{BZ -- B \text{ quadr.}}{C --- D}$

Hinc Canon.

Quadratum poſterioris termini rationis datæ tolle ex producto ſub priori termino in quemcumque numerum pro libito acceptum (modo is ſit maior priori termino rationis) reſiduum diuide per differentiam iſtius numeri pro libito accepti & prioris termini rationis, fietque tertia quantitas, vnde quarta non latebit.

quæſitum. Primo enim erit vt A C ad C D ita A E ad E D ſiquidem ducta tangente A G erit G F ad centrum perpendicularis ipſi A G quare demiſſa G D perpendiculari ad C E, erit (per 8 ſexti) vt A F ad F G ita F G ad F D. Sed quia factum eſt vt A B ad A C ita B D ad C E erit etiam vt A B ad A C ita B C (dimidia B D) ad C F (dimidiam C E) & permutando vt A B ad B C ita A C ad C F. Et componendo vt A C ad B C (hoc eſt C D) ita A F ad F C (ſeu F G) ſed iam oſtenſum eſt eſſe vt A F ad F G ita F G ad F D. Ergo cum F E ſit æqualis F G, erit (per 12 quinti) vt A C ad C D ita A E ad E D. Quod eſt propoſitum.

Deinde aio eſſe vt A C ad C D ita A G ad G D. Nam (per 32 tertij) angulus A G C eſt æqualis angulo A E G & (per 8 ſexti) angulus C G D æqualis angulo C E G. Ergo angulus A G C æquatur angulo C G D. Et ita angulus A G D diuiditur bifariam per lineam G C ergo (per 3 ſexti) eſt vt A C ad C D ita A G ad G D. Quod eſt alterum ex propoſitis.

Tertio dico ſumpto quocumque puncto peripheriæ K duas lineas à duobus punctis A & D ad illud ductas A K & K D fore fore vt A C ad C D (hoc eſt M ad N.) Siquidem producta K D vſque ad H & ducta H F, erit rectangulum K D H æquale rectangulo C D E (per 35 tertij) ſed rectangulum C D E æquatur quadrato D G (per 8 & 17 ſexti) idem autem quadratum D G per eaſdem propoſitiones eſt æquale rectangulo A D F. Igitur rectangulũ A D F æquatur rectangulo K D H. Ac proinde (per 16 ſexti) vt A D ad K D ita D H ad D F. Sed anguli A D K & H D F iſtis lateribus comprehenſi ſunt æquales, quia ad verticem. Ergo (per 6 ſexti) duo triangula A D K & D H F ſunt æquiangula. Igitur vt A K ad K D ita ita H F (hoc eſt G F) ad F D. Sed vt G F ad F D ita eſt ob æquiangulcitatem triangulorum A G ad G D, hoc eſt vt iam probatum fuit A C ad C D. Ergo vt A K ad K D ita A C ad C D ſeu M ad N, quod erat demonſtrandum.

Propositio XV.

Inuenire quatuor qantitates diſcretè proportionales, ita vt ſumma extremarum habeat rationem datam ad ſummam mediarum.

Esto data ratio 11 ad 9 & ſumptis duobus quibuſlibet numeris 1 & 2 pro duobus prioribus ponátur duo poſteriores 1 R & 2 R. Ergo ſumma extremorm $1 + 2R$ ad ſummam mediorum $2 + 1R$ eſt vt 11 ad 9, & ita productus ſub extremis $9 + 18R$ æquatur producto ſub mediis $22 + 11R$ ergo 1 R eſt æqualis $\frac{13}{7}$. & quatuor numeri, ſequentes 1. 2. $\frac{13}{7}$. $\frac{26}{7}$ ſatiſfaciunt quæſtioni.

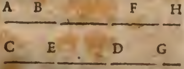
Per Algebram ſpecioſam, data ratione D ad B ſumatur B pro prima & C pro ſecunda, & ponatur tertia A. Ergo quarta erit $\frac{CA}{B}$. Igitur ſumma extremarum $\frac{CA + B\ quadr.}{B}$ ad ſummã mediarum $C + A$ eſt in ratione data D ad B. Et ſic productus ſub extremis $\frac{BCA + B\ cub.}{B}$ æquatur producto ſub mediis $DC + DA$. Et proinde poſt debitam reductionem A fit æqualis $\frac{DC - B\ quadr.}{C - D}$ & faciendo vt B ad C ita D ad Z. Erit iterũ A æqualis $\frac{BZ - B\ quadr.}{C - D}$.

Hinc Canon.

Quadratum poſterioris termini rationis datæ tolle ex producto ſub priori termino in quemcumque numerum pro libito acceptum (modo is ſit maior priori termino rationis) reſiduum diuide per differentiam iſtius numeri pro libito accepti & prioris termini rationis, fietque tertia quantitas, vnde quarta non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio C E ad A B ſumaturque A B proprima, & alia quecumque C D pro ſecunda, modo ſit maior C E priore termino rationis. Tum fiat vt A B ad CE ita C D ad A F. Deinde vt E D ad BF ita A B ad D G, ac tandē vt A B ad C D, ita D G ad B H. Dico quatuor iſtas lineas A B, C D, D G & B H eſſe proportionales quæſitas, & ſummam extremarum ad ſummam mediarum eſſe in ratione data CE ad A B. Cum enim ſit vt E D ad B F, ita A B ad D G, item que vt A B ad C D ita D G ad B H, erit permutando vt A B ad D G, ita C D ad B H. Igitur vt E D ad B F ita C D ad B H. Et inuertēdo vt B H ad C D, ita B F ad E D. Sed vt B F ad E D ita eſt ex cōſtructione D G ad A B. ergo vt F H ad C E ita D G ad A B. & permutãdo vt F H ad D G ita C E ad A B. Sed factũ eſt vt AB ad C D ita C E ad A F. Ergo permutando & inuertendo vt C E ad A B ita A F ad C D. Igitur vt A F ad C D ita F H ad D G. Ac proinde (per 12 quinti) vt A H ad C G ita C E ad A B. Cum igitur iſtæ quatuor ſint proportionales A B, C D D G B H, erit ſumma extremarum A H ad ſummã mediarum C G in ratione data C E ad A B. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Hinc ſolues iſtud problema: diuidere quantitem datam in quatuor proportionales taliter vt ſumma extremarum ad ſummã mediarum habeat rationem datam. Fiat vt ſummã quatuor inuentarum ad ſingulas ſic quantitas data ad alias.

Propositio XVI.

Inuenire quatuor quantitates proportionales ita vt differentia extremarum ad differentiam mediarum habeat rationem datam.

Esto data ratio 7 ad 3. ſumanturque dúo numeri quicũque pro duobus prioribus 1 & 2 & ponatur tertius 1 R ergo quartus erit 2 R. Ac proinde differentia extremorũ 2 R -- 1 ad differentiam mediorũ 2 -- 1 R eſt vt 7 ad 3. igitur productus ſub extremis 6 R -- 3

æquatur producto ſub mediis 14--7 R. Ergo I R eſt $\frac{17}{17}$. & ſine fractionibus fient quatuor numeri quæſiti 13. 26. 17. 34.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione R ad S, ſumantur B & C ad libitum pro duabus prioribus quantitatibus. tum fiat vt S ad R ita B ad D. Ergo D ad B erit ratio data. Ponatur A pro tertia quantitate. Igitur quarta erit $\frac{CA}{B}$ ac proinde differentia extremarũ $\frac{CA - B \text{ quadr.}}{B}$ ad differentiam mediarũ C -- A erit vt D ad B. Ac idcirco productus ſub extremis erit æqualis producto ſub mediis. Et poſt debitam reductionem A æquabitur $\frac{DC + B \text{ quadr.}}{C + D}$ Si autem fiat vt C ad B ita B ad Z, fiet iterum A æqualis $\frac{DC + CZ}{C + D}$.

Hinc Canon.

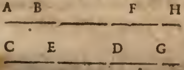
Quadratũ poſterioris termini rationis datæ adde producto ex priori termino in quemcumque numerũ: ſummam inde ortam diuide per aggregatum ex priori rationis termino in numerum pro libito iam acceptum, fietque tertius quæſitus, poſteriori termino rationis & numero ad libitum accepto exiſtentibus duobus prioribus. Vnde quartus non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio D ad AB. Sumatur quælibet AC & ponatur ad angulos rectos ipſi AB & connexa BC diuidatur bifariam in O ex quo ducatur OP perpendicularis ad BC, quæ ſecet in AC in P. Tum centro P interuallo PB vel PC deſcribatur ſemicirculus. Fiatque vt D plus AC ad AC ita D plus ZA ad AG. Deinde vt AB ad AC ſic AG ad AL. Dico AB, AC AG, AL eſſe quatuor

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio C E ad A B ſumaturque A B pro prima, & alia quæcumque C D pro ſecunda, modo ſit maior C E priore termino rationis. Tum fiat vt A B ad C E ita C D ad A F. Deinde vt E D ad B F ita A B ad D G, ac tandẽ vt A B ad C D, ita D G ad B H. Dico quatuor iſtas lineas A B, C D, D G & B H eſſe proportionales quæſitas, & ſummam extremarum ad ſummam mediarum eſſe in ratione data C E ad A B. Cum enim ſit vt E D ad B F, ita A B ad D G, item que vt A B ad C D ita D G ad B H, erit permutando vt A B ad D G, ita C D ad B H. Igitur vt E D ad B F ita C D ad B H. Et inuertẽdo vt B H ad C D, ita B F ad E D. Sed vt B F ad E-D ita eſt ex cõſtructione D G ad A B. ergo vt F H ad C E ita D G ad A B. & permutãdo vt F H ad D G ita C E ad A B. Sed factũ eſt vt A B ad C D ita C E ad A F. Ergo permutando & inuertendo vt C E ad A B ita A F ad C D. Igitur vt A F ad C D ita F H ad D G. Ac proinde (per 12 quinti) vt A H ad C G ita C E ad A B. Cum igitur iſtæ quatuor ſint proportionales A B, C D D G B H, erit ſumma extremarum A H ad ſummã mediarum C G in ratione data C E ad A B. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Hinc ſolues iſtud problema: diuidere quantitem datam in quatuor proportionales taliter vt ſumma extremarum ad ſummã mediarum habeat rationem datam. Fiat vt ſummã quatuor inuentarum ad ſingulas ſic quantitas data ad alias.

PROPOSITIO XVI.

Inuenire quatuor quantitates proportionales ita vt differentia extremarum ad differentiam mediarum habeat rationem datam.

ESto data ratio 7 ad 3. ſumanturque duo numeri quicũque pro duobus prioribus 1 & 2 & ponatur tertius 1 R ergo quartus erit 2 R. Ac proinde differentia extremorũ 2 R -- 1 ad differentiam mediorũ 2 -- 1 R eſt vt 7 ad 3. igitur productus ſub extremis 6 R -- 3,

æquatur producto ſub mediis 14−7 R. Ergo 1 R eſt $\frac{17}{17}$. & ſine fractionibus fient quatuor numeri quæſiti 13. 26. 17. 34.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione R ad S, ſumantur B & C ad libitum pro duabus prioribus quantitatibus. tum fiat vt S ad R ita B ad D. Ergo D ad B erit ratio data. Ponatur A pro tertia quantitate. Igitur quarta erit $\frac{CA}{B}$ ac proinde differentia extremarū $\frac{CA - B\ quadr.}{B}$ ad differentiam mediarū C − A erit vt D ad B. Ac id circo productus ſub extremis erit æqualis producto ſub mediis. Et poſt debitam reductionem A æquabitur $\frac{DC + B\ quadr.}{C + D}$ Si autem fiat vt C ad B ita B ad Z, fiet iterum A æqualis $\frac{DC + CZ}{C + D}$.

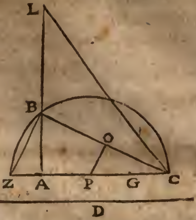
Hinc Canon.

Quadratū poſterioris termini rationis datæ adde producto ex priori termino in quemcumque numerū: ſummam inde ortam diuide per aggregatum ex priori rationis termino in numerum pro libito iam acceptum, fietque tertius quæſitus, poſteriori termino rationis & numero ad libitum accepto exiſtentibus duobus prioribus. Vnde quartus non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio D ad AB. Sumatur quælibet AC & ponatur ad angulos rectos ipſi AB & connexa BC duidatur bifariam in O ex quo ducatur OP perpendicularis ad BC, quæ ſecet in AC in P. Tum centro P interuallo PB vel PC deſcribatur ſemicirculus. Fiatque vt D plus AC ad AC ita D plus ZA ad AG. Deinde vt AB ad AC ſic AG ad AL. Dico AB, AC AG, AL eſſe quatuor

quatuor proportionales quæſitas, & differentiam extremarum L B ad differentiam mediarum G C habere rationem D ad A B. Etenim (per 8 ſexti) eſt vt A C ad A B ita A B ad A Z. Ergo rectangulum Z A C æquatur quadrato A B. Deinde cum factum ſit vt D plus A C ad A C ita D plus Z A ad A G, erit rectangulum ſub extremis ex G A in D plus A C æquale rectangulo ſub mediis ex A C in D plus Z A. Et rurſus quia factum



ſit vt A B ad A C ita A G ad A L, erit rectangulum L A B æquale rectangulo G A C. Ergo rectangulum L A B cum rectangulo ex G A in D plus A C, æquatur rectangulo G A C & rectãgulo ex A C in D plus Z A. Et ablato vtrinqne communi rectangulo G A C (eſt enim per 1 ſecundi rectangulum ex G A in D plus A C æquale rectangulo G A C & G A D) reſtabunt rectangula G A D & L A B æqualia rectangulis A C in D. Et A C in Z A. At rectangulum L A B æquatur quadrato A B. Et rectangulo L B A, rectangulum verò C A Z æquatur quadrato A B: igitur ſi vtrinque iterum auferas C A Z rectangulum, reſtabit rectãgulum A C D æquale rectangulis D in G A & L B A. Sed rectangulum A C D (per eamdem 1. ſecundi) æquatur rectangulis ex D in A G & D in G C. Ergo ſi ex reſiduis auferatur commune rectangulum ex D in G A, erunt reſidua noua inter ſe æqualia nempe L B A rectangulum æquale rectangulo ex D in G C. Igitur (per 16 ſexti) eſt vt L B ad G C ita D ad A B. At L B eſt differentiã extremarũ A B & A L & G C eſt differentiã mediarum A C & A G. Et factæ ſunt iſtæ lineæ quatuor A B, A C, A G, A L, diſcretè proportionales. Ergo inuentæ ſunt quatuor proportionales, ita vt differentia extremarum ad differentiam mediarum habeat rationem datam D ad A B. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc ſoluitur iſtud problema: diuidere quantitatem datam in quatuor proportionales, ita vt differentia extremarum ad differentiam

mediarum habeat rationem datam. Fiat vt ſumma quatuor inuentarum ad ſingulas, ita quantitas data ad alias.

Propositio XVII.

Inuenire quatuor quantitates proportionales ita vt harum differentiæ ſint in proportione harmonica.

CApe tres harmonicè proportionales vt cumque, verbi gratiâ 4 6 12, tum pone minorem ex quæſitis 1 R, ergo ſecunda erit 1 R, † 4, tertia 1 R † 10, & quarta 1 R † 22. Et quia debent eſſe Geometricè proportionales, productus ſub extremis 1 Q † 22 R æqualis erit producto ſub mediis 1 Q † 14 R † 40. Igitur 1 R eſt 5 & quatuor quæſiti ſunt 5. 9. 15. 27.

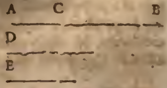
Per Algebram ſpecioſam, captis tribus harmonicè proportionalibus B C D, ponatur minor. Quantitas quæſita A, ergo ſecunda erit A † B & tertia A † B † C & quarta A † B † C † D. Et quoniam debent eſſe Geometricè proportionales, erit productus A quadr. † A B † A C † A D æqualis producto A quadr. † 2 A B † A C † B C † B quadr. ac proinde A A æquatur B C † B quadr.

$$\frac{\qquad}{D \text{--} B}$$

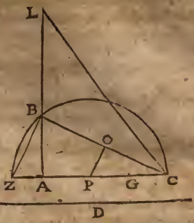
Hinc Canon.

Elige primùm tres numeros harmonicè proportionales, quoſcumque volueris, & ex eorum maiore tolle minorem: tum per reſiduum diuide productum ex minore in ſummam duorum minorum, habebiſque minorem quæſitũ ex quatuor Geometricè proportionalibus quæſitis: cui ſi addas minorem electum fiet ſecundus, & ita deinceps ſinguli.

Hinc Effectio Geometrica.



Eligantur tres lineæ harmonicè proportionales, AB, D, AC. Tum fiat vt CB ad AC, ita AC plus D ad E. Dico E fore minorem ex quatuor quæſitis Geometricè proportionalibus, E plus AC ſecundam, E plus AC plus D tertiam, & E plus AC plus D plus AB quartam. Etenim quoniam eſt vt CB ad AC ita AC



quatuor proportionales quæſitas, & differentiam extremarum L B ad differentiam mediarum G C habere rationem D ad A B. Etenim (per 8 ſexti) eſt vt A C ad A B ita A B ad A Z. Ergo rectangulum Z A C æquatur quadrato A B. Deinde cum factum ſit vt D plus A G ad A C ita D plus Z A ad A G, erit rectangulum ſub extremis ex G A in D plus A C æquale rectangulo ſub mediis ex A C in D plus Z A. Et rurſus quia factum ſte vt A B ad A C ita A G ad A L, erit rectangulum L A B æquale rectangulo G A C. Ergo rectangulum L A B cum rectangulo ex G A in D plus A C, æquatur rectangulo G A C & rectãgulo ex A C in D plus Z A. Et ablato vtrinque communi rectangulo G A C (eſt enim per 1 ſecundi rectangulum ex G A in D plus A C æquale rectangulo G A C & G A D) reſtabunt rectangula G A D & L A B æqualia rectangulis A C in D. Et A C in Z A. At rectangulum L A B æquatur quadrato A B. Et rectangulo L B A, rectangulum verò C A Z æquatur quadrato A B: igitur ſi vtrinque iterum auferas C A Z rectangulum, reſtabit rectãgulum A C D æquale rectangulis D in G A & L B A. Sed rectangulum A C D (per eamdem 1. ſecundi) æquatur rectangulis ex D in A G & D in G C. Ergo ſi ex reſiduis auferatur commune rectangulum ex D in G A, erunt reſidua noua inter ſe æqualia nempe L B A rectangulum æquale rectangulo ex D in G C. Igitur (per 16 ſexti) eſt vt L B ad G C ita D ad A B. At L B eſt differentia extremarũ A B & A L & G C eſt differentia mediarum A C & A G. Et factæ ſunt iſtæ lineæ quatuor A B, A C, A G, A L, diſcretè proportionales. Ergo inuentæ ſunt quatuor proportionales, ita vt differentia extremarum ad differentiam mediarum habeat rationem datam D ad A B. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc ſoluitur iſtud problema: diuidere quantitatem datam in quatuor proportionales, ita vt differentia extremarum ad differentiam

mediarum habeat rationem datam. Fiat vt ſumma quatuor inuentarum ad ſingulas, ita quantitas data ad alias.

Propositio XVII.

Inuenire quatuor quantitates proportionales ita vt harum differentiæ ſint in proportione harmonica.

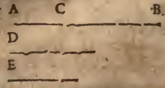
Cape tres harmonicè proportionales vtcumque, verbi gratiâ 4. 6 12, tum pone minorem ex quæſitis 1 R, ergo ſecunda erit 1 R, + 4, tertia 1 R + 10, & quarta 1 R + 22. Et quia debent eſſe Geometricè proportionales, productus ſub extremis 1 Q + 22 R æqualis erit producto ſub mediis 1 Q + 14 R + 40. Igitur 1 R eſt 5 & quatuor quæſiti ſunt 5. 9. 15. 27.

Per Algebram ſpecioſam, captis tribus harmonicè proportionalibus B C D, ponatur minor. Quantitas quæſita A, ergo ſecunda erit A + B & tertia A + B + C & quarta A + B + C + D. Et quoniam debent eſſe Geometricè proportionales, erit productus A quadr. + A B + A C + A D æqualis producto A quadr. + 2 A B + A C + B C + B quadr. ac proinde A A æquatur $\frac{\text{B C} + \text{B quadr.}}{\text{D} - \text{B}}$

Hinc Canon.

Elige primùm tres numeros harmonicè proportionales, quoſcumque volueris, & ex eorum maiore tolle minorem: tum per reſiduum diuide productum ex minore in ſummam duorum minorum, habebiſque minorem quæſitū ex quatuor Geometricè proportionalibus quæſitis: cui ſi addas minorem electum fiet ſecundus, & ita deinceps ſinguli.

Hinc Effectio Geometrica.



Eligantur tres lineæ harmonicè proportionales, A B, D, A C. Tum fiat vt C B ad A C, ita A C plus D ad E. Dico E fore minorem ex quatuor quæſitis Geometricè proportionalibus, E plus A C ſecundam, E plus A C plus D tertiam, & E plus A C plus D plus A B quartam. Etenim quoniam eſt vt C B ad A C ita A C

plus D ad E, erit componendo, vt A B ad A C, ita A C plus D plus E ad E & permutando, vt A B ad A C plus D plus E ita A C ad E. Et componendo vt A B plus A C plus D plus E ad A-C plus D plus E, ita A C plus E ad E. Igitur quatuor illæ lineæ proportionales differunt per tres harmonicè proportionales electas A C, D, A B. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc ſolues iſtud problema: diuidere quantitatem datam in quatuor proportionales, quarum differentiæ ſint in proportione harmonica. Fiat vt ſumma quatuor inuentarum ad ſingulas, ſic quantitas diuidenda ad alias.

Poteſt etiam ſolui problema hoc præcedenti haud multum abſimile: quatuor quantitates Geometricè proportionales in ratione data inuenire ita vt differentiæ illarum ſint harmonicè proportionales: ſit data ratio 2 ad 4. ſumantur que duo illi numeri pro duabus prioribus quantitatibus inueniendis, & ſit tertià I R, ergo quarta erit 2R. Harum differentia eſt I R differentià duarum mediarum eſt I R -- 4. differentià autem duarum minorum eſt 2. ergo tres illæ differentiæ ſunt in proportione harmonica. Ac proinde vt I R ad 2 ita 4 ad I R -- *6*. igitur productus ſub extremis IQ -- *6* R æquatur producto ſub mediis 8. & ſit I R æqualis *3* † ℞ 17. & quatuor numeri 2. 4. *3* † ℞ 17. *6* † ℞ *68*. ſimiliter data ratione *3* ad *9* inuenies quatuor proportionales *3*. *9*. *9* † ℞ 108. 27 † ℞ 972.

PROPOSITIO XVIII.

Inuenire quatuor quantitates proportionales Geometricè, ita vt differentiæ quadratorum ab illis ortorum ſint in harmonica proportione.

ELigantur tres numeri quorum quadrata ſint harmonicè proportionalia, quales ſunt ℞ *6*. ℞ 3 ℞ 2. tùm ponatur minimus quæſitorum I R. Ergo eius quadratuum eſt I Q. Igitur ſi ponatur quadratum ſecundi I Q † 2, & tertij I Q † *5* & quarti I Q † 11, habebũtur quatuor quadrata quorum differentiæ ſunt harmonicè proportionales. Et quoniam illa quadrata debent eſſe Geometricè proportionalia (numerorum enim Geometricè proportionalium, quadrata

ſunt Geometricè proportionalia) productus ſub extremis I Q Q †-N Q æqualis erit producto ſub mediis I Q Q † 7 Q † 10. igitur I R eſt æqualis ℞ -- 5 vnde alij numeri non latebunt, & vitando fractio-

2

nes, quatuor numeri ſequentes ſatiſfaciunt quæſtioni ℞ 5. 3. ℞ 15 ℞ 27.

Per Algebram ſpecioſam, electis tribus B, C, D, quorum quadrata ſint harmonicè proportionalia, ponatur A pro minori quæſito. Ergo A quadr. † D quadr. erit quadratum ſecundi, & A quadr. † D quadr. † C quadr. erit quadratum tertij & A quadr. † D quadr. † C quadr. † B quadr. erit quadratum quarti. Igitur quoniam quadrata illa debent eſſe proportionalia, productus ſub extremis æquabitur producto ſub mediis, ac tandem poſt debitã reductionẽ & diuiſionẽ A quadratũ erit æquale D quadr. quadr. † D quadr. C quadr.

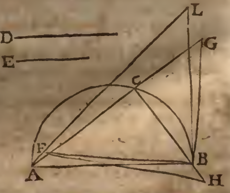
B quadr --- D quadr.

Hinc Canon.

Elige tres numeros quorum quadrata ſint harmonicè proportionalia, & quadrato-quadratum minoris iunge cum producto ex quadratis duorum minorum: ſummam diuide per quadratũ maioris multatum minoris quadrato, & fiet quadratum minimi ex quatuor quæſitis, quare nec minimus, nec reliqui latabunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Eligantur primũ tres lineæ A B, D, B C, quarum quadrata ſint harmonicè proportionalia, & ſuper A B omnium maxima fiat ſemicirculus in quo inſcribatur minima B C, connectaturque C A, in qua (ſi opus eſt, producta) accipiatur F C æqualis C. Tùm fiat vt A C ad B C ita B F ad E. Dico E fore minimam ex quatuor proportionalibus quæſitis: ſi autem producatur A C donec C G ſit æqualis E fore ſecundam B G: ſi vero producatur C B donec C H ſit æqualis B G, tertiam fore



F H,

plus D ad E, erit componendo, vt AB ad AC, ita AC plus D plus E ad E & permutando, vt AB ad AC plus D plus E ita AC ad E. Et componendo vt AB plus AC plus D plus E ad AC plus D plus E, ita AC plus E ad E: Igitur quatuor illæ lineæ proportionales differunt per tres harmonicè proportionales electas AC, D, AB. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc ſolues iſtud problema: diuidere quantitatem datam in quatuor proportionales, quarum differentiæ ſint in proportione harmonica. Fiat vt ſumma quatuor inuentarum ad ſingulas, ſic quantitas diuidenda ad alias.

Poteſt etiam ſolui problema hoc præcedenti haud multum abſimile: quatuor quantitates Geometricè proportionales in ratione data inuenire ita vt differentiæ illarum ſint harmonicè proportionales: ſit data ratio 2 ad 4. ſumantur que duo illi numeri pro duabus prioribus quantitatibus inueniendis, & ſit tertià 1R, ergo quarta erit 2R. Harum differentia eſt 1R differentià duarum mediarum eſt 1R -- 4. differentià autem duarum minorum eſt 2. ergo tres illæ differentiæ ſunt in proportione harmonica. Ac proinde vt 1R ad 2 ita 4 ad 1R -- *6*. igitur productus ſub extremis 1Q -- *6* R æquatur producto ſub mediis 8. & ſit 1R æqualis *3* † ℞ 17. & quatuor numeri 2. 4. *3* † ℞ 17. 6 † ℞ *6*8. ſimiliter data ratione *3* ad *9* inuenies quatuor proportionales *3* *9*. *9* † ℞ 108. 27 † ℞ 972.

PROPOSITIO XVIII.

Inuenire quatuor quantitates proportionales Geometricè, ita vt differentiæ quadratorum ab illis ortorum ſint in harmonica proportione.

ELigantur tres numeri quorum quadrata ſint harmonicè proportionalia, quales ſunt ℞ *6*. ℞ *3* ℞ 2: tùm ponatur minimus quæſitorum 1R. Ergo eius quadratum eſt 1Q. Igitur ſi ponatur quadratum ſecundi 1Q † 2, & tertij 1Q † *5* & quarti 1Q † 11, habebũtur quatuor quadrata quorum differentiæ ſunt harmonicè proportionales. Et quoniam illa quadrata debent eſſe Geometricè proportionalia (numerorum enim Geometricè proportionalium, quadrata

ſunt Geometricè proportionalia) productus ſub extremis I Q Q †. N Q æqualis erit producto ſub mediis I Q Q † 7 Q † 10. igitur I R eſt æqualis ℞. -5 vnde alij numeri non latebunt, & vitando fractio-

2

nes, quatuor numeri ſequentes ſatiſfaciunt quæſtioni ℞ 5. 3. ℞ 15. ℞ 27.

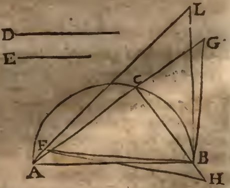
Per Algebram ſpecioſam, electis tribus B, C, D, quorum quadrata ſint harmonicè proportionalia, ponatur A pro minori quæſito. Ergo A quadr. † D quadr. erit quadratum ſecundi, & A quadr. † D quadr. † C quadr. erit quadratum tertij & A quadr. † D quadr. † C quadr. † B quadr. erit quadratum quarti. Igitur quoniam quadrata illa debent eſſe proportionalia, productus ſub extremis æquabitur producto ſub mediis, ac tandem poſt debitã reductionẽ & diuiſionẽ A quadratũ erit æquale D quadr. quadr. † D quadr. C quadr.

B quadr --- D quadr.

Hinc Canon.

Elige tres numeros quorum quadrata ſint harmonicè proportionalia, & quadrato--quadratum minoris iunge cum producto ex quadratis duorum minorum: ſummam diuide per quadratũ maioris multatum minoris quadrato, & fiet quadratum minimi ex quatuor quæſitis, quare nec minimus, nec reliqui latabunt.

Hinc Effectio Geometrica.



Eligantur primũ tres lineæ A B, D, B C, quarum quadrata ſint harmonicè proportionalia, & ſuper A B omnium maxima fiat ſemicirculus in quo inſcribatur minima B C, connectaturque C A, in qua (ſi opus eſt, producta) accipiatur F C æqualis C. Tùm fiat vt A C ad B C ita B F ad E. Dico E fore minimam ex quatuor proportionalibus quæſitis: ſi autem producatur A C donec C G ſit æqualis E fore ſecundam B G: ſi vero producatur C B donec C H ſit æqualis B G, tertiam fore

F H,

FH, denique ſi ponatur BL æqualis FH & perpendicularis ad AB, quartam quæſitam fore AL. Nam cum ſit vt AC ad BC ita BF ad E, erunt etiam earum quadrata proportionalia: & componendo, vt AC quadratum plus quadrato BC ad quadratum BC, ita quadratum BF plus quadrato E ad quadratum E. Et permutando vt quadratum AC plus quadrato BC ad quadratum BF plus quadrato E, ita quadratum BC ad quadratum E. Et componendo vt quadratum AC plus quadrato BC plus quadrato BF plus quadrato E ad quadratum BF plus quadrato E, ita quadratum BC plus quadrato E ad quadratum E. Sed quadratum BC plus quadrato E æquatur quadrato BG (quia CG ſumpta eſt æqualis E) quadratum verò FH eſt æquale quadrato CH & quadrato FC (eſt autem CH æqualis BG) ſeu quadratis BF & E. Et tandem quadratum AL eſt æquale quadratis AB & BL (quadratum autem AB æquatur quadratis AC, & CB, quadratum vero BL ſeu FH eſt æquale quadratis BF & E) igitur iſta quatuor quadrata AL, FH, BG, & E ſunt proportionalia. Sed duo priora quadra AL & FH (ſeu BL) differunt per quadratum AB: duo vero quadrata media FH & BG differunt per quadratum FC ſeu D: & duo poſteriora quadrata BG & E differunt per quadratum BC. Ergo quoniam tria illa quadrata AB, D, BC, ſunt ex conſtructione harmonicè proportionalia, inuentæ ſunt quatuor lineæ proportionales ita vt differentiæ quadratorum ab illis ortorum ſint harmonicè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc ſolui poteſt iſtud problema: diuidere datam quantitatem in quatuor Geometricè proportionales, ita vt differentia quadratorum ſint in harmonica proportione: Fiat vt ſumma quatuor inuentarum ad ſingulas ita quantitas data ad alias.

Hinc problemati affine eſt iſtud: inuenire quatuor quantitates Geometricè proportionales in data ratione, ita vt differentiæ quadratorum ab illis ortorum ſint in proportine harmonica. Detur ratio 1 ad 3 & ponantur duæ aliæ 1R & 3R. Horum quadrata ſunt 1. 9. 1Q. 9Q. & differentiæ quadratorum 8Q. 1Q--9. 8 debent eſſe in harmonica ratione. Igitur vt 8Q ad 8 ita 9--7Q. ad 1Q--17. Ergo productus ſub extremis 8QQ--136Q æquatur producto ſub mediis 72 † 56Q. igitur 1R eſt æqualis ℞(12 †-

Sſ

℞ 153) quatuor vero numeri ſunt 1. 3. ℞ (12 † ℞ 153). ℞ (108 † ℞ 12393) etenim differentiæ quadratorum ab illis ſunt *96* † ℞ *9792*. & ℞ 153 † *3* & 8 quæ debent eſſe harmonicè proportionales. Hoc autem patet, quia prima *9* † ℞ *9792* ad tertiam 8 eſt vt differentia primæ & ſecundæ ℞ *7497* † *93*. ad differentiam ſecundæ & tertiæ ℞ 153 -- 5.

Propositio XIX.

Diuidere datam quantitatem in quatuor diſcrete proportionales, tali ratione vt quadrata extremarum ad quadrata mediarum habant proportionem datam.

Esto data ratio tripla & quantitas diuidenda *6*0. accipianturque ſtatim duo priores numeri 1 & *3* in data ratione & ponantur duo alij 1 R & *3* R. Ergo quadrata extremarum 1 † *9* Q ad quadrata mediarum *9* † 1 Q habent ratione *3* ad 1. & ſic productus ſub extremis 1 † *9* Q æquatur producto ſub mediis 27 † *3* Q. Ac ideo *26* æquabuntur *6* Q & fit 1 R æqualis ℞ $\frac{13}{3}$. ergo quatuor numeri 1. *3* ℞ $\frac{13}{3}$. ℞ $\frac{117}{3}$. ſunt proportionales & quadrata extremorum tripla ſunt quadratorum à mediis. Quare ſi fiat vt ſumma horum ad ſingulos ita *6*0 ad alios exiſtent quatuor ſegmenta proportionalia ℞ $\frac{351}{4}$ -- $\frac{9}{2}$. ℞ $\frac{3159}{4}$ --- $\frac{27}{2}$ $\frac{39}{2}$ -- ℞ $\frac{351}{4}$ $\frac{117}{2}$ -- ℞ $\frac{3159}{4}$.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ponatur A pro tertia, ergo quarta erit $\frac{\text{C A}}{\text{B}}$ igitur quadrata extremarum B quadr. quadr. † C quadr. A quadr. / B quadr. ad quadrata mediarum C quadr. † A quadr. ſunt vt B ad C. Ac ideo productus ſub ẽxtremis erit æqualis producto ſub mediis & poſt debitam reductionem diuiſionemque,

FH, denique ſi ponatur BL æqualis FH & perpendicularis ad AB, quartam quæſitam fore AL. Nam cum ſit vt AC ad BC ita BF ad E, erunt etiam earum quadrata proportionalia: & componendo, vt AC quadratum plus quadrato BC ad quadratum BC, ita quadratum BF plus quadrato E ad quadratum E. Et permutando vt quadratum AC plus quadrato BC ad quadratum BF plus quadrato E, ita quadratum BC ad quadratum E. Et componendo vt quadratum AC plus quadrato BC plus quadrato BF plus quadrato E ad quadratum BF plus quadrato E, ita quadratum BC plus quadrato E ad quadratum E. Sed quadratum BC plus quadrato E æquatur quadrato BG (quia CG ſumpta eſt æqualis E) quadratum verò FH eſt æquale quadrato CH & quadrato FC (eſt autem CH æqualis BG) ſeu quadratis BF & E. Et tandem quadratum AL eſt æquale quadratis AB & BL (quadratum autem AB æquatur quadratis AC, & CB, quadratum vero BL ſeu FH eſt æquale quadratis BF & E) igitur iſta quatuor quadrata AL, FH, BG, & E ſunt proportionalia. Sed duo priora quadra AL & FH (ſeu BL) differunt per quadratum AB: duo vero quadrata media FH & BG differunt per quadratum FC ſeu D: & duo poſteriora quadrata BG & E differunt per quadratum BC. Ergo quoniam tria illa quadrata AB, D, BC, ſunt ex conſtructione harmonicè proportionalia, inuentæ ſunt quatuor lineæ proportionales ita vt differentiæ quadratorum ab illis ortorum ſint harmonicè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc ſolui poteſt iſtud problema: diuidere datam quantitatem in quatuor Geometricè proportionales, ita vt differentia quadratorum ſint in harmonica proportione: Fiat vt ſumma quatuor inuentarum ad ſingulas ita quantitas data ad alias.

Hinc problemati affine eſt iſtud: inuenire quatuor quantitates Geometricè proportionales in data ratione, ita vt differentiæ quadratorum ab illis ortorum ſint in proportine harmonica. Detur ratio 1 ad 3 & ponantur duæ aliæ 1R & 3R. Horum quadrata ſunt 1. 9. 1Q. 9Q. & differentiæ quadratorum 8Q. 1Q--9. 8 debent eſſe in harmonica ratione. Igitur vt 8Q ad 8 ita 9--7Q. ad 1Q---17. Ergo productus ſub extremis 8QQ---136Q æquatur producto ſub mediis 72 † 56Q. igitur 1R eſt æqualis ℞(12 †-

℞ 153) quatuor vero numeri ſunt 1. 3. ℞ (12 † ℞ 153). ℞ (108 † ℞ 12393). etenim differentiæ quadratorum ab illis ſunt 96 † ℞ 9792. & ℞ 153 † 3 & 8 quæ debent eſſe harmonicè proportionales. Hoc autem patet, quia prima 9 † ℞ 9792 ad tertiam 8 eſt vt differentia primæ & ſecundæ ℞ 7497 † 93. ad differentiam ſecundæ & tertiæ ℞ 153 -- 5.

PROPOSITIO XIX.

Diuidere datam quantitatem in quatuor diſcrete proportionales, tali ratione vt quadrata extremarum ad quadrata mediarum habant proportionem datam.

Esto data ratio tripla & quantitas diuidenda 60. accipianturque ſtatim duo priores numeri 1 & 3 in data ratione & ponantur duo alij 1 R & 3 R. Ergo quadrata extremarum 1 † 9 Q ad quadrata mediarum 9 † 1 Q habent rationẽ 3 ad 1. & ſic productus ſub extremis 1 † 9 Q æquatur producto ſub mediis 27 † 3 Q. Ac ideo 26 æquabuntur 6 Q & fit 1 R æqualis ℞ $\frac{13}{3}$. ergo quatuor numeri 1. 3 ℞ $\frac{13}{3}$. ℞ $\frac{117}{3}$. ſunt proportionales & quadrata extremorum tripla ſunt quadratorum à mediis. Quare ſi fiat vt ſumma horum ad ſingulos ita 60 ad alios exiſtent quatuor ſegmenta proportionalia ℞ $\frac{351}{4}$ -- $\frac{9}{2}$. ℞ $\frac{3159}{4}$ --- $\frac{27}{2}$ $\frac{39}{2}$ -- ℞ $\frac{351}{4}$ $\frac{117}{2}$ -- ℞ $\frac{3159}{4}$.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ponatur A pro tertia, ergo quarta erit $\frac{\text{C A}}{\text{B}}$ igitur quadrata extremarum B quadr. quadr. † $\frac{\text{C quadr. A quadr.}}{\text{B quadr.}}$ ad quadrata mediarum C quadr. † A quadr. ſunt vt B ad C. Ac ideo productus ſub extremis erit æqualis producto ſub mediis & poſt debitam reductionem diuiſionemque,

erit A quadratum æquale $\frac{\text{C B quadr. quadr.---B cub. C quadr.}}{\text{B cub.--cub.}}$

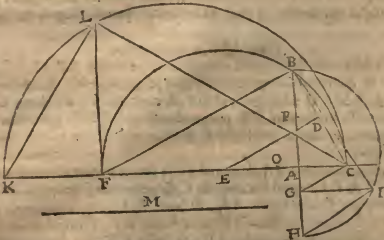
Hinc Canon.

Quadrata terminorum rationis datæ duc viciſſim in terminos rationis, ac per horum differentiam, diuide differentiam cuborũ qui oriuntur à terminis prædictæ rationis: fietque quantitas cuius radix quadrata in terminos ſigillatim ducta exhibebit tertiam & quartam quantitatem quæſitam: prima & ſecunda exiſtentibus ipſis terminis rationis. Iam verò ſi fiat vt ſumma harum quatuor ad ſingulas, ita quantitas diuidenda ad alias habebuntur quatuor ſegmenta quæſita.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data ratio quadratorũ extremorum ad media A B ad A C, & linea M diuidenda in quatuor diſcretè proportionales. Ponãtur autem A B & A C ad angulos rectos, & connexa C B diuidatur biſariam in D, & ducatur D E perpendicularis ipſi B C, protrahaturque donec occurrat productæ C A in puncto E. ex quo tanquam centro ad interuallum E C vel E B deſcribatur ſemicirculus F B C. Deinde producatur B A donec A G ſit tertia perpendicularis duabus A B & A C (quod fiet ducẽdo C G perpendicularem ipſi B C) ponaturque G H æqualis A G, & ſuper B H facto ſemicirculo ducatur G I perpendicularis B H & nectatur H I. Tùm in producta C F accipiatur F K æqualis A B, & ſuper C K fiat ſemicirculus, ductaque F L perpendiculari ad C K nectantur K L & L C. Fiatque vt ſumma A C, A B, H I, K L ad ſingulas ita M ad alias. Dico abſolutum fore problema. Cum enim angulus B in ſemicirculo ſit rectus & B A ſit perpendicularis F C, erunt (per 8 ſexti) tres lineæ F A, A B A C proportionales. Et proper eamdem rationem A B, A C, A G erunt tres proportionales. Ergo cum ſit vt A F ad A B ita A B ad A C, erit componendo vt A F plus A B ad A B ita A B plus A C ad A C & permutando vt A F plus A B ad A B plus A C, ita A B ad A C. Seu A C ad A G. Et permutando componendoque vt A F plus A B plus A C ad A C ita A B plus A C plus A G ad A G. Sed A F plus A B plus A C æquatur C K (quia K F ſumpta eſt æqualis A B) & A B plus A C plus A G æquatur B H (quia G H ſumpta eſt æqualis A C) igitur vt C K ad A C, ita B H

ad A G. Et permutando vt C K ad B H ita A C ad A G, ſeu A B ad A C. Et permutando vt K C ad A B (hoc eſt K F) ita B H ad A C (hoc eſt G H.) Sed vt C K ad K F ita quadratum K L ad quadratum K F. Et vt B H ad G H ita quadratum H I ad quadratum G H. Ergo vt quadratum K L ad quadratum K F, ita quadratum H I ad quadratum G H. igitur vt K L ad K F ita H I ad G H & permutando vt K L ad H I ita K F ad G H ſeu A B ad A C. ac proinde iam habetur quatuor illas lineas K L, H I, A B, A C, eſſe proportionales.



Probo iam quadrata extrema K L & A C ad quadrata media H I & A B eſſe in ratione data A B ad A C. Nam rectangulũ ſub ſumma A F, A B, A C, A G in A B ad rectangulum ſub eadem ſumma in A C, eſt propter eamdẽ altitudinem vt A B ad A C: ſed prius rectangulum æquatur quadratis extremarum K L A C poſterius autem æquatur quadratis mediarum H I, A B. Siquidem rectangulum ex iſtis quatuor in A B (per 1 ſecundi Euclidis) æquatur rectangulis ex A B in A G, ex A B in A C, ex A B in A B, & ex A B in A F: at primum rectangulum æquatur quadrato A C (quia tres illæ A B, A C, A G ſunt continue proportionales)tertium æquatur quadrato A B, ſecundũ & quartum æquantur rectangulo K F C, ſeu quadrato F L. Quadratum autem K F & F L æquantur quadrato k L. Igitur rectangulum ex ſumma A F, A B, A C, A G in A B æquantur quadratis K L & A C. Similiter rectangulum ex eadem ſumma in A

erit A quadratum æquale $\frac{\text{C B quadr. quadr.} - \text{B cub. C quadr.}}{\text{B cub.} - \text{cub.}}$

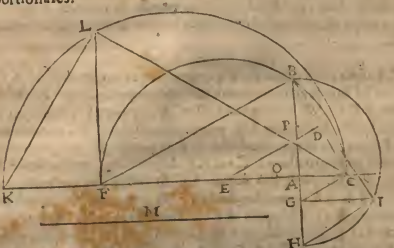
Hinc Canon.

Quadrata terminorum rationis datæ duc viciſſim in terminos rationis, ac per horum differentiam, diuide differentiam cuborũ qui oriuntur à terminis prædictæ rationis: fietque quantitas cuius radix quadrata in terminos ſigillatim ducta exhibebit tertiam & quartam quantitatem quæſitam: prima & ſecunda exiſtentibus ipſis terminis rationis. Iam verò ſi fiat vt ſumma harum quatuor ad ſingulas, ita quantitas diuidenda ad alias habebuntur quatuor ſegmenta quæſita.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data ratio quadratorũ extremorum ad media A B ad A C, & linea M diuidenda in quatuor diſcretè proportionales. Ponãtur autem A B & A C ad angulos rectos, & connexa C B diuidatur bifariam in D, & ducatur D E perpendicularis ipſi B C, protrahaturque donec occurrat productæ C A in puncto E. ex quo tanquam centro ad interuallum E C vel E B deſcribatur ſemicirculus F B C. Deinde producatur B A donec A G ſit tertia perpendicularis duabus A B & A C (quod fiet ducẽdo C G perpendicularem ipſi B C) ponaturque G H æqualis A C, & ſuper B H facto ſemicirculo ducatur G I perpendicularis B H & nectatur H I. Tùm in producta C F accipiatur F K æqualis A B, & ſuper C K fiat ſemicirculus, ductaque F L perpendiculari ad C K nectantur K L & L C. Fiatque vt ſumma A C, A B, H I, K L ad ſingulas ita M ad alias. Dico abſolutum fore problema. Cum enim angulus B in ſemicirculo ſit rectus & B A ſit perpendicularis F C, erunt (per 8 ſexti) tres lineæ F A, A B A C proportionales. Et proper eamdem rationem A B, A C, A G erunt tres proportionales. Ergo cum ſit vt A F ad A B ita A B ad A C, erit componendo vt A F plus A B ad A B ita A B plus A C ad A C & permutando vt A F plus A B ad A B plus A C, ita A B ad A C. Seu A C ad A G. Et permutando componendoque vt A F plus A B plus A C ad A C ita A B plus A C plus A G ad A G. Sed A F plus A B plus A C æquatur C K (quia K F ſumpta eſt æqualis A B) & A B plus A C plus A G æquatur B H (quia G H ſumpta eſt æqualis A C) igitur vt C K ad A C, ita B H

ad A G. Et permutando vt C K ad B H ita A C ad A G, ſeu A B ad A C. Et permutando vt K C ad A B (hoc eſt K F) ita B H ad A C (hoc eſt G H.) Sed vt C K ad K F ita quadratum K L ad quadratum K F. Et vt B H ad G H ita quadratum H I ad quadratum G H. Ergo vt quadratum K L ad quadratum K F, ita quadratum H I ad quadratum G H. igitur vt K L ad K F ita H I ad G H & permutando vt K L ad H I ita K F ad G H ſeu A B ad A C. ac proinde iam habetur quatuor illas lineas K L, H I, A B, A C, eſſe proportionales.



Probo iam quadrata extrema K L & A C ad quadrata media H I & A B eſſe in ratione data A B ad A C. Nam rectangulũ ſub ſumma A F, A B, A C, A G in A B ad rectangulum ſub eadem ſumma in A C, eſt propter eamdẽ altitudinem vt A B ad A C: ſed prius rectangulum æquatur quadratis extremarum, K L A C poſterius autem æquatur quadratis mediarum H I, A B. Siquidem rectangulum ex iſtis quatuor in A B (per 1 ſecundi Euclidis) æquatur rectangulis ex A B in A G, ex A B in A C, ex A B in A B, & ex A B in A F: at primum rectangulum æquatur quadrato A C (quia tres illæ A B, A C, A G ſunt continue proportionales) tertium æquatur quadrato A B, ſecundũ & quartum æquantur rectangulo K F C, ſeu quadrato F L. Quadratum autem K F & F L æquantur quadrato k L. Igitur rectangulum ex ſumma A F, A B, A C, A G in A B æquantur quadratis K L & A C. Similiter rectangulum ex eadem ſumma in A æquatur

æquatur quadratis A B & H I, nam (per 1 ſecundi Euclidis) hoc rectangulū æquatur rectangulis ex A C in A G, ex A C in A C, ex A C in A B, & ex A C in A F: ſed quartum iſtud rectangulum æquatur quadrato A B (per 8 ſexti) rectangulum autem ex A C in B H æquatur tribus aliis rectangulis quoniam B H ex aliis tribus lineis componitur: eſt vero rectangulū ex A C in B H æquale rectangulo B H G, (quia H G eſt æqualis A C) & rectangulū B H G æquatur quadrato H I, quoniam (per 8 ſexti) tres lineæ B H, H I H G ſunt continuè proportionales, ergo rectangulū ex A C in A F, A B, A C, A G æquatur quadratis A B & H I. Igitur cum iam oſtenderimus prius illud rectangulum ad poſterius eſſe in ratione data A B ad A C, ſequitur ex quatuor illis proportionalibus K L, H I, A B, A C quadrata extremarum K L & A C ad quadrata mediarum H I & A B eſſe in ratione data A B ad A C.

Sed factum eſt vt ſumma harum quatuor ad ſingulas; ita M linea diuidenda ad alias, ergo erunt quadrata ſegmentorum in ſimili ratione (per 22 ſexti Euclidis) ergo tendem diuiſa eſt linea M in quatuor lineas diſcretè proportionales ita vt quadrata extremarum ad quadrata mediarum ſint vt A B ad A C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Alio modo potuit effici idem problema capiendo A O æqualem A G & B P æqualem A C, & faciendo vt A P ad F O ita quadratum A B ad aliud quadratum, quod erit K L, aut quadratum A C ad aliud quadratum quod erit H I. Enim vero.

Sit fuerint quatuor lineæ continuè proportionales erit vt differentia extremarum ad differentiam mediarum, ita tres priores ad ſecundam vel tres poſteriores ad tertiam.

Item ſi furint quatuor lineæ continuè proportionales, rectangulum ex ſumma omnium in mediam maiorem æquabitur quadratis extremarū, & rectangulum ex ſumma omnium in mediam minorem æquabitur quadratis mediarum de quatuor lineis diſcrete proportionalibus quarum quadrata extrema ad quadrata media ſunt in ratione ſecundæ ad tertiam ex prioribus, & quarum prima & ſecunda æquantur ſecundæ & tertiæ ex prioribus.

Hinc quoque elicitur poſſe eamdem quantitatem in numeris modis diuidi in quatuor diſcrete proportionales, ita vt quadrata extre-

ma habeant datam proportionem ad quadrata media: vt ſi iubeatur 60 diuidi in quatuor proportionales quarum quadrata extrema habeant rationem duplam ad quadrata media numeri ſequentes ſoluet quæſtionem ℞ 224--8. ℞ 896--16. 28--℞224. 56--℞ 896. iteque quatuor ſequentes ſatiſfacient quæſtioni ℞ 720. 30--℞ 180 ℞ 1620--30. 60 -℞ 2880.

Denique ex his ſolues duo alia problemata quorum primum eſt: datam quantitatem diuidere in quatuor quantitates proportionales diſcrete, ita vt quadrata omnium ad quadrata extremarum habeant rationem datam! ſecundum problema eſt datam quantitatem diuidere in quatuor proportionales diſcrete, ita vt quadrata omnium ad quadrata mediarum datam habeant rationem. Nam diuidendo dabitur ratio quadratorum ab extremis ad quadrata à mediis. Quod indicaſſe, ſatis eſto.

Propositio XX.

Diuidere quantitatem datam in quatuor diſcretè proportionales, ita vt differentiâ quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis habeat proportionem datam.

Esto data ratio 4 ad 2, & quantitas diuidenda 12 † ℞ 216. Ponatur autem 1 R pro tertia quantitate ſumptis pro prima & ſecunda duobus terminis rationis hoc ordine 2 ad 4. ergo 2 R erit quarta. Differentia quadratorum ab extremis eſt 4 Q--4, differentiâ quadratorũ à mediis eſt 16--1 Q igitur 4 Q--4 ad 16--1Q eſt vt 4 ad 2. ideoque productus ſub extremis 8 Q--8 æquatur producto ſub mediis 64-4Q & fit 1 R æqualis ℞ 6. & quatuor numeri 2. 4. ℞ 6 ℞ 24. tales ſunt vt differentja quadratorum ab extremis 20 ad differentiam quadratorũ à mediis 10, habeant rationem datam 4 ad 2. quare ſi fiat vt ſumma illorum quatuor 6 † ℞ 54 ad ſingulos ita quantitas data 12 † ℞ 216 ad alias, inuenientur ſegmenta quæſita 4. 8 ℞ 24. ℞ 96.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione C ad B ponatur tertiâ quantitas A. Ergo ſi capias B & C pro prima & ſecunda, inuenies

æquatur quadratis A B & H I, nam (per 1 ſecundi Euclidis) hoc rectangulũ æquatur rectangulis ex A C in A G, ex A C in A C, ex A C in A B, & ex A C in A F: ſed quartum iſtud rectangulum æquatur quadrato A B (per 8 ſexti) rectangulum autem ex A C in B H æquatur tribus aliis rectangulis quoniam B H ex aliis tribus lineis componitur: eſt vero rectangulũ ex A C in B H æquale rectangulo B H G, (quia H G eſt æqualis A C) & rectangulũ B H G æquatur quadrato H I, quoniam (per 8 ſexti) tres lineæ B H, H I H G ſunt continuè proportionales, ergo rectangulũ ex A C in A F, A B, A C, A G æquatur quadratis A B & H I. Igitur cum iam oſtenderimus prius illud rectangulum ad poſterius eſſe in ratione data A B ad A C, ſequitur ex quatuor illis proportionalibus K L, H I, A B, A C quadrata extremarum K L & A C ad quadrata mediarum H I & A B eſſe in ratione data A B ad A C.

Sed factum eſt vt ſumma harum quatuor ad ſingulas; ita M linea diuidenda ad alias, ergo erunt quadrata ſegmentorum in ſimili ratione (per 22 ſexti Euclidis) ergo tendem diuiſa eſt linea M in quatuor lineas diſcretè proportionales ita vt quadrata extremarum ad quadrata mediarum ſint vt A B ad A C. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Alio modo potuit effici idem problema capiendo A O æqualem A G & B P æqualem A C, & faciendo vt A P ad F O ita quadratum A B ad aliud quadratum, quod erit K L, aut quadratum A C ad aliud quadratum quod erit H I. Enim vero.

Sit fuerint quatuor lineæ continuè proportionales erit vt differentia extremarum ad differentiam mediarum, ita tres priores ad ſecundam vel tres poſteriores ad tertiam.

Item ſi furint quatuor lineæ continuè proportionales, rectangulum ex ſumma omnium in mediam maiorem æquabitur quadratis extremarũ & rectangulum ex ſumma omnium in mediam minorem æquabitur quadratis mediarum de quatuor lineis diſcrete proportionalibus quarum quadrata extrema ad quadrata mediã ſunt in ratione ſecundæ ad tertiam ex prioribus, & quarum prima & ſecunda æquantur ſecundæ & tertiæ ex prioribus.

Hinc quoque elicitur poſſe eamdem quantitatem in numeris modis diuidi in quatuor diſcrete proportionales, ita vt quadrata extre-

Tt

ma habeant datam proportionem ad quadrata media: vt ſi iubeatur 60 diuidi in quatuor proportionales quarum quadrata extrema habeant rationem duplam ad quadrata media numeri ſequentes ſoluet quæſtionem ℞ 224 -- 8. ℞ 896 -- 16. 28 --- ℞ 224. 56 -- ℞ 896. itéque quatuor ſequentes ſatiſſacient quæſtioni ℞ 720. 30 -- ℞ 180 ℞ 1620 -- 30. 60 -- ℞ 2880.

Denique ex his ſolues duo alia problemata quorum primum eſt: datam quantitatem diuidere in quatuor quantitates proportionales diſcrete, ita vt quadrata omnium ad quadrata extremarum habeant rationem datam! ſecundum problema eſt datam quantitatem diuidere in quatuor proportionales diſcrete, ita vt quadrata omnium ad quadrata mediarum datam habeant rationem. Nam diuidendo dabitur ratio quadratorum ab extremis ad quadrata à mediis. Quod indicaſſe, ſatis eſto.

Propositio XX.

Diuidere quantitatem datam in quatuor diſcretè proportionales, ita vt differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis habeat proportionem datam.

Esto data ratio 4 ad 2, & quantitas diuidenda 12 † ℞ 216. Ponatur autem 1 R pro tertia quantitate ſumptis pro prima & ſecunda duobus terminis rationis hoc ordine 2 ad 4. ergo 2 R erit quarta. Differentia quadratorum ab extremis eſt 4 Q --- 4, differentià quadratorũ à mediis eſt 16 -- 1 Q igitur 4 Q --- 4 ad 16 -- 1 Q eſt vt 4 ad 2. ideoque productus ſub extremis 8 Q -- 8 æquatur producto ſub mediis 64 - 4 Q. & fit 1 R æqualis ℞ 6. & quatuor numeri 2. 4. ℞ 6 ℞ 24. tales ſunt vt differentia quadratorum ab extremis 20 ad differentiam quadratorũ à mediis 10, habeant rationem datam 4 ad 2. quare ſi fiat vt ſumma illorum quatuor 6 † ℞ 54 ad ſingulos ita quantitas data 12 † ℞ 216 ad alias, inuenientur ſegmenta quæſita 4. 8 ℞ 24. ℞ 96.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione C ad B ponatur tertià quantitas A. Ergo ſi capias B & C pro prima & ſecunda, inuenies

quartam $\frac{C\ A.}{B}$ Igitur differentiâ quadratorum ab èxtremis

$$\frac{\text{C quadr. A quadr. -- B quadr. quadr.}}{\text{B quadr.}}$$

ad differentiam quadratorum à mediis C quadr -- A quadr. eſt vt C ad B. Ac proinde productus ſub extremis æquabitur producto ſub mediis. Et tandem poſt debitam reductionem fiet A quadratum æquale fractioni ſequenti

$$\frac{\text{B quadr. Cub. † B quadr. cub.}}{\text{B C quadr. † C B quadr.}}$$

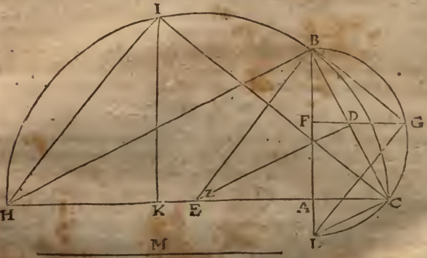
Hinc. Canon.

Quadrata terminorum rationis datæ diuide viciſſim per ipſos terminos: fientque quatuor quantitates continue proportionales: ſummam primæ & tertiæ, itemque ſummam ſecundæ & quartæ duc in differentiam mediarum ſigillatim, habebiſque differentias quadratorum à mediis & quadratorum ab extremis, de quatuor quantitatibus diſcrete proportionalibus, quarum prima & ſecunda ſunt termini rationis, ac proinde illæ quatuor non latebunt hinc. ſecabis facile more conſueto quantitatem diuidendam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio diffrentiæ quadratorū ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis A B ad A C. Et linea diuidenda in quatuor proportionales M. Ponantur A B & A C perpendiculariter & nectatur B C, qua diuiſa bifariam in D, ducatur D E perpendicularis ipſi B C, ſecetque A C productam in E. ex quo tanquam centro, ad interuallum E C vel E B deſcribatur ſemicirculus H B C. Tum ſumatur B F æqualis A C, & H K æqualis A B, & ducta C L perpendiculari ad B C, producatur B A donec occurrat C L, & ſupra B L, deſcribatur ſemicirculus, ac ex puncto F ducatur F G perpendicularis ipſi B L, & ex puncto K perpendicularis K I ipſi H C. Denique fiat vt ſumma illarum quatuor linearum A C, A B, F G, K I ad ſingulas ita M linea diuidenda ad alias. Dico lineam M fore ſectam vt poſcitur. Nam tres illæ H A, A B, A C, ſunt continue proportionales, (per 8 ſexti) ſicut etiam tres iſtæ A B, A C, A L. Ergo quatuor A H, A B, A C, A L, ſunt continue proportionales. Et permutando vt A H ad A C ita A B ad A L. Et com-

ponendo vt AH plus AC ad AC ita AB plus AL ad AL. Et permutando vt HC ad BL ita AC ad AL hoc eſt AB ad AC ſeu AH ad AB, ſeu HK ad BF, (eſt enim ſumpta HK æqualis AB & BF æqalis AC.) Et permutando vt HC ad HK ita BL ad BF. Sed vt HC ad HK ita quadratum HC ad quadratum HI: Et vt BL ad BF ita quadratum BL ad quadratum BG. Ergo vt quadratum HC ad quadratum HI ita quadratum BL ad quadratum BG. Et permutando, vt totum quadratum HC ad totum quadratum BL, ita ablatum quadratum HI ad ablatum quadratum BG. Ergo & reliquum quadratum atum IC ad reliquum quadratum LG vt totum quadratum HC ad totum quadratum BL aut HI quadratum ad quadratum BG Ergo permutando, vt quadratum IC ad quadratum IH ita quadratum GL ad quadratum GB. Igitur vt linea IC ad lineam IH ita linea GL



ad lineam GB. Sed angulus duabus iſtis lineis proportionalibus comprehenſus eſt æqualis, vt pote rectus, quia in ſemicirculo, ergo (per *6* ſexti) duo triangula HIC & BGL ſunt æquiangula. Sed (per 8 ſexti) iſtis triangulis æquiangula ſunt triangula HIA & BGF. Igitur vt KH ad KI ita FB ad FG. Sed HK eſt æqualis AB & BF æqualis AC. Ergo permutando & inuertẽdo eſt vt AC ad AB ita FG ad KI. Igitur quatuor iſtæ lineæ ſunt proportionales quod eſt vnum ex demonſtrandis.

Sed differentia quadratorum ab extremis AC & kI æquatur rectangulo

quartam $\frac{C\,A}{B}$. Igitur differentiâ quadratorum ab extremis

$$\frac{C\text{ quadr. }A\text{ quadr. }--B\text{ quadr. quadr.}}{B\text{ quadr.}}$$

ad differentiam quadratorum à mediis C quadr -- A quadr. eſt vt C ad B. Ac proinde productus ſub extremis æquabitur producto ſub mediis. Et tandem poſt debitam reductionem fiet A quadratum æquale fractioni ſequenti

$$\frac{B\text{ quadr. Cub. }\dagger\ B\text{ quadr. cub.}}{BC\text{ quadr. }\dagger\ CB\text{ quadr.}}$$

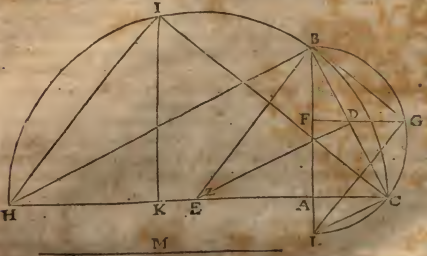
Hinc Canon.

Quadrata terminorum rationis datæ diuide viciſſim per ipſos terminos: fientque quatuor quantitates continue proportionales: ſummam primæ & tertiæ, itemque ſummam ſecundæ & quartæ duc in differentiam mediarum ſigillatim, habebiſque differentias quadratorum à mediis & quadratorum ab extremis, de quatuor quantitatibus diſcrete proportionalibus, quarum prima & ſecunda ſunt termini rationis, ac proinde illæ quatuor non latebunt hinc. ſecabis facile more conſueto quantitatem diuidendam.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio diffrentiæ quadratorũ ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis A B ad A C. Et linea diuidenda in quatuor proportionales M. Ponantur A B & A C perpendiculariter & nectatur B C, qua diuiſa bifariam in D, ducatur D E perpendicularis ipſi B C, ſecetque A C productam in E. ex quo tanquam centro, ad interuallum E C vel E B deſcribatur ſemicirculus H B C. Tum ſumatur B F æqualis A C, & H K æqualis A B, & ducta C L perpendiculari ad B C, producatur B A donec occurrat C L, & ſupra B L, deſcribatur ſemicirculus, ac ex puncto F ducatur F G perpendicularis ipſi B L, & ex puncto K perpendicularis K I ipſi H C. Denique fiat vt ſumma illarum quatuor linearum A C, A B, F G, K I ad ſingulas ita M linea diuidenda ad alias. Dico lineam M fore ſectam vt poſcitur. Nam tres illæ H A, A B, A C, ſunt continue proportionales, (per 8 ſexti) ſicut etiam tres iſtæ A B, A C, A L. Ergo quatuor A H, A B, A C, A L, ſunt continue proportionales. Et permutando vt A H ad A C ita A B ad A L. Et com-

ponendo vt AH plus AC ad AC ita AB plus AL ad AL. Et permutando vt HC ad BL ita AC ad AL hoc eſt AB ad AC ſeu AH ad AB, ſeu HK ad BF, (eſt enim ſumpta HK æqualis AB & BF æqalis AC.) Et permutando vt HC ad HK ita BL ad BF. Sed vt HC ad HK ita quadratum HC ad quadratum HI: Et vt BL ad BF ita quadratum BL ad quadratum BG. Ergo vt quadratum HC ad quadratum HI ita quadratum BL ad quadratum BG. Et permutando, vt totum quadratum HC ad totum quadratum BL, ita ablatum quadratum HI ad ablatum quadratum BG. Ergo & reliquum quadratum atum IC ad reliquum quadratum LG vt totum quadratum HC ad totum quadratum BL aut HI quadratum ad quadratum BG Ergo permutando, vt quadratum IC ad quadratum IH ita quadratum GL ad quadratum GB. Igitur vt linea IC ad lineam IH ita linea GL



ad lineam GB. Sed angulus duabus iſtis lineis proportionalibus comprehenſus eſt æqualis, vt pote rectus, quia in ſemicirculo, ergo (per 6 ſexti) duo triangula HIC & BGL ſunt æquiangula. Sed (per 8 ſexti) iſtis triangulis æquiangula ſunt triangula HIA & BGF. Igitur vt KH ad KI ita FB ad FG. Sed HK eſt æqualis AB & BF æqualis AC. Ergo permutando & inuertẽdo eſt vt AC ad AB ita FG ad KI. Igitur quatuor iſtæ lineæ ſunt proportionales quod eſt vnum ex demonſtrandis.

Sed differentia quadratorum ab extremis AC & kI æquatur rectangulo

ctangulo AF in HC. Capiatur enim kZ æqualis AL (nota quod aliquando punctum Z incedet in centrum ſemicirculi HBC, vt dum AB dupla eſt AC) cum quadratum kI æquetur rectangulo HkC, rectangulum autem HKC æquetur rectangulis HkZ & Hk in ZC, & rectangulum HkZ æquale ſit rectangulo BAL ſeu quadrato AC, erit rectangulum Hk in ZC differentia quadratorum KI & AC. Eſt vero vt HC ad BL ſeu HZ ita HK ad BF, vt mox probatum eſt, ergo cum HK ſit æqualis AB, erit permutando diuidendoque vt CZ ad HZ ita AF ad FB. Et inuertendo componendoque vt HC ad CZ ita AB ad AF, igitur rectangulum ſub extremis HC in AF æquatur rectangulo ſub mediis AB in CZ ſeu Hk in ZC. Sed iam probaui rectangulum Hk in ZC æquari differentia quadratorum kI & AC. Ergo rectangulum ſub AF in HC æquatur etiam differentia quadratorum KI & AC.

Similiter rectangulum AF in BL eſt æquale differentiæ quadratorum à mediis AB & FG. Siquidem quadratum AB æquatur quadratis AF & FB & duplo rectanguli AFB. Sed quadratum BF ſeu AC eſt æquale rectangulo BAL. Igitur quadratum AB æquatur quadrato AF, rectangulo BAL & duplo rectanguli AFB. At rectangulum BAL æquatur rectangulis BF & in AL & AF in AL (per 1 ſecundi) rectangula autem BF in AL & BFA ſunt æqualia rectangulo BFL. Ergo quadratum AB æquatur rectangulo BFL plus BFA plus FA in AL plus quadrato AF. Ergo cum quadratum FG ſit æquale rectangulo BFL, differentia quadratorum AB & FG erit æqualis rectangulo BFA plus quadrato FA plus rectangulo FAL. Ergo (per 1. ſecundi) hæc eadem differentia æquatur rectangulo ſub FA in BL.

Sed vt rectangulum ex AF in HC ad rectangulum ex AF in BL, ita propter eamdem altitudinem AF, eſt HC ad BL (ſeu vt iam probauimus AB ad AC) ergo cum oſtenderimus rectangulum ex AF in HC æquari differentiæ quadratorum KI & AC, & rectangulum ex AF in BL æquari differentiæ quadratorum AB & FG, ſequitur inuentas eſſe quatuor proportionales AC, AB FG KI ita vt differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis ſint in ratione data AB ad AC.

Vu

Cum ergo factum ſit vt ſumma quatuor illarum linearum ad ſingulas ita M ad alias, erunt quadrata iſtarum (per 22 ſexti) in ſimili cum illis ratione, ergo M diuiſa eſt in quatuor diſcretè proportionales, ita vt differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis ſit in ratione data. Quod erat faciendum & demonſtrandum.

Scholium.

Hic aduerte circa operationem Algebricam poſſe incidi in æquationem impoſſibilem, vt ſi detur ratio 2 ad 1 & ponatur 1 R pro tertio numero ſumptis 1 & 2 pro duobus prioribus. Tunc enim quartus foret 2 R. Differentia quadratorum ab extremis eſſet 4 Q -- 1. & tollendo 4 de 1 Q differentia quadratorum à mediis fore 1 Q -- 4. Igitur 4 Q -- 1 ad 1 Q -- 4 eſſet vt 2 ad 1. quæ æquatio eſt impoſſibilis, inde enim fierent 2 Q † 7 æqualia O. Quod eſt abſurdum. Dum igitur res ita accidit, non quadratum ſecundi tolli debet quadrato tertij, ſed contra quadratum tertij de ſecundi quadrato.

Deinde ex Effectione Geometrica præcedenti elicitur hoc theorema: ſi fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, rectangulum ex differentia mediarum in ſummam maioris extremæ & minoris mediæ; itemque in ſummam minoris extremæ & mediæ maioris, æquatur differentiæ quadratorum ab extremis, & differentiæ quadratorum à mediis de quatuor diſcretè proportionalibus, quarum prima & ſecunda ſunt ſecunda & tertia de quatuor continuè proportionalibus, & quarum differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis eſt in ratione quatuor continuè proportionalium.

Eiuſdem problematis in propoſitione enuntiati potuit inſtitui alia effectio Geometrica ex hoc Canone. Quadratum minoris termini rationis datæ diuide per maiorem terminum, quotientis quadratum iunge cum plano ſub terminis rationis: hæc enim ſumma ad quadratum tertiæ quantitatis ſe habebit vt ſumma terminorum rationis ad maiorem terminum, duabus prioribus exiſtentibus terminis rationis. Vnde quarta quantitas non latebit.

ctangulo A F in H C. Capiatur enim k Z æqualis A L (nota quod aliquando punctum Z incedet in centrum ſemicirculi H B C, vt dum A B dupla eſt A C) cum quadratum k I æquetur rectangulo H k C, rectangulum autem H K C æquetur rectangulis H k-Z & H K in Z C, & rectangulum H k Z æquale ſit rectangulo B-A L ſeu quadrato A C, erit rectangulum H k in Z C differentia quadratorum K I & A C. Eſt vero vt H C ad B L ſeu H Z ita H K ad B F, vt mox probatum eſt, ergo cum H K ſit æqualis A B, erit permutando diuidendoque vt C Z ad H Z ita A F ad F B. Et inuertendo componendoque vt H C ad C Z ita A B ad A F, igitur rectangulum ſub extremis H C in A F æquatur rectangulo ſub mediis A B in C Z ſeu H k in Z C. Sed iam probaui rectangulum H k in Z C æquari differentia quadratorum k I & A C. Ergo rectangulum ſub A F in H C æquatur etiam differentia quadratorum K I & A C.

Similiter rectangulum A F in B L eſt æquale differentiæ quadratorum à mediis A B & F G. Siquidem quadratum A B æquatur quadratis A F & F B & duplo rectanguli A F B. Sed quadratum B F ſeu A C eſt æquale rectangulo B A L: Igitur quadratum A B æquatur quadrato A F, rectangulo B A L & duplo rectanguli A F-B. At rectangulum B A L æquatur rectangulis B F & in A L & A F in A L (per 1 ſecundi) rectangula autem B F in A L & B F A ſunt æqualià rectangulo B F L. Ergo quadratum A B æquatur rectangulo B F L plus B F A plus F A in A L plus quadrato A F. Ergo cum quadratum F G ſit æquale rectangulo B F L, differentia quadratorum A B & F G erit æqualis rectangulo B F A plus quadrato F A plus rectangulo F A L. Ergo (per 1. ſecundi) hæc eadem differentia æquatur rectangulo ſub F A in B L.

Sed vt rectangulum ex A F in H C ad rectangulum ex A F in B L, ita propter eamdem altitudinem A F, eſt H C ad B L (ſeu vt iam probauimus A B ad A C) ergo cum oſtenderimus rectangulum ex A F in H C æquari differentiæ quadratorum K I & A C, & rectangulum ex A F in B L æquari differentiæ quadratorum A B & F G, ſequitur inuentas eſſe quatuor proportionales A C, A B F G K I ita vt differentià quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis ſint in ratione data A B ad A C.

Cum ergo factum ſit vt ſumma quatuor illarum linearum ad ſingulas ita M ad alias, erunt quadrata iſtarum (per 22 ſexti) in ſimili cum illis ratione, ergo M diuiſa eſt in quatuor diſcretè proportionales, ita vt differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis ſit in ratione data. Quod erat faciendum & demonſtrandum.

Scholium.

Hic aduerte circa operationem Algebricam poſſe incidi in æquationem impoſſibilem, vt ſi detur ratio 2 ad 1 & ponatur I R pro tertio numero ſumptis 1 & 2 pro duobus prioribus. Tunc enim quartus foret 2 R. Differentia quadratorum ab extremis eſſet 4 Q -- 1. & tollendo 4 de I Q differentia quadratorum à mediis fore I Q -- 4. Igitur 4 Q -- 1 ad I Q -- 4 eſſet vt 2 ad 1. quæ æquatio eſt impoſſibilis, inde enim fierent 2 Q † 7 æqualiâ O. Quod eſt abſurdum. Dum igitur res ita accidit, non quadratum ſecundi tolli debet quadrato tertij, ſed contra quadratum tertij de ſecundi quadrato.

Deinde ex Effectione Geometrica præcedenti elicitur hoc theorema: ſi fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, rectangulum ex differentia mediarum in ſummam maioris extremæ & minoris mediæ; itemque in ſummam minoris extremæ & mediæ maioris, æquatur differentiæ quadratorum ab extremis, & differentiæ quadratorum à mediis de quatuor diſcretè proportionalibus, quarum prima & ſecunda ſunt ſecunda & tertiâ de quatuor continuè proportionalibus, & quarum differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis eſt in ratione quatuor continuè proportionalium.

Eiuſdem problematis in propoſitione enuntiati potuit inſtitui alia effectio Geometricâ ex hoc Canone, Quadratum minoris termini rationis datæ diuide per maiorem terminum, quotientis quadratum iunge cum plano ſub terminis rationis: hæc enim ſumma ad quadratum tertiæ quantitatis ſe habebit vt ſumma terminorum rationis ad maiorem terminum, duabus prioribus exiſtentibus terminis rationis. Vnde quarta quantitas non latebit.

Propositio XXI.

Diuidere quantitatem datam in quatuor diſcretè proportionales, taliter vt quadrata trium minorum habeant rationem datam ad quadratum maioris.

ESto datus numerus diuidendus 9 † ℞ 405. & ratio 1 ad 2. ſumantur autem 1 & 2 pro duobus prioribus numeris & ponatur duo poſteriores 1 R & 2 R. Igitur 5 † 1 Q ad 4 Q ſunt vt 1 ad 2. ac proinde productus ſub extremis 10 † 2 Q æquatur producto ſub mediis 4 Q. Ergo 1 R eſt R 5 & 2 R eſt ℞ 20. fiuntque quatuor numeri 1. 2. ℞ 5. ℞ 20. ſi autem fiat vt ſumma eorum ad ſingulos ita numerus datus 9 † ℞ 405 ad alios habebuntur quatuor quæſiti numer 3. 6. ℞ 45. ℞ 180.

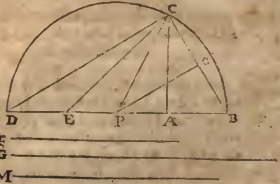
Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C ponatur A pro tertio, ergo acceptis B & C pro primo & ſecundo erit quartus C A. Igitur B quadr. † C quadr. † A quadr. ad C quadr. A quadr.
B Bquadr.
eſt in ratione data B ad C. Ac propterea productus ſub extremis, æquabitur producto ſub mediis. Et poſt debitum reductionem & diuiſionem, erit A quadratum æquale C B quadr. quadr. † C cub.
B C quadr. ---- C B
B quadr. ſi autem fiat vt B ad C ita C ad Z, erit quoque A qua-
quadr.
dratum æquale C B quadr. † C cub.
Z --- C

Hinc Canon.

Quadratum poſterioris termini rationis datæ diuide per priorem: quotientis huius & termini poſterioris cape differentiam ac per hanc diuide ſolidum ſub quadrato prioris termini in poſteriorem, auctum cubo poſterioris: fietque quadratum tertij quæſiti, primo & ſecundo exiſtentibus terminis rationis datæ. Vnde quartus non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea M diuidenda in quatuor proportionales, & ratio data ſit A B ad A C. Ponantur iſtæ duæ ad angulos rectos, & connexa B C diuidatur bifariam in O, ex quo ducta O P perpendicularis ad A C, producatur donec occurrat B A productæ in P. tùm centro P, interuallo P B vel P C deſcribatur ſemicirculus D C B, & ſumatur A E æqualis A C, & fiat vt D E ad E A ita quadratum B C ad quadratum F, ac deinde vt A B ad A C ita F ad G, & tandem vt ſũma A B A C, F & G ad ſingulas ita M ad alias. Dico M fore diuiſam vt poſcitur.



Cum enim ſit vt D E ad E A ita quadratum B C ad quadratum F, erit componendo vt D A ad E A (hoc eſt A C) ita quadratum B C plus quadrato F. ad quadratũ Sed factũ eſt vt A B ad A C ita F ad G. Ergo erit quoque vt quadratum A B ad quadratũ A C ita quadrat F ad quadratum G. Eſt vero vt quadratum A B ad quadratum A C ita A B lineam ad A D tertiam proportionalem: igitur vt A B ad A C ita quadratum B C plus quadrato F ad quadratum F: & vt quadratum F ad quadratum G ita A B ad A D. Ergo perturbando, vt quadratum B C plus quadrato F ad quadratum G, ita A B ad A C. At quadratum B C æquatur quadratis B A & A C (per 47 primi) igitur vt quadratum A B plus quadrato A C plus quadrato F ad quadratum G ita A B ad A C. Ergo inuentæ ſunt quatuor proportionales A B, A C, F, G taliter vt quadrata trium minorum ad quadratum maioris habeant rationem datam. Cum itaque factum ſit vt ſumma harum quatuor ad ſingulas, ita M ad alias, erunt (per 22 ſexti) quadrata in ſimili ratione. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XXI.

Diuidere quantitatem datam in quatuor diſcretè proportionales, taliter vt quadrata trium minorum habeant rationem datam ad quadratum maioris.

ESto datus numerus diuidendus 9 † ℞ 405. & ratio 1 ad 2. ſumantur autem 1 & 2 pro duobus prioribus numeris & ponatur duo poſteriores 1 R & 2 R. Igitur 5 † 1 Q ad 4 Q ſunt vt 1 ad 2. ac proinde productus ſub extremis 10 † 2 Q æquatur producto ſub mediis 4 Q. Ergo 1 R eſt R 5 & 2 R eſt ℞ 20. fiuntque quatuor numeri 1. 2. ℞ 5. ℞ 20. ſi autem fiat vt ſumma eorum ad ſingulos ita numerus datus 9 † ℞ 405 ad alios habebuntur quatuor quæſiti numer 3. 6. ℞ 45. ℞ 180.

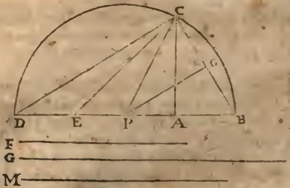
Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C ponatur A pro tertio, ergo acceptis B & C pro primo & ſecundo erit quartus C A. Igitur B quadr. † C quadr. † A quadr. ad C quadr. A quadr.
B Bquadr.
eſt in ratione data B ad C. Ac propterea productus ſub extremis æquabitur producto ſub mediis. Et poſt debitum reductionem & diuiſionem, erit A quadratum æquale C B quadr. quadr. † C cub.
B C quadr. ----- C B
B quadr. ſi autem fiat vt B ad C ita C ad Z, erit quoque A qua-
quadr.
dratum æquale C B quadr. † C cub.
Z --- C

Hinc Canon.

Quadratum poſterioris termini rationis datæ diuide per priorem: quotientis huius & termini poſterioris cape differentiam ac per hanc diuide ſolidum ſub quadrato prioris termini in poſteriorem, auctum cubo poſterioris; fietque quadratum tertij quæſiti, primo & ſecundo exiſtentibus terminis rationis datæ. Vnde quartus non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data linea M diuidenda in quatuor proportionales, & ratio data ſit A B ad A C. Ponantur iſtæ duæ ad angulos rectos, & connexa B C diuidatur bifariam in O, ex quo ducta O P perpendicularis ad A C, producatur donec occurrat B A productæ in P. tùm centro P, interuallo P B vel P C deſcribatur ſemicirculus D C B, & ſumatur A E æqualis A C, & fiat vt D E ad E A ita quadratum B C ad quadratum F, ac deinde vt A B ad A C ita F ad G, & tandem vt ſũma A B A C, F & G ad ſingulas ita M ad alias. Dico M fore diuiſam vt poſcitur. Cum enim ſit vt D E ad E A ita quadratum B C ad quadratum F, erit componendo vt D A ad E A (hoc eſt A C) ita quadratum BC plus quadrato F. ad quadratũ Sed factũ eſt vt A B ad A C ita F ad G. Ergo erit quoque vt quadratum A B ad quadratũ A C ita quadrat F ad quadratum G. Eſt vero vt quadratum A B ad quadratum A C ita A B lineam ad A D tertiam proportionalem: igitur vt A B ad A C ita quadratum B C plus quadrato F ad quadratum F: & vt quadratum F ad quadratum G ita A B ad A D. Ergo perturbando, vt quadratum B C plus quadrato F ad quadratum G, ita A B ad A C. At quadratum B C æquatur quadratis B A & A C (per 47 primi) igitur vt quadratum A B plus quadrato A C plus quadrato F ad quadratum G ita AB ad A C. Ergo inuentæ ſunt quatuor proportionales A B, A C, F, G taliter vt quadrata trium minorum ad quadratum maioris habeant rationem datam. Cum itaque factum ſit vt ſumma harum quatuor ad ſingulas, ita M ad alias, erunt (per 22 ſexti) quadrata in ſimili ratione. Quod erat demonſtrandum.



Propositio

PROPOSITIO XXII.

Diuidere quantitatem datam in quatuor diſcretè proportionales taliter vt quadrata trium maiorum ad quadratum minoris datam habeat rationem.

SIt ratio data 29 ad 1, & numerus diuidendus 8 + ℞ 128. capiantur autem vt libuerit 3 & 1 pro duobus & poſterioribus & ſint duæ priores 3 R & 1 R. Igitur 10 Q + 9 ad 1 ſunt vt 29 ad 1. & ita productus ſub extremis 10 Q + 9 æquatur producto ſub mediis 29. Ergo 10 Q æqualia ſunt 20 & fit 1 R æqualis ℞ 2. ac proinde quatuor numeri ℞ 18. ℞ 2. 3. 1 ſunt proportionales, & quadrata trium maiorum ad quadratum minoris habent rationem datam Quare ſi fiat vt ſumma horum quatuor ad ſingulos, ita numerus datus ad alios, habebis quatuor quæſitos 2. 6. ℞ 8. ℞ 72.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione F ad G ſumantur duo vt cunque pro poſterioribus B & C. Ergo poſito A pro vno ex prioribus, erit alter $\frac{B\,A}{C}$ igitur quadratum $\frac{B\ \text{quadr.}\ A\ \text{quadr.}}{C\ \text{quadr.}}$ + A quadr. + B quadr. ad C quadr. eſt vt F ad G. Ac proinde productus ſub extremis æquabitur producto ſub mediis. Igitur poſt varias reductiones & diuiſionem conſuetam, erit A quadratum æquale $\frac{F\ C\ \text{quadr. quadr.} - G\ C\ \text{quadr.}\ B\ \text{quadr.}}{G\ B\ \text{quadr.} + G\ C\ \text{quadr.}}$ ſi autem fiat vt B ad C ita C ad Z & vt G ad F ita B ad Y. erit iterum A quadratum æquale $\frac{Y\ Z\ \text{quadr.} - Z\ B\ \text{quadr.}}{B + Z}$

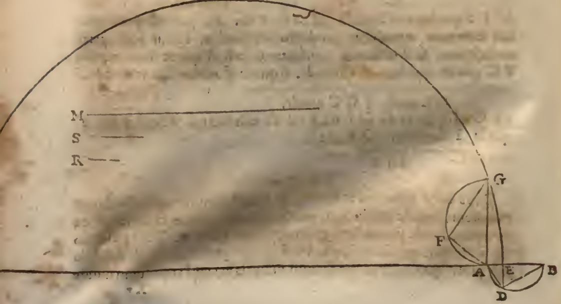
Hinc Canon.

Cape duos numeros vt libuerit & quadratum minoris diuide per maiorem, deinde productum prioris termini rationis in maiorem ex acceptis, diuide per poſteriorem terminum rationis. Tùm ex ſolido ſub poſteriori quotiente in quadratū prioris quotientis, tolle ſolidum ſub priori quotiente in quadratum maioris accepti: reſiduum diuide

per maiorem acceptum priori quotiente auctum, & habebis quadratum tertij quæſiti, duobus acceptis exiſtentibus primo & ſecundo. Vnde quartus non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea diuidenda M, & ratio CA ad AB, ſuper AB poſteriori termino rationis, fiat ſemicirculus in quo inſcribatur AD ad libitum, & ponatur DE perpendicularis ad AB. Tùm ſuper CE fiat ſemicirculus ad cuius peripheriam erigatur AG perpendicularis ad CA, & ſuper AG deſcripto ſemicirculo, inſcribatur AF æqualis AB, nectatur FG. Deinde fiat vt BA plus AE ad AE, ita quadratum FG ad quadratum R. (Aduerte ita res debere diſponi vt R ſit maior AD) denique fiat vt AD ad AB ita R ad S. Dico quatuor iſtas poſtremas proportionales eſſe lineas quorum quadrata habent proportionem datam, & ſi fiat vt ſumma illarum ad ſingulas, ita M ad alias, ſectam illam fore vt poſcitur. Nam cum ſit vt AB plus AE ad AE ita quadratum FG ad quadratum R, erit diuidendo vt AB ad AE ita quadratum FG minus quadrato minus quadrato R ad quadratum R. Sed eſt vt BA ad AE ita quadratum AB ad quadratum AE (per 8 & 19 ſexti) ergo eſt vt quadratum AB ad quadratum AD ita quadratum FG



Propositio XXII.

Diuidere quantitatem datam in quatuor diſcretè proportionales taliter vt quadrata trium maiorum ad quadratum minoris datam habeat rationem.

SIt ratio data 29 ad 1, & numerus diuidendus 8 † ℞ 128. capiantur autem vt libuerit 3 & 1 pro duobus & poſterioribus & ſint duæ priores 3 R & 1 R. Igitur 10 Q † 9 ad 1 ſunt vt 29 ad 1. & ita productus ſub extremis 1 O Q † 9 æquatur producto ſub mediis 29. Ergo 10 Q æqualia ſunt 20 & fit 1 R æqualis ℞ 2. ac proinde quatuor numeri ℞ 18. ℞ 2. 3. 1 ſunt proportionales, & quadrata trium maiorum ad quadratum minoris habent rationem datam Quare ſi fiat vt ſumma horum quatuor ad ſingulos, ita numerus datus ad alios, habebis quatuor quæſitos 2. 6. ℞ 8. ℞ 72.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione F ad G ſumantur duo vt cunque pro poſterioribus B & C. Ergo poſito A pro vno ex prioribus, erit alter B A igitur quadratum B quadr. A quadr. † A qua-

C   C quadr.

dr. † B quadr. ad C quadr. eſt vt F ad G. Ac proinde productus ſub extremis æquabitur producto ſub mediis. Igitur poſt varias reductiones & diuiſionem conſuetam, erit A quadratum æquale F C quadr. quadr. --- G C quadr. B quadr. ſi autem fiat vt B ad C

G B quadr. ‡ G C quadr.

ita C ad Z & vt G ad F ita B ad Y. erit iterum A quadratum æquale Y Z quadr. --- Z B quadr.

B † Z

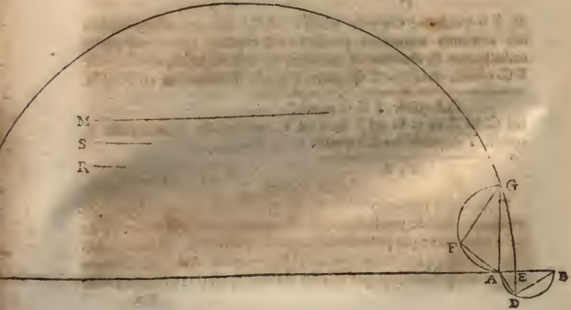
Hinc Canon.

Cape duos numeros vt libuerit & quadratum minoris diuide per maiorem, deinde productum prioris termini rationis in maiorem ex acceptis, diuide per poſteriorem terminum rationis. Tùm ex ſolido ſub poſteriori quotiente in quadratũ prioris quotientis, tolle ſolidum ſub priori quotiente in quadratum maioris accepti: reſiduum diuide

per maiorem acceptum priori quotiente auctum, & habebis quadratum tertij quæſiti, duobus acceptis exiſtentibus primo & ſecundo. Vnde quartus non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data linea diuidenda M, & ratio C A ad A B, ſuper A B poſteriori termino rationis, fiat ſemicirculus in quo inſcribatur A D ad libitum, & ponatur D E perpendicularis ad A B. Tùm ſuper C E fiat ſemicirculus ad cuius peripheriam erigatur A G perpendicularis ad C A, & ſuper A G deſcripto ſemicirculo, inſcribatur A F æqualis A B, nectatur F G. Deinde fiat vt B A plus A E ad A E, ita quadratum F G ad quadratum R. (Aduerte ita res debere diſponi vt R ſit maior A D) denique fiat vt A D ad A B ita R ad S. Dico quatuor iſtas poſtremas proportionales eſſe lineas quorum quadrata habent proportionem datam, & ſi fiat vt ſumma illarum ad ſingulas, ita M ad alias, ſectam illam fore vt poſcitur. Nam cum ſit vt A B plus A E ad A E ita quadratum F G ad quadratum R, erit diuidendo vt A B ad A E ita quadratum F G minus quadrato minus quadrato R ad quadratum R. Sed eſt vt B A ad A E ita quadratum A B ad quadratum A E (per 8 & 19 ſexti) ergo eſt vt quadratum A B ad quadratum A D ita quadratum F G



minus quadrato R ad quadratum R. Quoniam verò factum eſt vt A D ad A B ita R ad S, erit quoque vt quadratum A D ad quadratum A B ita quadratum R ad quadratum S, & inuertendo vt quadratum A B ad quadratum A D ita quadratum S ad quadratum R, igitur quià iam oſtenſum eſt eſſe vt quadratum A B ad quadratum A D ita quadratum F G minus quadrato R ad quadratum R, erit quadratum F G minus quadrato R æquale quadrato S, & ita quadratum F G æquabitur quadratis R & S. Sed eſt vt B A ad A C ita (propter eamdem altitudinem A E) rectangulum B A E ad rectangulum E A C eſt autem (per 8 ſexti) rectangulum B A E æquale quadrato A D, & rectangulum E A C æquale quadrato A G ergo vt A B ad A C ita quadratum A D ad quadratum A G. Et inuertendo vt A C ad B A ita quadratum A G ad quadratum A D. Sed quadratum A G per 31 tertij & 47 primi) æquatur quadratis A F & F G, igitur quoniam iam probatum eſt quadratum F G æquari quadratis R & S, & eſt F A æqualis A B, erunt tria quadrata R, S, A B ad quadratum A D in ratione data C A ad A B. Ac proinde cum factum ſit vt ſumma illarum ad ſingulos ita M ad alias, erit per 22 ſexti, vt quadrata trium maiorum ad quadratum minus ita A C ad A B. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Ex duabus poſterioribus propoſitionibus ſolui poteſt iſtud problema: data ratione ſummæ quadratorum ex quatuor diſcretè proportionalibus, ad quadratum maioris vel minoris vel ad quadrata trium maiorum vel trium minorum inuenire quatuor proportionales: nam diuidendo, dabitur eadem ratio, quæ hic data fuit.

Propositio XXIII.

Inuenire tres quantitates proportionales inæquales, quæ cum alia quacumque data faciant quadrilaterum ſemi-circulo inſcriptibile.

ESto datus numerus 16 pro diametro circuli A C B, & oporteat inuenire alios tres numeros proportionales qui cum priori faciant latera quadrilateri ſemicirculo inſcirptibiles. Cape pro medio illorum trium 4 (poſſent alij numeri eligi, vt facile quilibet perſe

inuenire poterit, ſi capiatur ſemiſſis diametri tria latera quæſita erunt æqualia ſed hunc caſum excluſimus poſtulando tres lineas inæquales, quarum media propter hoc debebit eſſe minor ſemiſſe diametri) & poſito minori 1R fiat vt 1R ad 4 ita 4 ad aliud habebiturque major trium numerorum $\frac{16}{1R}$. ſit itaque in figura infra poſita BD 4, CD 1R, & AC $\frac{16}{1R}$. ergo ſi de quadrato AB quod eſt 256 tollas quadratum BD 16, reſtabit quadratum AD 240 & linea AD ℞ 240. ſimiliter & propter eamdem rationem, ſi de quadrato AB 256 tollas quadratum AC $\frac{256}{1Q}$ fiet linea BC ℞ $\left(\frac{256Q - 256}{1Q}\right)$ At ex ptolemæo l. 1. c. 9. almag. ſi quadrilaterum inſcriptum fuerit circulo rectangulū ſub eius diagonalibus, æquale eſt duobus rectangulis, quæ fiunt ſub oppoſitis quadrilateri inſcripti lateribus, ergo productus BC in AD ℞ $\left(\frac{61440Q - 61440}{1Q}\right)$ æquabitur $\frac{16Q \dagger 64}{1Q}$. (talis eſt enim ſūma rectangulorū ex AB in CD, & ex AC in BD) igitur eorum quadrata $\frac{61440Q - 61440}{1Q}$ & $\frac{256QQ \dagger 4096 \dagger 2048Q}{1Q}$ erunt æqualia. Ac proinde poſt debitam metatheſim & diuiſionem, 1QQ fiet æquale 232Q -- 256. ergo 1R ſeu minima omnium linearum CD erit ℞ 66 -- ℞ 50, maxima autem AC eſt ℞ 66 -- ℞ 50, media BD 4, & diameter AB 16.

Per Algebram ſpecioſam, dato maximo latere quadrilatere B, & aſſumpto medio latere C, ponatur pro minimo latere A, ergo maximum latus inſcriptum erit $\frac{C\ quadr.}{A}$ rectangulum ex B in A

eſt

minus quadrato R ad quadratum R. Quoniam verò factum eſt vt A D ad A B ita R ad S, erit quoque vt quadratum A D ad quadratum A B ita quadratum R ad quadratum S, & inuertendo vt quadratum A B ad quadratum A D ita quadratum S ad quadratum R, igitur quià iam oſtenſum eſt eſſe vt quadratum A B ad quadratum A D ita quadratum F G minus quadrato R ad quadratum R, erit quadratum F G minus quadrato R æquale quadrato S, & ita quadratum F G æquabitur quadratis R & S. Sed eſt vt B A ad A C ita (propter eamdem altitudinem A E) rectangulum B A E ad rectangulum E A C eſt autem (per 8 ſexti) rectangulum B A E æquale quadrato A D, & rectangulum E A C æquale quadrato A G ergo vt A B ad A C ita quadratum A D ad quadratum A G. Et inuertendo vt A C ad B A ita quadratum A G ad quadratum A D. Sed quadratum A G per 31 tertij & 47 primi) æquatur quadratis A F & F G, igitur quoniam iam probatum eſt quadratum F G æquari quadratis R & S, & eſt F A æqualis A B, erunt tria quadrata R, S, A B ad quadratum A D in ratione data C A ad A B. Ac proinde cum factum ſit vt ſumma illarum ad ſingulos ita M ad alias, erit per 22 ſexti, vt quadrata trium maiorum ad quadratum minus ita A C ad A B. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Ex duabus poſterioribus propoſitionibus ſolui poteſt iſtud problema: data ratione ſummæ quadratorum ex quatuor diſcretè proportionalibus, ad quadratum maioris vel minoris vel ad quadrata trium maiorum vel trium minorum inuenire quatuor proportionales: nam diuidendo, dabitur eadem ratio, quæ hic data fuit.

PROPOSITIO XXIII.

Inuenire tres quantitates proportionales inæquales, quæ cum aliqua cumque data faciant quadrilaterum ſemi-circulo inſcriptibile.

ESto datus numerus 16 pro diametro circuli A C B, & oporteat inuenire alios tres numeros proportionales qui cum priori faciant latera quadrilateri ſemicirculo inſcirptibiles. Cape pro medio illorum trium 4 (poſſent alij numeri eligi, vt facile quilibet perſe

inuenire poterit, ſi capiatur ſemiſſis diametri tria latera quæſita erunt æqualia ſed hunc caſum excluſimus poſtulando tres lineas inæquales, quarum media propter hoc debebit eſſe minor ſemiſſe diametri) & poſito minori 1 R fiat vt 1 R ad 4 ita 4 ad aliud habebiturque maior trium numerorum $\frac{16.}{1R}$ ſit itaque in figura infra poſita BD 4, CD 1R, & AC $\frac{16.}{1R}$ ergo ſi de quadrato AB quod eſt 256 tollas quadratum BD 16, reſtabit quadratum AD 240 & linea AD ℞ 240. ſimiliter & propter eamdem rationem, ſi de quadrato AB 256 tollas quadratum AC $\frac{256}{1Q}$ fiet linea BC ℞ ($\frac{256Q - 256}{1Q}$) At ex ptolemæo l. 1. c. 9. almag. ſi quadrilaterum inſcriptum fuerit circulo rectangulũ ſub eius diagonalibus, æquale eſt duobus rectangulis, quæ fiunt ſub oppoſitis quadrilateri inſcripti lateribus, ergo productus BC in AD ℞ ($\frac{61440Q - 61440}{1Q}$) æquabitur $\frac{16Q + 64}{1Q}$. (talis eſt enim ſũma rectangulorũ ex AB in CD, & ex AC in BD) igitur eorum quadrata $\frac{61440Q - 61440}{1Q}$ & $\frac{256QQ + 4096 + 2048Q}{1Q}$ erunt æqualia. Ac proinde poſt debitam metatheſim & diuiſionem, 1QQ fiet æquale 232Q - 256. ergo 1 R ſeu minima omnium linearum CD erit ℞ 66 - ℞ 50, maxima autem AC eſt ℞ 66 - ℞ 50, media BD 4, & diameter AB 16.

Per Algebram ſpecioſam, dato maximo latere quadrilatere B, & aſſumpto medio latere C, ponatur pro minimo latere A, ergo maximum latus inſcriptum erit C quadr. $\frac{\text{rectangulum ex B in A}}{A}$

eſt

eſt A B. Rectangulum ex aliis Duobus lateribus eſt $\frac{\text{C cub.}}{\text{A}}$ hæc duo æquari debent rectangulo ſub diagonalibus ſeu ℞ (A quadr. B quadr. quadr. † C quadr. quadr. quadr. -- B quadr. C quadr. quadr. --- A quadr. B quadr. C quadr.) diuiſibilibus per A quadr. igitur erit æquatio inter horum duorum æqualium quadrata. Et quia ille quadrata habent eundem denominatorem nempe A Q. Illorum numeratores erunt inter ſe æquales. Et tandem poſt reductionem ac diuiſionem fiet A quadr. quadratum æquale A quadr. B quadr. quadr. † C quadr. quadr. quadr. --- B quadr. C quadr. quadr. --- A quadr. B quadr. C quadr. --- C cub. cub. --- 2 B A quadr. C cub. diuiſibilibus per B quadr.

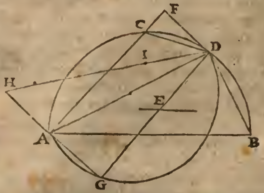
Hinc Canon.

Ex quadrato diametri datæ tolle quadratum quadratis diametri, reſiduum multiplica per quadratum diametri, atque ex hoc producto aufer duplum productum ex cubo quadrantis diametri in diametrum : hoc reliquum diuide per quadratum diametri : quotientis cape demidium, & huius dimidij quadrato detrahe quadrato quadratum quadrantis diametri, reſidui radix quadrata ſupradicto detracta & addita dimidio, dabit quadrata minoris & maioris lateris inſcribendi. Quod dixi de quadrante diametri dici poteſt de innumeris aliis partibus, vt ſpeculanti patebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit ſemicirculus A C B in quo oporteat inſcribere tres lineas A C, B D, D C continuè proportionales, Lubet in ſolutione iſtius problematis vti methodo analytica, quæ Pappo Alexandrinò familiaris eſt. Factum iam ſit & habeantur tres iſtæ lineæ A C, B D, D C pro continuè proportionalibus : & producatur A C, cadatque D F perpendiculariter in ipſam. Ergo rectangulum A C D æquatur quadrato B D. Sed rectangulum A C D ad rectangulum A C F, propter eamdem altitudinem A C eſt vt C D ad C F. Ergo quadratum B D ad rectangulum A C F erit vt C D ad C F. At triangula D C F & A B D ſunt æquiangula, ſiquidem quadrilateri A C D B anguli oppoſiti C & B ſunt æquales duobus rectis (per 22 tertij) itéque duo anguli A C D & F C D duobus recti ſunt æquale (per 14 primi) ergo angulo communi A C D , reſtabit angulus A B D

æqualis angulo DCF. Sed angulus F rectus eſt, ſicut & angulus D, qui eſt in ſemicirculo. Igitur reliquus angulus CDF reliquo angulo BAD eſt æqualis. Et propterea triangula ABD & DCF ſunt æquiangula. Ergo vt DC ad CF ita AB ad BD ſed iam probatum eſt eſſe vt CD ad DF ita quadratum BD ad rectangulum ACF. Igitur vt AB ad BD ita quadratum BD ad rectangulum ACF. At rectangulum ACF eſt ſemiſſis interualli quo quadratum AB ſuperat trià quadrata BD, DC, CD, etenim quadratum AB (per 47 primi) æquatur quadratis AD & DB, quadratum autem AD (per 12 ſecundi) eſt æquale quadratis AC & CD & duplo rectanguli ACF.



Ergo quadratum AB ſuperat quadrata AC, CD, BD duplo rectanguli ACF ac proinde rectangulum ACF eſt ſemiſſis interualli quo quadratum AB ſuperat trià quadrata BD, DC, CA. Igitur vt AB ad BD, ita quadratum BD ad ſemiſſem iſtius interualli.

Itaque per analyſim fiat vt AB ad BD, (quæ accipiatur promedia ad libitum, modo ſit minor ſemiſſe diametri) ita quadratum BD ad E quadratum, eritque E quadratum æquale ſemiſſi interualli quo AB ſuperat quadrata inſcriptarum trium proportionalium. Deinde ſumatur AG poteſtate dupla E & in ſemicirculo ſuper AD deſcripto inſcribatur, nectaturque GD: cum AD quadratum æquetur quadratis minoris & maioris inſcriptæ cum duplo prædicti interualli, cumque idem quadratum AD æquetur quadratis AG & GD, cumque AG quadratum ſit æquale duplo prædicti interualli, erit quadratum GD æquale quadratis minoris & maioris inſcriptæ. Præterea ſumatur GH poteſtate dupla BD, & nectatur HD, erit HD æqualis ſummæ minoris & maioris inſcriptæ, quia ſummæ iſtius ex maiori & minori inſcriptæ quadratum æquatur (per 4 ſecundi) quadratis à minori & maiori inſcripta &

eſt A B. Rectangulum ex aliis Duobus lateribus eſt $\frac{C\ cub.}{A}$ hæc duo æquari debent rectangulo ſub diagonalibus ſeu ℞ (A quadr. B quadr. quadr. † C quadr. quadr. quadr. --- B quadr. C quadr quadr. --- A quadr. B quadr. C quadr.) diuiſibilibus per A quadr. igitur erit æquatio inter horum duorum æqualium quadrata. Et quia illę quadrata habent eundem denominatorem nempe A Q. Illorum numeratores erunt inter ſe æquales. Et tandem poſt reductionem ac diuiſionem fiet A quadr. quadratum æquale A quadr. B quadr. quadr. † C quadr. quadr. quadr. --- B quadr. C quadr. quadr. --- A quadr. B quadr. C quadr. --- C cub. cub. --- 2 BA- quadr. C cub. diuiſibilibus per B quadr.

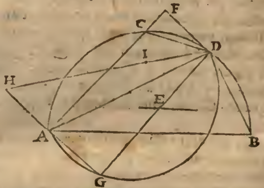
Hinc Canon.

Ex quadrato diametri datæ tolle quadratum quadratis diametri, reſiduum multiplica per quadratum diametri, atque ex hoc producto aufer duplum productum ex cubo quadrantis diametri in diametrum: hoc reliquum diuide per quadratum diametri: quotientis cape demidium, & huius dimidij quadrato detrahe quadrato quadratum quadrantis diametri, reſidui radix quadrata ſupradicto detracta & addita dimidio, dabit quadrata minoris & maioris lateris inſcribendi. Quod dixi de quadrante diametri dici poteſt de innumeris aliis partibus, vt ſpeculanti patebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit ſemicirculus A C B in quo oporteat inſcribere tres lineas A C, B D, D C continuè proportionales, Lubet in ſolutione iſtius problematis vti methodo analytica, quæ Pappo Alexandrinò familiaris eſt. Factum iam ſit & habeantur tres iſtæ lineæ A C, B D, D C pro continuè proportionalibus: & producatur A C, cadatque D F perpendiculariter in ipſam. Ergo rectangulur A C D æquatur quadrato B D. Sed rectangulum A C D ad rectangulum A C F, propter eamdem altitudinem A C eſt vt C D ad C F. Ergo quadratum B D ad rectangulum A C F erit vt C D ad C F. At triangula D C F & A B D ſunt æquiangula, ſiquidem quadrilateri A C D B anguli oppoſiti C & B ſunt æquales duobus rectis (per 22 tertij) itéque duo anguli A C D & F C D duobus resti ſunt æquales (per 14 primi) ergo angulo communi A C D . reſtabit angulus A B D

æqualis angulo DCF. Sed angulus F rectus eſt, ſicut & angulus D, qui eſt in ſemicirculo. Igitur reliquus angulus CDF reliquo angulo BAD eſt æqualis. Et propterea triangula ABD & DCF ſunt æquiangula. Ergo vt DC ad CF ita AB ad BD ſed iam probatum eſt eſſe vt CD ad DF ita quadratum BD ad rectangulum ACF. Igitur vt AB ad BD ita quadratum BD ad rectangulum ACF. At rectangulum ACF eſt ſemiſſis interualli quo quadratum AB ſuperat triá quadrata BD, DC, CD, etenim quadratum AB (per 47 primi) æquatur quadratis AD & DB, quadratum autem AD (per 12 ſecundi) eſt æquale quadratis AC & CD & duplo rectanguli ACF. Ergo quadratum AB ſuperat quadrata AC, CD, BD duplo rectanguli ACF ac proinde rectangulum ACF eſt ſemiſſis interualli quo quadratum AB ſuperat triá quadrata BD, DC, CA. Igitur vt AB ad BD, ita quadratum BD ad ſemiſſem iſtius interualli.



Itaque per analyſim fiat vt AB ad BD, (quæ accipiatur promediâ ad libitum, modo ſit minor ſemiſſe diametri) ita quadratum BD ad E quadratum, eritque E quadratum æquale ſemiſſi interualli quo AB ſuperat quadrata inſcriptarum trium proportionalium. Deinde ſumatur AG poteſtate dupla E & in ſemicirculo ſuper AD deſcripto inſcribatur, nectaturque GD: cum AD quadratum æquetur quadratis minoris & maioris inſcriptæ cum duplo prædicti interualli, cumque idem quadratum AD æquetur quadratis AG & GD, cumque AG quadratum ſit æquale duplo prædicti interualli, erit quadratum GD æquale quadratis minoris & maioris inſcriptæ. Præterea ſumatur GH poteſtate dupla BD, & nectatur HD, erit HD æqualis ſummæ minoris & maioris inſcriptæ, quia ſummæ iſtius ex maiori & minori inſcriptæ quadratum æquatur (per 4 ſecundi) quadratis à minori & maiori inſcripta &

duplo rectanguli ſub maiori & minori inſcripta: ſed duplum illius rectanguli (per 17 ſexti æquatur duplo quadrato mediæ B D. Ergo cum G D quadratum ſit æquale quadratis duarum illarum inſcriptarum, cumque G H poteſtate ſit dupla B D, erit H D ſumma maioris & minoris inſcriptæ. Tum (per 27 primi huius) ſecetur H D in I taliter H I & I D quadrata ſint æqualià quadrato G D, erit maior inſcripta H I & minor I D, nam quadratum H D ſummæ maioris & minoris inſcriptæ æquatur quadratis maioris & minoris inſcriptæ & duplo rectanguli ſub illis duabus inſcriptis: ſed quadratum G D æquatur quadratis illarum duarum inſcriptarum, & aliunde quadrata H I, & I D æquatur quadratis G D, ergo rectangulum H I D æquatur quadrato B D. Denique Inſcribatur A C æqualis H I & nectatur C D, rectangulum H I D æquatur rectangulo ſub inſcriptis, ſed inſcriptæ ſunt A C & C D, & H I æqualis eſt A C: ergo C D æqualis I D. Ac proinde cum B D ſit medià proportionalis inter H I & I D erit quoque media proportionalis inter A C & C D. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Sit fuerint tres lineæ ſemi--circulo exactæ inſcriptæ, cubus mediæ diuiſus per diametrum, ex hibebit ſemiſſem interualli quo quadratum diametri ſuperat trià quadrata inſcriptarum. Quod ſi tres inſcriptæ proportionales non fuerint, ſolidum ſub illis diuiſum per eamdem diametrum, dabit eamdem interualli ſemiſſem.

Propositio XXIIII.

Inſcribere ſemicirculo quadrilaterum, cuius quatuor latera ſint diſcretè proportionalià in data ratione.

Sit data ratio 7 ad 3 & oporteat inuenire quatuor numeros diſcretè proportionales, qui repræſentent lineas quadrilateri ſemicirculo inſcriptibilis. Sumatur maior terminus rationis datæ 7 pro diametro & alter terminus 3 pro vno ex alteribus, ponaturque minimum latus ex quæſitis 1 R. Ergo ſi 1 R multiplices permaximum latus 7, ſint 7 R æquales producto ſub duobus aliis lateri-

bus. Igitur cum vnum ex his lateribus ſit 3, erit alterum $\frac{7R}{3}$. Ac proinde ſi per corollarium præcedens ex 49 quadrato diametri 7, tollantur quadrata trium laterum inuentorum reſidui dimidium $\frac{180 - 29Q}{9}$ æquatur quotienti qui fit diuidendo ſolidum ſub tribus lateribus inſcriptis per diametrum: hic autem quotiens eſt 1 Q. Igitur eſt æquatio inter illa duo, & fit 1 R æqualis ℞ $\frac{90}{19}$. & alterum latus erit ℞ $\frac{490}{19}$. Probatur autem eſſe latera quadrilateri ſemicirculo inſcriptibilis, quia productus ſub diagonalibus ℞ $\frac{17640}{19}$ æquatur duobus productis ſub oppoſitis lateribus.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ponatur A pro quarto latere & ſumantur B C pro duobus prioribus lateribus, ſitque B diameter. Ergo tertium latus erit $\frac{AB}{C}$. Si igitur ex quadrato B tollantur reliquo tria latera, reſidui dimidium Cquadr. Bquadr. --- Cquadr. quadr. --- C quadr. A quadr. ---- A quadr. B quadr. diuiſibilia per 2 C quadr. æquabitur A quadr. quod eſt ſolidum ſub tribus lateribus inſcriptis. Diuiſum per diametrum B. Ac tandem poſt debitam reductionem A quadratum æquale eſt

$$\frac{\text{C quadr. B quadr.} - \text{C quadr. quadr.}}{\text{B quadr.} + 3\ \text{C quadr.}}$$

Hinc Canon.

Differentiam quadratorum à duobus terminis rationis datæ duc in quadratum minoris termini: hoc plano-planum diuide per quadratum maioris termini auctum triplo minoris termini quadrato, fietque quadratum quartæ quantitatis quæſitæ, prima & ſecunda exiſtentibus, duobus terminis rationis datæ. Vnde tertia non latebit.

Hinc

duplo rectanguli ſub maiori & minori inſcripta: ſed duplum illius rectanguli (per 17 ſexti æquatur duplo quadrato mediæ B D. Ergo cum G D quadratum ſit æquale quadratis duarum illarum inſcriptarum, cumque G H poteſtate ſit dupla B D, erit H D ſumma maioris & minoris inſcriptæ. Tum (per 27 primi huius) ſecetur H D in I taliter H I & I D quadrata ſint æqualià quadrato G D, erit maior inſcripta H I & minor I D, nam quadratum H D ſummæ maioris & minoris inſcriptæ æquatur quadratis maioris & minoris inſcriptæ & duplo rectanguli ſub illis duabus inſcriptis: ſed quadratum G D æquatur quadratis illarum duarum inſcriptarum, & aliunde quadrata H I, & I D æquatur quadratis G D, ergo rectangulum H I D æquatur quadrato B D. Denique Inſcribatur A C æqualis H I & nectatur C D, rectangulum H I D æquatur rectangulo ſub inſcriptis, ſed inſcriptæ ſunt A C & C D, & H I æqualis eſt A C; ergo C D æqualis I D. Ac proinde cum B D ſit medià proportionalis inter H I & I D erit quoque media proportionalis inter A C & C D. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Sit fuerint tres lineæ ſemi-circulo exactæ inſcriptæ, cubus mediæ diuiſus per diametrum, ex hibebit ſemiſſem interualli quo quadratum diametri ſuperat trià quadrata inſcriptarum. Quod ſi tres inſcriptæ proportionales non fuerint, ſolidum ſub illis diuiſum per eamdem diametrum, dabit eamdem interualli ſemiſſem.

Propositio XXIIII.

Inſcribere ſemicirculo quadrilaterum, cuius quatuor latera ſint diſcretè proportionalià in data ratione.

SIt data ratio 7 ad 3 & oporteat inuenire quatuor numeros diſcretè proportionales, qui repræſentent lineas quadrilateri ſemicirculo inſcripribilis. Sumatur maior terminus rationis datæ 7 pro diametro & alter terminus 3 pro vno ex alteribus, ponaturque minimum latus ex quæſitis 1 R. Ergo ſi 1 R multiplices permaximum latus 7, ſint 7 R æquales producto ſub duobus aliis lateri-

bus. Igitur cum vnum ex his lateribus ſit 3, erit alterum $\frac{7R.}{3}$ Ac proinde ſi per corollarium præcedens ex 49 quadrato diametri 7, tollantur quadrata trium laterum inuentorum reſidui dimidium $\frac{180 --- 29Q}{9}$ æquatur quotienti qui fit diuidendo ſolidum ſub tribus lateribus inſcriptis per diametrum: hic autem quotiens eſt I Q. Igitur eſt æquatio inter illa duo, & fit I R æqualis ℞ $\frac{90.}{19}$ & alterum latus erit ℞ $\frac{490.}{19}$ Probatur autem eſſe latera quadrilateri ſemicirculo inſcriptibilis, quia productus ſub diagonalibus ℞ $\frac{17640}{19}$ æquatur duobus productis ſub oppoſitis lateribus.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ponatur A pro quarto latere & ſumantur B C pro duobus prioribus lateribus, ſitque B diameter. Ergo tertium latus erit $\frac{A\,B.}{C}$ Si igitur ex quadrato B tollantur reliquo tria latera, reſidui dimidium Cquadr. Bquadr. ---- Cquadr. quadr. ----C quadr. A quadr. ---- A quadr. Bquadr. diuiſibilia per 2 Cquadr. æquabitur A quadr. quod eſt ſolidum ſub tribus lateribus inſcriptis. Diuiſum per diametrum B. Ac tandem poſt debitam reductionem A quadratum æquale eſt $\frac{\text{Cquadr. Bquadr.---C quadr. quadr.}}{\text{B quadr. † 3 C quadr.}}$

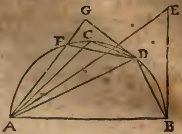
Hinc Canon.

Differentiam quadratorum à duobus terminis rationis datæ duc in quadratum minoris termini: hoc plano-planum diuide per quadratum maioris termini auctum triplo minoris termini quadrato, fietque quadratum quartæ quantitatis quæſitæ, prima & ſecunda exiſtentibus ; duobus terminis rationis datæ. Vnde tertia non latebit.

Hinc

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B D, & deſcripto ſuper maiore A B ſemicirculo, inſcribatur B D, accipiaturque B E potens triplum quadratum B D, & ſit B E perpendicularis A B, nectanturque A D & A E. Tum fiat vt A E ad B D ita A D ad D C & ducatur A C. Dico quadrilaterum quæſitum A B D C, foreque A C ad C D vt A B ad B D. Non enim eſt aliud punctum in peripheria circuli præter C ad quod ductæ duæ



lineæ ex A & D ſint in ratione A B ad B D: nam ſit (ſi fieri poteſt) punctum F & A F ad F D habeat rationem A B ad B D, & protrahatur A F & ducatur D G ipſi A F protractæ perpendicularis. Quoniam ergo A B D F (per 22 tertij) anguli oppoſiti F & B æquantur duobus rectis, itemque (per 14 primi) anguli A F D & D F G ſunt duobus rectis æquales: dempto communi angulo A F D, reſtabit angulus A B D æqualis angulo D F G. Igitur triangula A B D & F G D ſunt æquiangula (ſunt enim in duobus illis triangulis G & D anguli recti) ergo vt A B ad B D ita D F ad F G, igitur ſi ſit vt A B ad B D ita A F ad F D, erit vt A F ad F D, ita F D ad F G, & obid (per 17 ſexti) rectangulum A F G æquabitur quadrato F D. Ac proinde (per 9 quinti) vt quadratum A F ad quadratum F D, ita quadratum A F ad rectangulum A F G. Cum itaque ſit vt A B ad B D ita A F ad F D, erit etiam (per 22 ſexti) vt quadratum A B ad quadratum B D ita quadratum A F ad quadeatum E D. Ergo componendo ter vt A B quadratum plus triplo quadrato B D (hoc eſt ex conſtructione vt quadratum A E) ad quadratum B D ita quadratum A F plus triplo quadrato F C, Sed quadratum A F plus triplo quadrato F D æquatur A F quadrato, F D quadrato & duplo rectangulo A F G. A F autem quadratum plus quadrato F D plus duplo rectangulo A F G, eſt æquale (per 12 ſecundi) quadrato A D. Ergo vt quadratum A E ad quadratum B D ita quadratum A D ad quadratum D F. Sed factum eſt ex conſtructione, vt A E ad B D ita A D ad D, proindeque erit vt A E quadratum ad B D quadratum ita A D quadratum ad D C

quadratum. Igitur vt quadratum A D ad quadratum D C: ita quadratum A D ad quadratum D F. Et ita (per 9 quinti) quadratum D C æquabitur quadrato D F. Pars toti, quod eſt abſurdum. Non Igitur ſumi poteſt punctum inter A & C ita vt duæ lineæ ad illud ductæ ſint in ratione A B ad B D. Sed neque etiam poteſt ſumi inter C & D : quia ſimili plane diſcurſu, ſequeretur totum eſſe æquale parti. Igitur vnicum eſt punctum C ad quod duæ lineæ ductæ A C & C D ſint in ratione A B ad B D quod erat demonſtrandum.

Scholium.

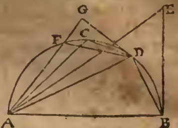
Occaſione eorum quæ dicta ſunt de quadrilatero lubet hic ſoluere tria non inelegantiã problemata quæ circa illud proponi poſſunt.

Perblema Primum. Datis lateribus quadrilateri & proportione diagonalium, inuenire ipſas diagonales & diametrum circuli in quo quadrilaterum inſcribi poteſt. Sint latera A B 34020, B C 22113, C D 14175, A D 29484, ratio vero diagonalium 8 ad 9. ponatur vna diagonalis 1 R ergo altera erit $\frac{9R}{8}$ horum productus $\frac{9Q}{8}$ æquari debet ſummæ productorum ex oppoſitis lateribus, per ſupradictum Ptolemæi theorema. Hæc autem ſumma eſt 1134213192. ac proinde illa erit æqualis $\frac{9Q}{8}$ ergo 1 R ſiuè vna diagonalis erit B D 31752 & altera 35721 A C.

Ex his diametrũ circuli E B ſic inuenies ponatur E B 1 R, ductiſque A E & E C erit quadratum B E. æquale quadratis A B & A E, eſt autẽ A B nota 34020. igitur A E erit ℞ (1 Q -- 1157360400) ſimiliter & propter eamdem rationem quia quadratum B E eſt æquale quadratis B C & E C, & iam nota eſt B C 22113, erit E C ℞ (1 Q --- 488984769) ergo in quadrilatero A B C E productus ex diagonalibus 35721 R erit æqualis ſummæ productorum ex A E

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A B ad B D; & deſcripto ſuper maiore A B ſemicirculo, inſcribatur B D, accipiaturque B E potens triplum quadratum B D, & ſit B E perpendicularis A B, nectanturque A D & A E. Tum fiat vt A E ad B D ita A D ad D C & ducatur A C. Dico quadrilaterum quæſitum A B D C, foreque A C ad C D vt A B ad B D. Non enim eſt aliud punctum in peripheria circuli præter C ad quod ductæ duæ



lineæ ex A & D ſint in ratione A B ad B D; nam ſit (ſi fieri poteſt) punctum F & A F ad F D habeat rationem A B ad B D, & protrahatur A F & ducatur D G ipſi A F protractæ perpendicularis. Quoniam ergo A B D F (per 22 tertij) anguli oppoſiti F & B æquantur duobus rectis, itemque (per 14 primi) anguli A F D & D F G ſunt duobus rectis æquales: dempto communi angulo A F D, reſtabit angulus A B D æqualis angulo D F G. Igitur triangula A B D & F G D ſunt æquiangula (ſunt enim in duobus illis triangulis G & D anguli recti) ergo vt A B ad B D ita D F ad F G, igitur ſi ſit vt A B ad B D ita A F ad F D, erit vt A F ad F D, ita F D ad F G, & obid (per 17 ſexti) rectangulum A F G æquabitur quadrato F D. Ac proinde (per 9 quinti) vt quadratum A F ad quadratum F D, ita quadratum A F ad rectangulum A F G. Cum itaque ſit vt A B ad B D ita A F ad F D, erit etiam (per 22 ſexti) vt quadratum A B ad quadratum B D ita quadratum A F ad quadratum F D. Ergo componendo ter vt A B quadratum plus triplo quadrato B D (hoc eſt ex conſtructione vt quadratum A E) ad quadratum B D ita quadratum A F plus triplo quadrato F C. Sed quadratum A F plus triplo quadrato F D æquatur A F quadrato, F D quadrato & duplo rectangulo A F G. A F autem quadratum plus quadrato F D plus duplo rectangulo A F G, eſt æquale (per 12 ſecundi) quadrato A D. Ergo vt quadratum A E ad quadratum B D ita quadratum A D ad quadratum D F. Sed factum eſt ex conſtructione, vt A E ad B D ita A D ad D, proindeque erit vt A E quadratum ad B D quadratum ita A D quadratum ad D C

quadratum. Igitur vt quadratum A D ad quadratum D C: ita quadratum A D ad quadratum D F. Et ita (per 9 quinti) quadratum D C æquabitur quadrato D F. Pars toti, quod eſt abſurdum. Non Igitur ſumi poteſt punctum inter A & C ita vt duæ lineæ ad illud ductæ ſint in ratione A B ad B D. Sed neque etiam poteſt ſumi inter C & D: quia ſimili plane diſcurſu, ſequeretur totum eſſe æquale parti. Igitur vnicum eſt punctum C ad quod duæ lineæ ductæ A C & C D ſint in ratione A B ad B D quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Occaſione eorum quæ dicta ſunt de quadrilatero lubet hic ſoluere tria non inelegantià problemata quæ circa illud proponi poſſunt.

Perblema Primum. Datis lateribus quadrilateri & proportione diagonalium, inuenire ipſas diagonales & diametrum circuli in quo quadrilaterum inſcribi poteſt. Sint latera A B 34020, B C 22113, C D 14175, A D 29484, ratio vero diagonalium 8 ad 9. ponatur vna diagonalis 1 R ergo altera erit $\frac{9R}{8}$ horum productus $\frac{9Q}{8}$ æquari debet ſummæ productorum ex oppoſitis lateribus, per ſupradictum Ptolemæi theorema. Hæc autem ſumma eſt 1134213192. ac proinde illa erit æqualis $\frac{9Q}{8}$ ergo 1 R ſiuè vna diagonalis erit B D 31752 & altèra 35721 A C.

Ex his diametrū circuli E B ſic inuènies ponatur E B 1 R, ductiſque A E & E C erit quadratum B E. æquale quadratis A B & A E, eſt autē A B nota 34020. igitur A E erit ℞ (1 Q -- 1157360400) ſimiliter & propter eamdem rationem quia quadratum B E eſt æquale quadratis B C & E C, & iam nota eſt B C 22113, erit E C ℞ (1 Q -- 488984769) ergo in quadrilatero A B C E productus ex diagonalibus 35721 R erit æqualis ſummæ productorum ex A E



in BC & ex AB in EC igitur poſt varias metatheſes 1R ſeu EB erit 36855. EA autẽ eſt 14175 & EC 29484.

Problema ſecundum. Datis lateribus quadrilateri circulo inſcripti, & ſumma diagonalium, inuenire ſigillatim diagonales & inſuper diametrum circuli. Dentur latera vt in primo problemata, & ſumma diagonalium 67473. Ponatur autem vna diagonalis 1R ergo altera erit 67473.--1R. Harum productus eſt 67473R.--1Q æqualis duobus rectangulis laterum oppoſitorum 1134213192. ergo 1Q erit æquale 67473℞.--1134213192. & fit 1R æqualis 31752 vel 35721. taleſque erũt diagonales. Iam autem datis diagonalibus, diameter inuenietur vt ſupra 36855.

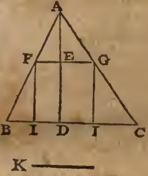
Problema Tertium, Datis lateribus quadrilateri circulo in ſcripti & differentia diagonalium, inuenire ſigillatim diagonales & circuli diametrum. Dentur latera vt in problemate primo, & differentià diagonalium 3969, ponatur vero 1R pro minori diagonali, ergo naior erit 1R † 3969 ac proinde 1Q † 3969R æquabitur 1134213192. igitur 1R ſiuè minor diagonalis eſt 31752, maior vero 35721. Iam verò datis diagonalibus inuenietur eadem diameter quę ſuprà.

PROPOSITIO XXV.

Datis trianguli lateribus, inuenire latus quadrati triangulo inſcriptibilis & illud inſcribere.

SInt data trianguli laterã AB 13, BC 14, CA 15, inquirẽda eſt primũ perpendicularis: nota autẽ quod ſi perpendicularis ab vno angulo demiſſà in baſim cadat extra, non poterit ſuper hanc baſim

impony latus quadrati, quod clarius eſt quam vt probari debeat. ponamus igitur perpendicularem A D cadere intra triangulum & ſit ſegmentum baſis B D I R. Igitur D C erit 14---I R Eſt autem quadratum A B æquale quadratis B D, & D A. Igitur ſi ex *169* quadrato A B tollatur I Q quadratum B D reſtabit *169*---I Q pro quadrato A D. Similiter quadratum A C æquatur quadratis A D & D C. ergo ſi ex 225 quadrato A C tollantur *196* † 28 R quadratū D C, relinquetur quadratum A D 19 † 28R---I Q. Ac



proinde *169*---I Q æquabuntur *29* † 28R---I Q. Igitur I R fit æqualis 5 & D C. Erit *9*. Hinc duobus modis inuenies A D vel tollendo 25 quadratum 5 de quadrato *169*, vel tollendo 81 quadratum *9* de quadrato 225, vtrobique enim fient 144 cuius radix 12 erit A D.

Inuenta perpendiculari A D ſic inuenietur. Latus quadrati. Ponatur enim illud latus F G ſeu A E I R. ergo A E erit eius dimidium 12--I R igitur ducendo illud dimidium in baſim F G, habebitur

2

area trianguli A F G 12R--I Q. ſimili ratione ducendo *6* dimidium

2

A D in baſim B C, habebitur area trianguli A B C 84. Quoniam autem triangula A F G & A B C ſunt æquiangula, erit vt triangulum A B C ad triangulum A F G ita quadratum B C ad quadratum F G quadratum vero R C eſt *196*, & quadratum F G eſt I Q. Ergo 2*96* ad I Q eſt vt 84 ad 12 R--I Q. Ergo productus ſub ex-

2

tremis 2352 R---1*96* Q æquabitur producto ſub mediis 84 Q. &

2

poſt

in BC & ex AB in EC igitur poſt varias metatheſes I R ſeu EB erit 36855. EA autẽ eſt 14175 & EC 29484.



Problema ſecundum. Datis lateribus quadrilateri circulo inſcripti, & ſumma diagonalium, inuenire ſigillatim diagonales & inſuper diametrum circuli. Dentur latera vt in primo problemata, & ſumma diagonalium 67473. Ponatur autem vna diagonalis I R ergo altera erit 67473--I R. Harum productus eſt 67473R--I Q æqualis duobus rectangulis laterum oppoſitorum 1134213192. ergo I Q erit æquale 67473-℞--1134213192. & fit I R æqualis 31752 vel 35721. taleſque erũt diagonales. Iam autem datis diagonalibus, diameter inuenietur vt ſupra 36855.

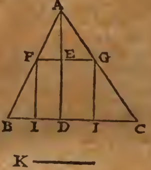
Problema Tertium, Datis lateribus quadrilateri circulo inſcripti & differentia diagonalium, inuenire ſigillatim diagonales & circuli diametrum. Dentur latera vt in problemate primo, & differentià diagonalium 3969, ponatur vero I R pro minori diagonali, ergo maior erit I R † 3969 ac proinde I Q † 3969R æquabitur 1134-213192. igitur I R ſiuè minor diagonalis eſt 31752, maior vero 35721. Iam verò datis diagonalibus inuenietur eadem diameter quę ſuprà.

Propositio XXV.

Datis trianguli lateribus, inuenire latus quadrati triangulo inſcriptibilis & illud inſcribere.

Sint data trianguli latera AB 13, BC 14, CA 15, inquirẽda eſt primũ perpendicularis: nota autẽ quod ſi perpendicularis ab vno angulo demiſſa in baſim cadat extra, non poterit ſuper hanc baſim

impony latus quadrati, quod clarius eſt quam vt probari debeat. ponamus igitur perpendicularem A D cadere intra triangulum & ſit ſegmentum baſis B D 1 R. Igitur D C erit 14---1 R Eſt autem quadratum A B æquale quadratis B D, & D A. Igitur ſi ex 169 quadrato A B tollatur 1Q quadratum B D reſtabit 169 --1 Q pro quadrato A D. Similiter quadratum A C æquatur quadratis A D & D C. ergo ſi ex 225 quadrato A C tollantur 196 † 28 R quadratũ D C, relinquetur quadratum A D 19 † 28R---1Q. Ac



proinde 169---1 Q æquabuntur 29 † 28R---1Q. Igitur 1 R ſit æqualis 5 & D C. Erit 9. Hinc duobus modis inuenies A D vel tollendo 25 quadratum 5 de quadrato 169, vel tollendo 81 quadratum 9 de quadrato 225, vtrobique enim fient 144 cuius radix 12 erit A D.

Inuenta perpendiculari A D ſic inuenietur. Latus quadrati. Ponatur enim illud latus F G ſeu A E 1 R. ergo A E erit eius dimidium $\frac{12\text{--}1R}{2}$ igitur ducendo illud dimidium in baſim F G, habebitur area trianguli A F G $\frac{12R\text{--}1Q}{2}$ ſimili ratione ducendo 6 dimidium A D in baſim B C, habebitur area trianguli A B C 84. Quoniam autem triangula A F G & A B C ſunt æquiangula, erit vt triangulum A B C ad triangulum A F G ita quadratum B C ad quadratum F G quadratum vero R C eſt 196, & quadratum F G eſt 1Q. Ergo 296 ad 1 Q eſt vt 84 ad $\frac{12R\text{--}1Q}{2}$. Ergo productus ſub extremis $\frac{2352R\text{---}196Q}{2}$ æquabitur producto ſub mediis 84 Q. & poſt

poſt debitam reductionem fit 1R æqualis $\frac{66}{13}$.

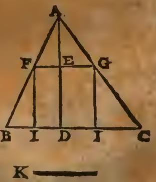
Per Algebram ſpecioſam datis B, C, D pro tribus lateribns, & F perpendiculare, ponatur A pro lattere quadrati, ergo A E erit FA, & eius dimidium $\frac{F-A}{2}$ ductum in A, dat $\frac{F-A}{2}$ A quadr. pro triangulo AFG. ſimiliter trangulum ABC erit FE, igitur vt FA---A quadr. ad FC, ita A quadr. ad C quadr. ac ideo productus ſub extremis FA C quadr.---C quadr. A quadr. æquatur producto ſub mediis FCA quadr. ergo A æquatur. $\frac{FC}{F+C}$

Hinc Canon.

Diuide planum ex perpendiculari in baſim per ſummã perpendicularis & baſeos, habebiſque latus quadrati quæſiti.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto triangulum ABC in quo oporteat inſcribere quadratum. fiat vt baſis BC plus perpendiculari AD ad BC ita AD. Ad K. Deinde vt BC ad K ita AC ad AG. Tùm ducatur GF parallela BC. Demittanturque GI & GI & FL perpendiculares ad BC. Dico FGIL eſſe quadratum inſcriptum. Cum enim ſit vt BC ad AG, ex conſtructione, cumque ſit ob æquianguleitatem triangulorum ABC & AFG, vt AC ad IG ita BC ad FG, erit quoque vt BC ad K ita BC ad FG, ergo K æquatur FG (per 9 quinti) deinde factum eſt vt BC plus AD ad BC, ita AD ad K igitur diuidendo vt AD ad BC ita AD minus Z ad K & permutando, vt AD ad AD minus K, ita BC ad K ſed iam probauinus eſſe vt BC ad K ita AC ad AG. Eſt vero vt AC ad AG ita AD ad AE: ergo vt AD



ad A E ita A D, ad A D minus K. Ac proinde A D minus K æquatur A E. Sed A D minus D E æquatur A E. Igitur D E æqualis eſt K. Sed K iam oſtenſa eſt æqualis F G, & D E æquatur F L & G I, quia parallelæ ſunt inter parallelas, ſicut F G æquatur L I propter eamdem rationem. Ergo quadrilateri F G I L quatuor latera F G, G I, I L, L F ſunt æqualia. Sed anguli recti ſunt, tum ex conſtructione, tum ex primaria proprietate parallelarum, ergo quadrilaterum F G I L eſt quadratum. quod erat & faciendum & demonſtrandum.

Scholium.

In triangulo æquilatero ſemiſſis lateris trianguli eſt latus quadrati inſcripti.

Propositio XXVI.

Triangulo dato inſcribere rectangulum, cuius latera habeant proportionem datam.

ESto triangulum A B C. cuius latera ſint 13, 14, 15, oporteat autem ipſi inſcribere rectangulum ſupra baſim B C, cuius latera circa rectum ſint vt 35 ad 12. Ponatur I R pro latere F E Tùm fiat vt 35 ad 12 ita I R ad aliud, quod erit $\frac{12R}{35}$. tale igitur erit latus F G. eſt vero vt B C 14 ad F E I R ita A C 15 ad A F. Ergo A F erit $\frac{15R}{14}$ quæ ſublata ab A C 15, relinquit F C $\frac{210-15R}{14}$. ſed vt A C ad F C ita A D ad F G. Igitur cum datis lateribus detur perpendicularis A D 12, erit F G $\frac{2520-180R}{210}$. proinde cum eadem F G ſit iam inuenta $\frac{12R}{35}$, erit æquatio inter illa duo. Et poſt debitem reductionem diuiſionemque, I R ſiue latus F E 10. ſi autem fiat vt 35 ad 12 ita 10 ad aliud, erit F G $3\frac{3}{7}$.

poſt debitam reductionem fit I R æqualis $\frac{66}{13}$.

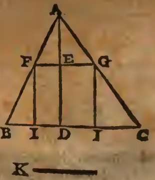
Per Algebram ſpeſioſam datis B, C, D pro tribus lateribus, & F perpendiculare, ponatur A pro lattere quadrati, ergo A E erit F A, & eius dimidium $\frac{F\text{--}A}{2}$ ductum in A, dat $\frac{F\text{--}A \text{ A quadr.}}{2}$ pro triangulo A F G. ſimiliter trangulum A B C erit F E, igitur vt F A---A quadr. ad F C, ita A quadr. ad C quadr. ac ideo productus ſub extremis F A C quadr.---C quadr. A quadr. æquatur producto ſub mediis F C A quadr. ergo A æquatur. $\frac{FC}{F+C}$

Hinc Canon.

Diuide planum ex perpendiculari in baſim per ſummã perpendicularis & baſeos, habebiſque latus quadrati quæſiti.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto triangulum A B C in quo oporteat inſcribere quadratum. fiat vt baſis B C plus perpendiculari A D ad B C ita A D. Ad K. Deinde vt B C ad K ita A C ad A G. Tùm ducatur G F parallela B C. Demittanturque G I & G I & F L perpendiculares ad B C. Dico F G I L eſſe quadratum inſcriptum. Cum enim ſit vt B C ad A G, ex conſtructione, cumque ſit ob æquianguleitatem triangulorum A B C & A F G, vt A C ad I G ita B C ad F G, erit quoque vt B C ad K ita B C ad F G, ergo K æquatur F G (per 9 quinti) deinde factum eſt vt B C plus A D ad B C, ita A D ad K igitur diuidendo vt A D ad B C ita A D minus Z ad K & permutando, vt A D ad A D minus K, ita B C ad K ſed iam probauimus eſſe vt B C ad K ita A C ad A G. Eſt vero vt A C ad A G ita A D ad A E: ergo vt AD



ad AE ita AD, ad AD minus K. Ac proinde AD minus K æquatur AE. Sed AD minus DE æquatur AE. Igitur DE æqualis eſt K. Sed K iam oſtenſa eſt æqualis FG, & DE æquatur FL & GI, quia parallelæ ſunt inter parallelas, ſicut FG æquatur LI propter eamdem rationem. Ergo quadrilateri FGIL quatuor latera FG, GI, IL, LF ſunt æqualia Sed anguli recti ſunt, tum ex conſtructione, tum ex primaria proprietate parallelarum, ergo quadrilaterum FGIL eſt quadratum. quod erat & faciendum & demonſtrandum.

Scholium.

In triangulo æquilatero ſemiſſis lateris trianguli eſt latus quadrati inſcripti.

Propositio XXVI.

Triangulo dato inſcribere rectangulum, cuius latera habeant proportionem datam.

ESto triangulum ABC, cuius latera ſint 13, 14, 15, oporteat autem ipſi inſcribere rectangulum ſupra baſim BC, cuius latera circa rectum ſint vt 35 ad 12. Ponatnr IR pro latere FE Tùm fiat vt 35 ad 12 ita IR ad aliud, quod erit $\frac{12R}{35}$. tale igitur erit latus FG. eſt vero vt BC 14 ad FE IR ita AC 15 ad AF. Ergo AF erit $\frac{15R}{14}$ quæ ſublata ab AC 15, relinquit FC $\frac{210-15R}{14}$. ſed vt AC ad FC ita AD ad FG. Igitur cum datis lateribus detur perpendicularis AD 12, erit FG $\frac{2520-180R}{210}$. proinde cum eadem FG ſit iam inuenta $\frac{12R}{35}$, erit æquatio inter illa duo. Et poſt debitem reductionem diuiſionemque, IR ſiue latus FE 10. ſi autem fiat vt 35 ad 12 ita 10 ad aliud, erit FG $3\frac{3}{7}$.

Per Algebrã ſpecioſam, datis lateribus vt ſupra B, C, D & perpẽdiculari *F*, ſupra baſim C, & ratione laterũ rectanguli inſcriptibilis G ad H, ponatur A pro latere rectanguli; quod eſt parallelum baſi C, ergo alterũ rectanguli latus perpendiculare ad C, erit $\frac{HA}{G}$. Igitur latus D ſecabitur per latus rectanguli taliter, vt pars ſuperius eminens ſit $\frac{DA}{C}$. Pars vero vergens interius ſit $\frac{DC--DA}{C}$. Ergo latus rectanguli perpendiculare baſi C erit $\frac{FAC--FDA}{CD}$. Sed hoc idem latus iam repertum fuit $\frac{HA}{G}$. ergo erit æquatio inter illa duo. Ac proinde poſt debitam reductionem, & diuiſionem A æquabitur $\frac{GFC}{HC+GF}$.

Hinc Canon.

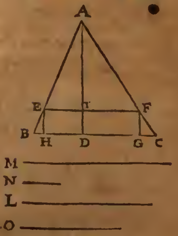
Solidum ex baſi, perpendiculari & primo termino rationis diuide per ſummam productorum ex perpendiculari in primum terminum rationis datæ, & ex baſi in ſecundum terminum, & fiet latus rectanguli inſcriptibilis parallelum baſi.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit triangulum A B C cui oporteat inſcribere aliquod rectangulum, puta E F G H, taliter vt E F ad F G habeat rationem M ad N. Fiat vt B C ad A D ita M ad L. Deinde vt N plus L ad M ita A D ad O. Poſtremo vt B C ad O ita A C ad A F. Ducaturque F E parallela C B, & demittantur F G & E H perpendicularis ipſi F E. Dico rectanguli E F G H, triangulo A B C inſcripti latera E F & F G eſſe in ratione data M ad N. Nam cum ſit B C ad O vt A C ad A F, & vt A C ad A F ita B C ad F E, erit vt B C ad O, ita B C ad F E. Ergo (per 9 quinti) O & F E erunt æquales.

Eſt autem factum vt B C ad A D ita M ad L. Igitur rectangulum ex B C in L eſt æquale rectangulo ex A D in M. ſimili ratione factum eſt vt N plus L ad M ita A D ad O hoc eſt F E. Ergo re-

ctangulũ N plus L in FE æquatur AD in M. Igitur rectãgulũ BC in L æquale eſt rectãgulo ſub N plus L in FE, ergo (per 16 ſexti) erit N plus L ad L ita BC ad FE. Sed vt BC ad FE ita AC ad AF, vt autem AC ad AF ita AD ad AI. Ergo vt N plus L ad L, ita AD ad AI & diuidendo vt N ad L ita DI ad AI.



Eſt vero vt BC ad EF ita AC ad AF & DA ad AI. Ergo permutando, vt BC ad DA ita EF ad AI. Et inuertendo, vt AD ad BC ita AI ad EF. Eſt autem factum vt AD ad BC ita L ad M. Igitur vt AI ad EF ita L ad M. Cum ergo ſit vt L ad M ita AI ad EF, cumque iam oſtenderimus eſſe vt N ad L ita DI ad AI, erit ex æquo vt N ad M, ita DI ad FE. Et inuertendo vt FE ad DI (hoc eſt FG ita M ad N. Ergo latera rectanguli inſcripti ſunt in data ratione. Quod erat demonſtrandúm.

Propositio XXVII.

In dato triangulo inſcribere rectangulum dato quadrato æquale.

Esto data baſis alicuius trianguli 14 cura autem 13 & 15, & oporteat iſti triangulo inſcribere rectangulum æquale $\frac{112}{3}$ ponatur latus vnum rectanguli huius 1R. ergo alterum latus erit $\frac{112}{3R}$. Tum inuenta ex lateribus datis perpendiculari 12 fiat vt baſis 14 ad 1R latus parallelum biſi ita crus 15 ad aliud, habebiturque cruris iſtius pars vna $\frac{15R}{14}$ quæ ſi auferatur à 15, reſtabit altera

pars

Per Algebrā ſpecioſam, datis lateribus vt ſupra B, C, D & perpē-diculari *F*, ſupra baſim C, & ratione laterū rectanguli inſcriptibilis G ad H, ponatur A pro latere rectanguli; quod eſt parallelum baſi C, ergo alterū rectanguli latus perpendiculare ad C, erit $\frac{HA}{G}$. Igitur latus D ſecabitur per latus rectanguli taliter, vt pars ſuperius eminens ſit $\frac{DA}{C}$. Pars vero vergens interius ſit $\frac{DC - DA}{C}$. Ergo latus rectanguli perpendiculare baſi C erit $\frac{FAC - FDA}{CD}$. Sed hoc idem latus iam repertum fuit $\frac{HA}{G}$. ergo erit æquatio inter illa duo. Ac proinde poſt debitam reductionem, & diuiſionem A æquabitur $\frac{GFC}{HC + GF}$.

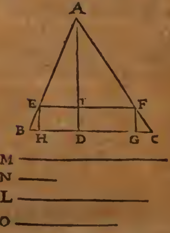
Hinc Canon.

Solidum ex baſi, perpendiculari & primo termino rationis diuide per ſummam productorum ex perpendiculari in primum terminum rationis datæ, & ex baſi in ſecundum terminum, & fiet latus rectanguli inſcriptibilis parallelum baſi.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit triangulum A B C cui oporteat inſcribere aliquod rectangulum, puta E F G H, taliter vt E F ad F G habeat rationem M ad N. Fiat vt B C ad A D ita M ad L. Deinde vt N plus L ad M ita A D ad O. Poſtremo vt B C ad O ita A C ad A F. Ducaturque F E parallela C B, & demittantur F G & E H perpendicularis ipſi F E. Dico rectanguli E F G H, triangulo A B C inſcripti latera E F & F G eſſe in ratione data M ad N. Nam cum ſit B C ad O vt A C ad A F, & vt A C ad A F ita B C ad F E, erit vt B C ad O, ita B C ad F E. Ergo (per 9 quinti) O & F E erunt æquales.

Eſt autem factum vt B C ad A D ita M ad L. Igitur rectangulum ex B C in L eſt æquale rectangulo ex A D in M. ſimili ratione factum eſt vt N plus L ad M ita A D ad O hoc eſt F E. Ergo re-



ctangulū N plus L in FE æquatur AD in M. Igitur rectāgulū BC in L æquale eſt rectāgulo ſub N plus L in FE. ergo (per 16 ſexti) erit N plus L ad L ita BC ad FE. Sed vt BC ad FE ita AC ad AF, vt autem AC ad AF ita AD ad AI. Ergo vt N plus L ad L, ita AD ad AI & diuidendo vt N ad L ita DI ad AI.

Eſt vero vt BC ad EF ita AC ad AF & DA ad AI. Ergo permutando, vt BC ad DA ita EF ad AI. Et inuertendo, vt AD ad BC ita AI ad EF. Eſt autem factum vt AD ad BC ita L ad M. Igitur vt AI ad EF ita L ad M. Cum ergo ſit vt L ad M ita AI ad EF, cumque iam oſtenderimus eſſe vt N ad L ita DI ad AI, erit ex æquo vt N ad M, ita DI ad FE. Et inuertendo vt FE ad DI (hoc eſt FG ita M ad N. Ergo latera rectanguli inſcripti ſunt in data ratione. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII.

In dato triangulo inſcribere rectangulum dato quadrato æquale.

ESto data baſis alicuius trianguli 14 crura autem 13 & 15, & oporteat iſti triangulo inſcribere rectangulum æquale 112.

3

ponatur latus vnum rectanguli huius 1R. ergo alterum latus erit 112. Tum inuenta ex lateribus datis perpendiculari 12 fiat vt baſis

3R

14 ad 1R latus parallelum baſi ita crus 15 ad aliud, habebiturque cruris iſtius pars vna 15R quæ ſi auferatur à 15, reſtabit altera

14

pars

pars eiuſdem cruris $\frac{15 -- 15 R.}{14}$ eſt autem vt 15 ad hanc poſteriorem partem ita perpendicularis 12 ad ſecundum latus rectanguli, quod iam inuentū eſt $\frac{112.}{3R}$ igitur productus ſub mediis $\frac{180 -- 180R}{14}$ æquabitur producto. Sub extremis $\frac{560}{1R}$ ac tandem poſt debitam reductionem & diuiſionem fit I Q æquale 14 R -- $\frac{392.}{9}$ & latus parallelum baſi ſiue I R æqualis $\frac{14}{3}$ alterum vero latus 8.

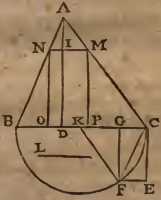
Per Algebram ſpecioſam, dentur latera trianguli B, C, D, & perpendicularis F & rectangulum inſcribendum H. Ponatur autem A prolatere rectanguli parallelo baſi & ſupponatur baſis B. Ergo alterum latus rectanguli erit $\frac{H}{A}$. Deinde fiat vt baſis B ad latus A ita C ad aliud, quod ſit $\frac{CA}{B}$. Habebiturquē vna pars lateris C. Ac proinde altera erit $\frac{BC -- CA}{B}$. Igitur erit vt perpendicularis F ad $\frac{H}{A}$ ita C ad $\frac{BC -- CA.}{B}$ Ergo productus ſub extremis $\frac{FBC -- FCA.}{B}$ eſt æqualis producto ſub mediis $\frac{HC.}{A}$ Ac tandem A quadratum æquabitur BA --- $\frac{HB.}{F}$

Hinc Canon.

Solidum ex rectangulo dato in baſim diuidē pērpēndicularēm: quotientem tolle dequadrato demidiæ baſis & reſidui radicem quadratam dimidiæ baſi detrahe, fietque latus rectanguli inſcribendi parallelum baſi.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto triangulum ABC, cui oporteat inſcribere rectangulum æquale quadrato L. fiat vt AD perpendicularis trianguli, ad baſim AC, ita quadratum L ad quadratum CE. Et ponatur CE perpendicularis ad BC, ducaturque EF parallela CB donec occurrat peripheriæ in F (ſi non occurreret, problema foret impoſſibile) ex F ducatur FG perpendicularis BC, fiatque vt BC ad GC ita CA ad AM, & ducatur MN parallela BC, demitanturque MP & NO perpendiculares MN. Dico rectangulum NMPO æquari quadrato L. Nam cum ſit vt CA ad AM ita BC ad GC, cumque ſit iterum vt CA ad AM ita BC ad MN, erit vt BC ad GC ita BC ad MN. Igitur (per 9 quinti) GC æquabitur MN. Deinde quia MN eſt parallela CB erit vt CA ad MA ita AD ad AI. Sed eſt etiam vt CA ad MA ita BC ad MN. Ergo vt BC ad MN ita AD ad AI. Et permutando, vt BC ad AD ita MN ad AI. Quoniam ergo eſt vt tota BC ad totam AD ita ablata NM (hoc eſt GC ad ablatam AI, erit & reliqua BG ad reliquam ID vt tota BC ad totam AD, ſeu vt BG ad ID (hoc eſt MP (ſed vt BG ad MP ita eſt (propter eamdem altitudinem GC (rectangulum BGC ad rectangulum NMPO. Igitur vt BC ad AD ita rectangulum BGC (hoc eſt quadratum GF aut CE) ad rectangulum PMNO. Sed factum eſt vt AD ad BC ita quadratum L ad quadratum CE. Ergo inuertendo, vt BC ad AD ita quadratum CE ad quadratum L. Cum itaque ſit etiam ut BC ad AD ita quadratum CE ad rectangulum PMNO erit per 9 quinti rectangulum PMNO æquale quadrato L. Ergo dato triangulo ABC inſcriptum eſt rectangulum æquale quadrato dato, quod erat demonſtrandum.



pars eiuſdem cruris $\frac{15-15R}{14}$. eſt autem vt 15 ad hanc poſteriorem partem ita perpendicularis 12 ad ſecundum latus rectanguli, quod iam inuentũ eſt $\frac{112}{3R}$. igitur productus ſub mediis $\frac{180-180R}{14}$ æquabitur producto. Sub extremis $\frac{560}{1R}$ ac tandem poſt debitam reductionem & diuiſionem fit 1 Q æquale 14 R $-\frac{392}{9}$. & latus parallelum baſi ſiue 1 R æqualis $\frac{14}{3}$ alterum vero latus 8.

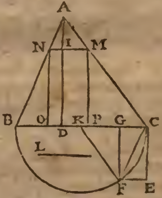
Per Algebram ſpecioſam, dentur latera trianguli B, C, D, & perpendicularis F & rectangulum inſcribendum H. Ponatur autem A pro latere rectanguli parallelo baſi & ſupponatur baſis B. Ergo alterum latus rectanguli erit $\frac{H}{A}$. Deinde fiat vt baſis B ad latus A ita C ad aliud, quod ſit $\frac{CA}{B}$. Habebiturque vna pars lateris C. Ac proinde altera erit $\frac{BC-CA}{B}$. Igitur erit vt perpendicularis F ad $\frac{H}{A}$ ita C ad $\frac{BC-CA}{B}$. Ergo productus ſub extremis $\frac{FBC-FCA}{B}$. eſt æqualis producto ſub mediis $\frac{HC}{A}$. Ac tandem A quadratum æquabitur $BA - \frac{HB}{F}$.

Hinc Canon.

Solidum ex rectangulo dato in baſim diuide perpendicularem: quotientem tolle de quadrato demidiæ baſis & reſidui radicem quadratam dimidiæ baſi detrahe, fietque latus rectanguli inſcribendi parallelum baſi.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto triangulum A B C, cui oporteat inſcriberē rectangulum æquale quadrato L. fiat vt A D perpendicularis trianguli, ad baſim A C, ita quadratum L ad quadratum C E. Et ponatur C E perpendicularis ad B C, ducaturque E F parallela C B donec occurrat peripheriæ in F (ſi non occurreret, problema foret impoſſibile) ex F ducatur F G perpendicularis B C, fiatque vt B C ad G C ita C A ad A M, & ducatur M N parallela B C, demitanturque M P & N O perpendiculares M N. Dico rectangulum N M P O æquari quadrato L. Nam cum ſit vt C A ad A M ita B C ad G C, cumque ſit iterum vt C A ad A M ita B C ad M N, erit vt B C ad G C ita B C ad M N. Igitur (per 9 quinti) G C æquabitur M N. Deinde quia M N eſt parallela C B erit vt C A ad M A ita A D ad A I. Sed eſt etiam vt C A ad M A ita B C ad M N. Ergo vt B C ad M N ita A D ad A I. Et permutando, vt B C ad A D ita M N ad A I Quoniam ergo eſt vt tota B C ad totam A D ita ablata N M (hoc eſt G C ad ablatam A I, erit & reliqua B G ad reliquam I D vt tota B C ad totam A D, ſeu vt B G ad I D (hoc eſt M P (ſed vt B G ad M P ita eſt (propter eamdem altitudinem G C (rectangulum B G C ad rectangulum N M P O. Igitur vt B C ad A D ita rectangulum B G C (hoc eſt quadratum G F aut C E) ad rectangulum P M N O. Sed factum eſt vt A D ad B C ita quadratum L ad quadratum C E. Ergo inuertendo, vt B C ad A D ita quadratum C E ad quadratum L. Cum itaque ſit etiam ut B C ad A D ita quadratum C E ad rectangulum P M N O erit per 9 quinti rectangulum P M N O æquale quadrato L. Ergo dato triangulo A B C inſcriptum eſt rectangulum æquale quadrato dato, quod erat demonſtrandum.



Propoſitio XXVIII.

Triangulo dato inſcribere rectangulum taliter vt triangulum ad rectangulum habeat rationem datam.

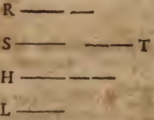
Eſto data ratio 9 ad 4, & reliqua omnia data ſint vt in propoſitione præcedenti. Fiat vt 9 ad 4 ita productus ſub baſe 14 in dimidiem perpendicularem 6 (quiquidem productus eſt 84) ad aliud & inuenietur $\frac{112}{3}$. ponatur iam latus rectanguli inſcribendi parallelum baſi 1R. Ergo alterum latus erit $\frac{112}{3R}$ & abſolutis cæteris vt in præcedente propoſitione, fiet 1R æqualis $\frac{14}{3}$. tale erit latus parallelum baſi, alterum verò erit 8.

Per Algebram ſpecioſam, detur ratio R ad S. Et reliqua vt prius & inueniatur planum trianguli G, per multiplicationem baſis in mediam perpendicularem, fiatque vt R ad S ita G ad H. Ergo H æquale rectangulo inſcribendo. Tùm per præcedentem canonem inſcribatur triangulo rectangulum æquale H. Vel ſane ponatur A latus parallelum baſi, eritque $\frac{H}{A}$ alterum latus, & tandem A quadratum æquale fiet BA -- $\frac{HB}{F}$.

Hinc Canon.

Aream trianguli multiplica per ſecundum rationis terminum, & ſolidum indenatum diuide per primum terminum, habebiſque rectangulum inſcribendum. Quare per Canonem priorem inuenietur latus rectanguli, quod erit parallelum baſi.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit data ratio R ad S. Et datum ſit triangulũ prpoſitionis præcedentis A B C inueniatur autem inter R & S media proportionalis T, & etiam ſit H media proportionalis inter baſim & mediam perperpendicularem. Fiatque vt R ad T ita H ad L. Tum per propoſitionem præcedentem inſcribatur rectangulũ M N O P æquale quadrato L in triangulo A B C. Dico triangulum A B C ad rectangulum M N O P eſſe in ratione R ad S. Nam cum T ſit media proportionalis inter R & S. Erit vt R ad S ita quadratum R ad quadratum T. Sed quoniam eſt vt R ad T ita H ad L erit quoque vt quadratum R ad quadratum T ita quadratum H ad quadratum L. Ergo vt R ad S ita quadratum H ad quadratum L. Sed quadratum H æquatur triangulo A B C, quia H eſt medio proportionalis inter baſim & mediam perpendicularem. Igitur quadratum I. æquatur rectangulo inſcribendo. Ergo vt R ad S ita area trianguli A B C ad aream rectanguli M N O P. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XXIX.

In dato ſemicirculo ab extremitatibus diametri inſcribere duas lineas ad idem peripheriæ punctum cœuntes, taliter vt triangulum inde factum ad quadratum ſemidiametri habeat rationem datam.

Esto data ratio 4 ad 5. accipiaturque prior terminus rationis pro vna ex lineis inſcribendis & ponatur altera I R. Ergo quoniam angulus in ſemicirculo rectus eſt, erit area trianguli 2 R. Et quoniam quadrata duarum linearum inſcriptarũ æquantur quadrato diametri, erit quadratum diametri 16 † 1Q at quadrans quadrati à diametro deſcripti eſt æquale quadrato ſemidiametri. Igitur ſemidiametri quadratum eſt 16 † 1Q. Ac proinde 2R
4

ad

Propositio XXVIII.

Triangulo dato inſcribere rectangulum taliter vt triangulum ad rectangulum habeat rationem datam.

Eſto data ratio 9 ad 4, & reliqua omnia data ſint vt in propoſitione præcedenti. Fiat vt 9 ad 4 ita productus ſub baſe 14 in dimidiem perpendicularem 6 (quiquidem productus eſt 84) ad aliud & inuenietur $\frac{112}{3}$. ponatur iam latus rectanguli inſcribendi parallelum baſi 1R. Ergo alterum latus erit $\frac{112}{3R}$ & abſolutis cæteris vt in præcedente propoſitione, fiet 1R æqualis $\frac{14}{3}$. tale erit latus parallelum baſi, alterum verò erit 8.

Per Algebram ſpecioſam, detur ratio R ad S. Et reliqua vt prius & inueniatur planum trianguli G, per multiplicationem baſis in mediam perpendicularem, fiatque vt R ad S ita G ad H. Ergo H æquale rectangulo inſcribendo. Tùm per præcedentem canonem inſcribatur triangulo rectangulum æquale H. Vel ſane ponatur A latus parallelum baſi, eritque $\frac{H}{A}$ alterum latus, & tandem A quadratum æquale fiet $BA - \frac{HB}{F}$.

Hinc Canon.

Aream trianguli multiplica per ſecundum rationis terminum, & ſolidum indenatum diuide per primum terminum, habebiſque rectangulum inſcribendum. Quare per Canonem priorem inuenietur latus rectanguli, quod erit parallelum baſi.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit data ratio R ad S. Et datum ſit triangulũ prpoſitionis præcedentis A B C inueniatur autem inter R & S media proportionalis T, & etiam ſit H media proportionalis inter baſim & mediam perperpendicularem. Fiatque vt R ad T ita H ad L. Tum per propoſitionem præcedentem inſcr batur rectangulũ M N O P æquale quadrato L in triangulo A B C. Dico triangulum A B C ad rectangulum M N O P eſſe in ratione R ad S. Nam cum T ſit media proportionalis inter R & S. Erit vt R ad S ita quadratum R ad quadratum T. Sed quoniam eſt vt R ad T ita H ad L erit quoque vt quadratum R ad quadratum T ita quadratum H ad quadratum L. Ergo vt R ad S ita quadratum H ad quadratum L. Sed quadratum H æquatur triangulo A B C, quia H eſt medio proportionalis inter baſim & mediam perpendicularem. Igitur quadratum I. æquatur rectangulo inſcribendo. Ergo vt R ad S ita area trianguli A B C ad aream rectanguli M N O P. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XXIX.

In dato ſemicirculo ab extremitatibus diametri inſcribere duas lineas ad idem peripheriæ punctum cœuntes, taliter vt triangulum inde factum ad quadratum ſemidiametri habeat rationem datam.

Esto data ratio 4 ad 5. accipiaturque prior terminus rationis pro vna ex lineis inſcribendis & ponatur altera 1 R. Ergo quoniam angulus in ſemicirculo rectus eſt, erit area trianguli 2 R. Et quoniam quadrata duarum linearum inſcriptarũ æquantur quadrato diametri, erit quadratum diametri 16 † 1 Q at quadrans quadrati à diametro deſcripti eſt æquale quadrato ſemidiametri. Igitur ſemidiametri quadratum eſt $\frac{16 \dagger 1Q}{4}$. Ac proinde 2R

ad

ad 16 + 1Q eſt in ratio data 4 ad 5. Ergo productus ſub extremis $\frac{10}{4}$ R æquatur producto ſub mediis 16 + 1Q. Ideoque 1Q æquale erit 10R -- 16. Et fit 1R æqualis 8. igitur duæ inſcriptæ erunt 4 & 8 & diameter ℞ 8 & ſemidiameter ℞ 20.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ſumatur B pro vna ex inſcriptis & ponatur A pro altera. Ergo $\frac{B\,A}{2}$ eſt trianguli area. Et quadratum diametri B quadr. + A quadr. & huius quadrans $\frac{\text{B quadr.} + \text{A quadr.}}{4}$ erit quadratum ſemidiametri. Ac proinde hæc duo erunt in ratione data. B ad C. Igtur productus $\frac{C\,B\,A}{2}$ æqualis eſt producto $\frac{\text{B cub.} + \text{B A quadr.}}{4}$ ergo 4 C B A æquabuntur 2 B cub. + 2 B A quadr. & diuidendo omnia per B, fiunt 4 C A æqualia 2 B quadr. + 2 A quadr. ergo A quadratum eſt æquale 2 C A --- B quadr.

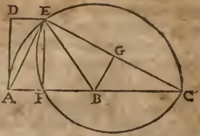
Hinc Canon.

Quadratum prioris termini rationis datæ tolle ex quadrato poſterioris termini: reſidui radix quadrata poſteriori termino addita exhibet vnam ex lineis inſcribendis, altera exiſtente priore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A D ad A B, & oporteat ſemicirculo inſcriberē duas lineas cum diametro facientes triangulum quod ad quadratum ſemidiametri ſit vt A D ad A B. Ponantur illæ duæ lineæ A D & A B angulos rectos. Et centro B interuallo B A deſcribatur ſemicirculus A E C, ducaturque D E paralela A C donec occurrat circonferentiæ in E (ſi non occurreret problema foret impoſſibile, & inuenerenda eſſet ratio data) demittaturque E F perpēdicularis ad A B. Et ſuper connexa E C fiat ſemicirculus C F E. Dico duas lineas quæſitas eſſe C F & F E, & triangulum F E C ad quadratum dimidiæ E C, fore in data ratione A D ad A B. Con-

nexis enim centris duorum ſemicirculorum per lineam B G, erit illa perpendicularis ad E C (per 3 tertij) ergo cum duo triangula E F C & G E C habeant angulum C communem, erunt æquiengulai Igitur vt E C ad C F ita B C ad C G Ac proinde rectangulum ſub extremis E C G æquatur rectangulo ſub mediis F C B. Sed rectangulum E C G eſt æquale duplo quadrato C G igitur eidem duplo æquatur rectangulum F C B. At rectangulum F C B ad rectangulum E F C eſt (propter



eamdem altitudinem F C) vt B C ad E F. (Hoc eſt vt A B ad C D) ergo vt A B ad A D ita duplum quadratum G C ad rectangulum E F C. At rectangulum E F C duplum eſt trianguli E F C, igitur vt A B ad A D ita duplum quadratum G C ad duplum triangulum E F C. Sed vt duplum quadratum G C ad duplum triangulum E F C ita eſt quadratum G C ad triangulum E F C. Ergo vt A B ad A D ita quadratum G C ad triangulum E F C. Et inuertendo, vt A D ad A B ita triangulum E F C ad quadratum G C. Igitur ab extremitatibus diametri E & C inſcriptæ ſunt duæ lineæ ad punctum F cœuntes taliter vt triangulum E F C ad quadratum ſemidiametri G C habeant rationem datam A D ad A B. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Non poteſt hic dari ratio maioris inæqualitatis, quia maximum triangulum quod poſſit fieri in ſemicirculo, eſt quando lineæ ab extremitatibus diametri cœunt ad medietatem peripheriæ: tunc autem triangulum eſt æquale quadrato ſemidiametri. Ergo ſi datur ratio maior quam æqualitatis, problema erit impoſſibile.

ad 16 + 1Q eſt in ratio data 4 ad 5. Ergo productus ſub extremis $\frac{10}{4}$ R æquatur producto ſub mediis 16 + 1Q. Ideoquē 1Q æquale erit 10R -- 16. Et ſit 1R æqualis 8. igitur duæ inſcriptæ erunt 4 & 8 & diameter ℞ 8 & ſemidiameter ℞ 20.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ſumatur B pro vna ex inſcriptis & ponatur A pro altera. Ergo $\frac{BA}{2}$ eſt trianguli area. Et quadratum diametri B quādr. + A quadr. & huius quadrans $\frac{B\ quadr. + A\ quadr.}{4}$ erit quadratum ſemidiametri. Ac proinde hæc duo erunt in rationē data. B ad C. Igitur productus $\frac{CBA}{2}$ æqualis eſt producto $\frac{B cub. + BA\ quadr.}{4}$ ergo 4CBA æquabuntur 2B cub. + 2 BA quadr. & diuidendo omnia pēr B, fiunt 4 C A æqualia 2 B quadr. + 2 A quadr. ergo A quadratum eſt æquale 2 C A --- B quadr.

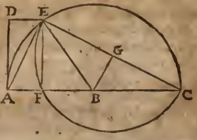
Hinc Canon.

Quadratum prioris termini rationis datæ tolle ēx quadrato poſterioris termini: reſidui radix quadrata poſteriori termino addita exhibet vnam ex lineis inſcribendis, altera exiſtente priore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A D ad A B, & oporteat ſemicirculo inſcribērē duas lineas cum diametro facientes triangulum quod ad quadratum ſemidiametri ſit vt A D ad A B. Ponantur illæ duæ lineæ A D & A B angulos rectos. Et centro B interuallo B A deſcribatur ſemicirculus A E C, ducaturque D E paralela A C donec occurrat circonferentiæ in E (ſi non occurreret problemā foret impoſſibile, & inuenerenda eſſet ratio data) demittaturque E F perpēdicularis ad A B. Et ſuper connexa E C fiat ſemicirculus C F E. Dico duas lineas quæſitas eſſe C F & F E, & triangulum F E C ad quadratum dimidiæ E C, fore in data ratione A D ad A B. Con-

nexis enim centris duorum ſemicirculorum per lineam B G, erit illa perpendicularis ad E C (per 3 tertij) ergo cum duo triangula E F C & G E C habeant angulum C communem, erunt æquiengulai Igitur vt E C ad C F ita B C ad C G. Ac proinde rectangulum ſub extremis E C G æquatur rectangulo ſub mediis F C B. Sed rectangulum E C G eſt æquale duplo quadrato C G igitur eidem duplo æquatur rectangulum F C B. At rectangulum F C B ad rectangulum E F C eſt (propter eamdem altitudinem F C) vt B C ad E F. (Hoc eſt vt A B ad C D) ergo vt A B ad A D ita duplum quadratum G C ad rectangulum E F C. At rectangulum E F C duplum eſt trianguli E F C, igitur vt A B ad A D ita duplum quadratum G C ad duplum triangulum E F C. Sed vt duplum quadratum G C ad duplum triangulum E F C ita eſt quadratum G C ad triangulum E F C. Ergo vt A B ad A D ita quadratum G C ad triangulum E F C. Et inuertendo, vt A D ad A B ita triangulum E F C ad quadratum G C. Igitur ab extremitatibus diametri E & C inſcriptæ ſunt duæ lineæ ad punctum F cœuntes taliter vt triangulum E F C ad quadratum ſemidiametri G C habeant rationem datam A D ad A B. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Non poteſt hic dari ratio maioris inæqualitatis, quia maximum triangulum quod poſſit fieri in ſemicirculo, eſt quando lineæ ab extremitatibus diametri cœunt ad medietatem peripheriæ: tunc autem triangulum eſt æquale quadrato ſemidiametri. Ergo ſi datur ratio maior quam æqualitatis, problema erit impoſſibile.

Propositio XXX.

Inſemicirculo dato inſcribere ab extremitatibus diametri duas lineas ad vnum peripheriæ punctum cœuntes, ita vt quadratum diametri ad rectangulum ſub inſcriptis datam habeant rationem.

SIt data ratio 5 ad 2 & ſumpto poſteriori termino rationis 2 pro vna linea inſcribenda, ponatur altera 1 R. Ergo quadrata illa 4 † 1 Q quæ æquantur quadrato diametri ad 2 R ſunt in ratione 5 ad 2. ac ideo productus ſub extremis 8 † 2 Q æquatur producto ſub mediis 10R. Igitur 1 R eſt æquale 5R -- 4. & fit 1 R æqualis 4. duæ ergo lineæ inſcribendæ ſunt 2 & 4 diameter autem ℞ 20.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ponatur A pro vna inſcribenda & ſumatur C pro altera. Ergo C quadr. † A quadr. ad C A eſt vt B ad C. Igitur productus ſub extremis C cub. † C A quadr. æquatur producto ſub mediis B C A. Et diuidendo omnia per C, fit C quadr. † A quadr. æquale B A. Ergo A quadratum æquatur B A --- C quadr.

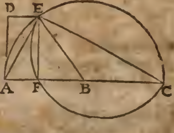
Hinc Canon.

Ex quadrato dimidii termini prioris rationis datæ, tolle quadratum poſterioris termini: reſidui radix quadrata eidem dimidio termino addita, exhibet vnam quantitatem inſcribendem, altera exiſtente poſteriore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A C ad A D. Ponaturque illæ lineæ ad angulos rectos, & ſuper A C facto ſemi-circulo ducatur D E parallela A C, donec occurrat, peripheriæ in E (ſi non occurat, impoſſibile erit problema) & ex puncto E demittatuur E F perpendicularis ad A C. Dico duas lineas quæſitas eſſe E F & F C. Fiant enim ſemicirculus C F E ſuper diametrum E C, erunt duo illa triangula

AEC & CEF æquiangula. (Per 8 ſexti) ergo vt AC ad CE ita CE ad CF. Pronideque rectangulum ſub extremis ACF æquatur quadrato EC. Sed vt ACF rectangulum ad rectangulum EFC, ita eſt (propter camdem altitudinem FC) AC ad FE (hoc eſt AD) igitur vt AC ad AD ita quadratum EC ad rectangulum EFC. Et ita inſcriptæ ſunt duæ lineæ EF & FC in ſemicirculo tali ratione vt quadratum diametri EC ad rectangulum inſcriptarum EF & FC ſit in proportione data AC ad AD. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Non poteſt ratio dari minor dupla, quia rectangulum maximum eſt cum duæ lineæ cœunt ad medietatem peripheriæ : illarum autem rectangulum eſt ſemiſſis quadrati à diametro facti.

PROPOSITIO XXXI.

Ab extremitatibus diametri ſemicirculo inſcribere duas lineas ad vnum punctum cœuntes taliter, vt qurdratum diametri iunctum quadrato vnius inſcriptæ habeat datam rationem ad quadratum alterius.

SIt data ratio 3 ad 2. ſumaturque poſterior terminus rationis 2 pro vna inſcripta & ponatur 1R pro alia. ergo quadratum diametri erit 4 † 1Q cui ſi addas 1Q, erit 4 † 2Q ad 4, vt 3 ad 2 igitur productus ſub extremis 8 † 4Q æqualis eſt 12. ac proinde 1R eſt 1. duæ ergo lineæ inſcriptæ ſunt 1 & 2. diameter autem ℞ 5.

Per Algebram ſpecioſam, data retione B ad C ſumatur C pro vna inſcripta, & ponatur A pro altera. Igitur quadratum diametri erit C quadr. † A quadr. cui ſi addas C quadr. fient 2 C quadr. † A quadr. ad A quadr. vt B ad C. Ac proinde 2 C cub. † CA. quadr.

Propositio XXX.

Inſemicirculo dato inſcribere ab extremitatibus diametri duas lineas ad vnum peripheriæ punctum cœuntes, ita vt quadratum diametri ad rectangulum ſub inſcriptis datam habeant rationem.

SIt data ratio 5 ad 2 & ſumpto poſteriori termino rationis 2 pro vna linea inſcribenda, ponatur altera 1 R. Ergo quadrata illa 4 † 1 Q quæ æquantur quadrato diametri ad 2 R ſunt in ratione 5 ad 2. ac ideo productus ſub extremis 8 † 2 Q æquatur producto ſub mediis 10 R. Igitur 1 R eſt æquale 5 R -- 4. & fit 1 R æqualis 4. duæ ergo lineæ inſcribendæ ſunt 2 & 4 diameter autem ℞ 20.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ponatur A pro vna inſcribenda & ſumatur C pro altera. Ergo C quadr. † A quadr. ad C A eſt vt B ad C. Igitur productus ſub extremis C cub. † C A quadr. æquatur producto ſub mediis B C A. Et diuidendo omnia per C, fit C quadr. † A quadr. æquale B A. Ergo A quadratum æquatur B A --- C quadr.

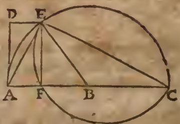
Hinc Canon.

Ex quadrato dimidii termini prioris rationis datæ, tolle quadratum poſterioris termini: reſidui radix quadrata eidem dimidio termino addita, exhibet vnam quantitatem inſcribendem, altera exiſtente poſteriore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ratio A C ad A D. Ponaturque illæ lineæ ad angulos rectos, & ſuper A C facto ſemi circulo ducatur D E parallela A C, donec occurrat, peripheriæ in E (ſi non occurat, impoſſibile erit problema) & ex puncto E demittatuur E F perpendicularis ad A C. Dico duas lineas quæſitas eſſe E F & F C. Fiant enim ſemicirculus C F E ſuper diametrum E C, erunt duo illa triangula

AEC & CEF æquiangula. (Per 8 ſexti) ergo vt AC ad CE ita CE ad CF. Prouideque rectangulum ſub extremis ACF æquatur quadrato EC. Sed vt ACF rectangulum ad rectangulum EFC, ita eſt (propter eamdem altitudinem FC) AC ad FE (hoc eſt AD) igitur vt AC ad AD ita quadratum EC ad rectangulum EFC. Et ita inſcriptæ ſunt duæ lineæ EF & FC in ſemicirculo tali ratione vt quadratum diametri EC ad rectangulum inſcriptarum EF & FC ſit in proportione data AC ad AD. Quod erat demonſtrandum.



Scholium.

Non poteſt ratio dari minor dupla, quia rectangulum maximum eſt cum duæ lineæ cœunt ad medietatem peripheriæ: illarum autem rectangulum eſt ſemiſſis quadrati à diametro facti.

Propositio XXXI.

Ab extremitatibus diametri ſemicirculo inſcribere duas lineas ad vnum punctum cœuntes taliter, vt qurdratum diametri iunctum quadrato vnius inſcriptæ habeat datam rationem ad quadratum alterius.

Sit data ratio 3 ad 2. ſumaturque poſterior terminus rationis 2 pro vna inſcripta & ponatur 1R pro alia. ergo quadratum diametri erit 4 † 1Q cui ſi addas 1Q, erit 4 † 2Q ad 4. vt 3 ad 2 igitur productus ſub extremis 8 † 4Q æqualis eſt 12. ac proinde 1R eſt 1. duæ ergo lineæ inſcriptæ ſunt 1 & 2. diameter autem ℞ 5.

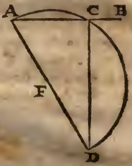
Per Algebram ſpecioſam, data retione B ad C ſumatur C pro vna inſcripta, & ponatur A pro altera. Igitur quadratum diametri erit C quadr. † A quadr. cui ſi addas C quadr. fient 2 C quadr. † A quadr. ad A quadr. vt B ad C. Ac proinde 2 C cub. † CA-quadr.

quadr. æquales B A quadr. ergo A quadr. eſt æquale $\frac{C \text{ cub.}}{B - C}$

Hinc Canón.

Duplum cubum poſterioris termini rationis datæ diuide per differentiam terminorum, & habebis quadratum vnius lineæ inſcribendæ, altera exiſtenté poſteriore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.



Eſto data ratio A B ad A C, & fiat vt B C ad A C ita duplum quadratum A C ad quadratum C D: ponaturque C D ad angulos rectos ipſi A B & nectatur A D, qua diuiſa bifariam in F, centro F interuallo F A aut F D, deſcribatur ſemicirculus, tranſibit ille per punctum C (per 31 tertij) Dico duas inſcriptas A C & C D fore quales poſcuntur. Cum enim ſit vt B C ad A C ita duplum quadratum A C ad quadratum C D, erit componendo vt A B ad A C ita duplum quadratum A C plus quadrato C D ad quadratum C D. Sed duplum quadratum A C plus quadrato A C, quia (per 47 primi) quadrata A C & C D æquantur quadrato A D. Igitur quadratum A D plus quadrata vnius inſcriptæ A C ad quadratum alterius inſcriptæ C D eſt in ratione data A B ad A C. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XXXII.

In quadrato inſcribere rectangulum cuius latera datam habeant rationem.

Sit data ratio 5 ad 3. & ſumatur 3 pro latere quadrati circumſcribentis, ponatur autem I R pro vna parte iſtius lateris, ergo altera pars erit *3* --- I R, harum partium quadrata ſunt I Q & *9* † I Q --- *6*R. Et quia ſi rectangulum inſcribatur quadrato, latera rectanguli poſſunt duplum quadratorũ à partibus lateris, quadrati

ortorùm, erit vnum latus rectanguli ℞ 2 Q & laterum ℞ (18 † 2 Q --- 12 R) igitur hæc duo ſe habent in ratione data 3 ad 5. ergo productus ſub extremis ℞ 50 Q æqualis erit producto ſub mediis ℞ (162 † 18 Q --- 108 R) proinde horum quadrata 50 Q 162 † 18 Q --- 108 R ſunt æqualia & poſt debitã reductionem fit 1 R æqualis 9.

8.

Pēr Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ſumatur C pro latere quadrati circumſcribendis, & ponatur A vna eius pars. Ergo altera erit C--A. horum quadrata ſunt A quadr. & C quadr. † A quadr. ---2 C A. capiantur radices horum quadratorum duplicatorum ℞ 2 A quadr. & ℞ (2 C quadr. † 2 A quadr. --- 4 C A) quæ ſunt vt B ad C. Ergo tandem abſolutis omnibus operationibus vt ſupra, fiet A quadratum æquale 2 C quadt. quadr. 4 A C C cub.

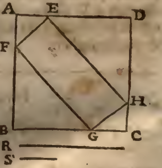
2 B quadr. --- 2 C quadr.

Hinc Canon.

Cape quamlibet quantitatem pro latere quadrati, eam que diuide in duo ſegmenta, quæ habeant proportionem datam, per can. 2. lib. 1. habebisque puncta, ad quæ ducentur latera rectanguli.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit quadratum A B C D, & oporteat in eo inſcribere rectangulum, cuius latera habeant rationem R ad S. Diuidatur A D in E per can. 2. l. 1. taliter vt D E ad E A habeat rationē R ad S. Et ſumantur D H, B G, B F æquales E D. Nectanturque puncta per lineas facientes quadrilaterum E F G H. Dico illud eſſe rectangulum quæſitum. Nam cum E D & D H ſunt æquales triangulum E D H erit iſoſceles cuius anguli ad baſim erunt ſemirecti.



Idemque dicendum de triangulo E A F. Ergo angulus F E H rectus erit & triangula prædicta erunt æquiangula. ex primo ſequitur. Quadrilaterum E F G H eſſe rectangulum. ex ſecundo ſequitur eſſe E D ad E H vt A E. Ad E F & permutando vt E D ad A E ita

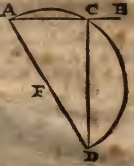
quadr. æquales B A quadr. ergo A quadr. eſt æquale $\frac{C\ cub.}{B - - C}$

Hinc Canon.

Duplum cubum poſterioris termini rationis datæ diuide per differentiam terminorum, & habebis quadratum vnius lineæ inſcribendæ, altera exiſtente poſteriore termino rationis.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data ratio A B ad A C, & fiat vt B C ad A C ita duplum quadratum A C ad quadratum C D: ponaturque C D ad angulos rectos ipſi A B & nectatur A D, qua diuiſa biſariam in F, centro F interuallo F A aut F D, deſcribatur ſemicirculus, tranſibit ille per punctum C (per 31 tertij) Dico duas inſcriptas A C & C D fore quales poſcuntur. Cum enim ſit vt B C ad A C ita duplum quadratum A C ad quadratum C D, erit componendo vt A B ad A C ita duplum quadratum A C plus quadrato C D ad quadratum C D. Sed duplum quadratum A C plus quadrato A C, quia (per 47 primi) quadrata A C & C D æquantur quadrato A D. Igitur quadratum A D plus quadrata vnius inſcriptæ A C ad quadratum alterius inſcriptæ C D eſt in ratione data A B ad A C. Quod erat demonſtrandum.



Propositio XXXII.

In quadrato inſcribere rectangulum cuius latera datam habeant rationem.

Sit data ratio 5 ad 3. & ſumatur 3 pro latere quadrati circumſcribentis, ponatur autem I R pro vna parte iſtius lateris, ergo altera pars erit 3 --- I R, harum partium quadrata ſunt I Q & 9 † I Q -- 6R. Et quia ſi rectangulum inſcribatur quadrato, latera rectanguli poſſunt duplum quadratorũ à partibus lateris, quadrati

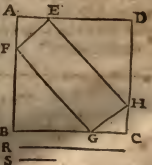
ortorũm, erit vnum latus rectanguli ℞ 2 Q & laterum ℞ (18 † 2Q --- 12R) igitur hæc duo ſe habent in ratione data 3 ad 5. ergo productus ſub extremis ℞ 50 Q æqualis erit producto ſub mediis ℞ (162 † 18 Q --- 108 R) proinde horum quadrata 50 Q 162 † 18 Q --- 108 R ſunt æqualia & poſt debitã reductionem fit 1 R æqualis $\frac{9}{8}$.

Per Algebram ſpecioſam, data ratione B ad C, ſumatur C pro latere quadrati circumſcribentis, & ponatur A vna eius pars. Ergo altera erit C--A. horum quadrata ſunt A quadr. & C quadr. † A quadr. ---2CA. capiantur radices horum quadratorum duplicatorum ℞ 2 A quadr. & ℞ (2 C quadr. † 2 A quadr. --- 4 C A) quæ ſunt vt B ad C. Ergo tandem abſolutis omnibus operationibus vt ſupra, fiet A quadratum æquale $\frac{\text{2 C quadr. quadr. 4 A C C cub.}}{\text{2 B quadr.---2 C quadr.}}$

Hinc Canon.

Capẽ quamlibet quantitatem pro latere quadrati, eam que diuide in duo ſegmenta, quæ habeant proportionem datam, per can. 2. lib. 1. habebisque puncta, ad quæ ducentur latera rectanguli.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit quadratum A B C D, & oporteat in eo inſcribere rectangulum, cuius latera habeant rationem R ad S. Diuidatur A D in E per can. 2. l. 1. taliter vt D E ad E A habeat rationẽ R ad S. Et ſumantur DH, B G, B F æquales E D. Nectanturque puncta per lineas facientes quadrilaterum E F G H. Dico illud eſſe rectangulum quæſitum. Nam cum E D & D H ſunt æquales triangulum E D H erit iſoſceles cuius anguli ad baſim erunt ſemirecti. Idemque dicendum de triangulo E A F. Ergo angulus F E H rectus erit & triangula prædicta erunt æquiangula. ex primo ſequitur. Quadrilaterum E F G H eſſe rectangulum. ex ſecundo ſequitur eſſe E D ad E H vt A E. Ad E F & permutando vt E D ad A E ita

EH ad EF. Sed ED ad AE eſt vt R ad S ex conſtructione. Ergo EH ad EF eſt vt R ad S. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

In dato quadrato inſcribere rectangulum æquale datæ figuræ recti lineæ quando fieri poteſt.

ESto datum latus quadrati 8 & oporteat in eo inſcribere rectangulum æquale 30. Ponatur I R pro vna parte lateris quadrati. Ergo altera pars erit 8 --1R. Horum quadrata ſimul iuncta ſunt 64 † 2 Q --- 16 R. Qua ſublata 64 à quadrato lateris 8, relinquunt 16 R --- 2 Q. æqualia rectangulo inſcribendo 30. igitur I Q æquatur 8 R -- 15. & fit I R æqualis 3 vel 5. talia erunt latera A E & E D. Latera autem F E & E H erunt ℞ 18. & ℞ 50. quorum productus eſt ℞ 900 ſeu 30.

Per Algebram ſpecioſam, dato B latere quadrati, in quo oportet inſcribere rectangulum C, ponatur A pro vno ſegmento lateris B. Igitur alterum ſegmentum erit B--A. Horum quadrata ſimul iuncta B quadr. † 2 A quadr. -- 2 B A. Tollantur à quadrato B, reſiduum erit 2 B A --2 A quadr. quod erit æquale C. ergo A quadratum æquatur B A -- C.

2

Hinc Canon.

Dimidium rectonguli dati tolle à quadrato ſemiſſis lateris: reſidui radix quadrata ſupradicto dimidio addita & detracta dabit ſegmenta lateris. Vel Rectangulum datum tolle à quadrato lateris dati, & reſtabit ſumma quadratorum à partibus lateris genitorum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data M potens figuram recti lineam lineam cui æquale rectanlum inſcribendum eſt quadrato dato ABCD.
(vide figuram præcedentis propoſitionis, & M———————
aduerte non debere dari figuram maiorem ſemiſſe quadrati (tum per 26 lib. 1. data AB ſecetur in F taliter vt

A F B rectangulum æquetur dimidio quadrato M. ſumanturquē partes B G, H D D E æquales B F, ducanturque lineæ ad puncta inuenta F G H E. Dico quadrilaterum illud eſſe rectangulum quæſitum. Nam A B quadratum æquatur quadratis B F.& F A & duplo rectanguli B F A. Sed quadratum B F æquale eſt duobus triangulis B F G. Quadratum vero F A æquatur duobus triangulis A E F & G C H. Igitur rectangulum F E H G æquatur duplo rectangulo B F A. Sed factum eſt rectangulum B F A æquale ſemiſſi quadrati M. Ergo duplum rectangulum B F A æquatur quadrato M. Igitur quadratum M eſt æquale rectangulo. F E H G inſcripto. Quod erat demonſtrandum.

Aliter idem inueniri poteſt ex ſecundo canone per 27 lib. 1. ſi enim tollas quadratum M de quadrato A B, reſtabit ſumma quadratorum A F & F B.

PROPOSITIO XXXIIII.

In dato quadrato inſcribere aliud quadratum quod habeat datam rationem ad quadratum circumſcriptum.

ADuerte proportionem quadrati circumſcripti ad quadratum inſcriptum non poſſe eſſe maiorem dupla : quia nimirum quadratum inſcriptum ad medietates laterum quadrati circumſcribentis eſt minimum omnium, & eſt ſemiſſis quadrati circumſcribentis, ergo ſi daretur ratio maior duplum, praxis foret impoſſibilis. Detur itaque ratio 4 ad 3 & oporteat inſcribere quadratum in quadrato habente 5 pro latere. Fiat vt 4 ad 3 ita 25 ad aliud, nempe $\frac{75}{4}$. tale igitur debet eſſe quadatum inſcriptum Ponatnr ergo lateri dati 5 vna pars 1R. erit itaque altera 5--1R. Horum quadrata ſimul iuncta 25 † 2Q debent æquari $\frac{75}{4}$. Igitur duo ſegmenta quæſita ſunt $\frac{5}{2}$ † ℞ $\frac{25}{8}$. & $\frac{5}{2}$ -- ℞ $\frac{25}{8}$.

Per Algebram ſpecioſã, dato latere B detur ratio C ad. D Tùm

fiat

EH ad EF. Sed ED ad AE eſt vt R ad S ex conſtructione. Ergo EH ad EF eſt vt R ad S. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XXXIII.

In dato quadrato inſcribere rectangulum æquale data figura recti lineæ quando fieri poteſt.

ESto datum latus quadrati 8 & oporteat in eo inſcribere rectangulum æquale 30. Ponatur 1 R pro vna parte lateris quadrati. Ergo altera pars erit 8 --1R. Horum quadrata ſimul iuncta ſunt 64 † 2Q---16R. Qua ſublata 64 à quadrato lateris 8, relinquunt 16R---2Q. æqualia rectangulo inſcribendo 30. igitur 1Q æquatur 8R--15. & fit 1R æqualis 3 vel 5. talia erunt latera AE & ED. Latera autem FE & EH erunt ℞ 18. & ℞ 50. quorum productus eſt ℞ 900 ſeu 30.

Per Algebram ſpecioſam, dato B latere quadrati, in quo oportet inſcribere rectangulum C, ponatur A pro vno ſegmento lateris B. Igitur alterum ſegmentum erit B--A. Horum quadrata ſimul iuncta B quadr. † 2 A quadr. -- 2 B A. Tollantur à quadrato B, reſiduum erit 2 B A --2 A quadr. quod erit æquale C. ergo A quadratum æquatur $\frac{BA - C}{2}$.

Hinc Canon.

Dimidium rectonguli dati tolle à quadrato ſemiſſis lateris: reſidui radix quadrata ſupradicto dimidio addita & detracta dabit ſegmenta lateris. Vel Rectangulum datum tolle à quadrato lateris dati, & reſtabit ſumma quadratorum apartibus lateris genitorum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data M potens figuram recti lineam lineam cui æqu ale rectanlum inſcribendum eſt quadrato dato ABCD.

(vide figuram præcedentis propoſitionis, & M ————
aduerte non debere dari figuram maiorem ſemiſſe quadrati (tum per 26 lib. 1. data AB ſecetur in F taliter vt

AFB rectangulum æquetur dimidio quadrato M. ſumanturque partes BG, HD DE æquales BF, ducanturque lineæ ad puncta inuenta FGHE. Dico quadrilaterum illud eſſe rectangulum quæſitum. Nam AB quadratum æquatur quadratis BF & FA & duplo rectanguli BFA. Sed quadratum BF æquale eſt duobus triangulis BFG. Quadratum vero FA æquatur duobus triangulis AEF & GCH. Igitur rectangulum FEHG æquatur duplo rectangulo BFA. Sed factum eſt rectangulum BFA æquale ſemiſſi quadrati M. Ergo duplum rectangulum BFA æquatur quadrato M. Igitur quadratum M eſt æquale rectangulo. FEHG inſcripto. Quod erat demonſtrandum.

Aliter idem inueniri poteſt ex ſecundo canone per 27 lib. 1. ſi enim tollas quadratum M de quadrato AB, reſtabit ſumma quadratorum AF & FB.

Propositio XXXIIII.

In dato quadrato inſcribere aliud quadratum quod habeat datam rationem ad quadratum circumſcriptum.

Aduerte proportionem quadrati circumſcripti ad quadratum inſcriptum non poſſe eſſe maiorem dupla: quia nimirum quadratum inſcriptum ad medietates laterum quadrati circumſcribentis eſt minimum omnium, & eſt ſemiſſis quadrati circumſcribentis. ergo ſi daretur ratio maior duplum, praxis foret impoſſibilis. Detur itaque ratio 4 ad 3 & oporteat inſcribere quadratum in quadrato habente 5 pro latere. Fiat vt 4 ad 3 ita 25 ad aliud, nempe $\frac{75}{4}$.

tale igitur debet eſſe quadatum inſcriptum Ponatur ergo lateri dati 5 vna pars 1R. erit itaque altera 5 -- 1R. Horum quadrata ſimul iuncta 25 + 2Q debent æquari $\frac{75}{4}$. igitur duo ſegmenta quæſita

ſunt $\frac{5}{2}$ + ℞ $\frac{25}{8}$. & $\frac{5}{2}$ -- ℞ $\frac{25}{8}$.

Per Algebram ſpecioſá, dato latere B detur ratio C ad. D Tùm fiat

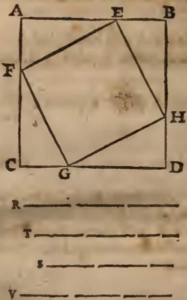
fiat vt C ad D ita B quadr. ad aliud nempe $\frac{D\,B\,quadr.}{C}$ deinde ponatur vna pars lateris dati A. ergo altera erit B--A horũ quadrata ſimul addita B quadr. † 2 A quadr. -- 2 B A æquantur $\frac{D\,B\,quadr.}{C}$ ergò A quadr. æquatur $\frac{2\,C\,B\,A \dagger D\,B\,quadr. -- C\,B\,quadr.}{2\,C}$

Hinc Canon.

Quadratum lateris dati multiplica per minorem terminum rationis datæ & productum diuide per maiorem: deinde diuidatur latus datum in duas partes quarum quadrata æquantur quotienti facto. & habebitur puncta quæſita. Id vero efficietur per propoſ. 27. lib. 1, huius

Hinc Effectio Geometrica.

Sit datum quadratum A B C D, in quo oporteat inſcribere aliud quadratum E F G H in ratione R ad S. inter R & S inueniatur media proportionalis T. Tùm fiat vt R ad T ita A B ad V. Deinde per. 27. lib. 1. diuidatur A B in E taliter vt quadrata A E & E B æquentur quadrato V. Præterea ſumantur A F & C G & D H æquales E B, connectanturque puncta inuenta, vt fiat quadrilaterum E F G H. Dico illud quadrilaterum eſſe quadratum quæſitum. Nam cum E B ſit æqualis A F, C G, D H, erit A E æqualis C *F*, G D, H B, qui enim ab æqualibus demit æqualia, quæ remanent ſunt æqualia. Cumque anguli his lineis erit intercepti, ſint recti: erit quadratum *F* E (per 47 primi) æquale quadratis



tis F A & A E Idemque dicendum de reliquis lateribus quadrilatei inſcripti : ergo cum E B & B H ſint æquales A F & A E erit quadratum E H æquale quadrato F E. Et ſic de aliis. Igitur quadrilaterum illud eſt æquilaterum. ſed omnes anguli illius quadrilateri ſunt recti : ſiquidē angulus A F E æquatur angulo B E H, & angulus A E F angulo E H B, (per 4 primi (ergo anguli A E F & B E H ſimul æquales ſunt angulis A E F & A F E ſimul. Sed anguli A E F & A F L ſimul æquantur recto : igitur idem dicendum de angulis A E F & B E H. ac proinde angulus F E H rectus erit. Eadem ratio probat cæteros angulos F, G, H rectos eſſe. Ergo quadrilaterum E F G H eſt quadratum.

Hoc autem quadratum E F G H eſt æquale quadrato V, ſiquidem quadratum E F G H æquatur quadratis A E & E B ex conſtructione. Sed linea E B eſt æqualis A F. Igitur quadratum V æquatur quadratis A F & A E. Sed iiſdem quadratis A F & A E æquatur quadratum F E. Ergo quadratum F E æquale eſt quadrato V. Sed vt R ad T ita A B ad V. Igitur quadratum R ad quadratum T eſt vt quadratum A B ad quadratum V. Ergo vt quadratum R ad quadratum T ita quadratum A B C D ad quadratū E F G H. Eſt autem vt quadratum R ad quadratum T ita lineæ R ad S tertiam proportionalem. Igitur vt R ad S ita quadratum A B C D ad quadratum inſcriptum E F G H. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Clauius hoc problema aggreditur l. 6. in Euclidem in ſcholio propoſ. 33. ſed fruſtra, nam præſupponit ibi quadraturam circuli, quod tamen nondum Geometricis rationibus eſt effectum.

fiat vt C ad D ita B quadr. ad aliud nempe $\frac{DB\ quadr.}{C}$ deinde po-

natur vna pars lateris dati A. ergo altera erit B−A horũ quadrata ſimul addita B quadr. + 2 A quadr. − 2 B A æquantur $\frac{DB\ quadr.}{C}$

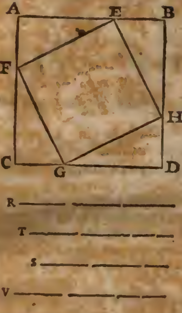
ergò A quadr. æquatur $\frac{2\,CBA + DB\ quadr. - CB\ quadr.}{2C}$

Hinc Canon.

Quadratum lateris dati multiplica per minorem terminum rationis datæ & productum diuide per maiorem: deinde diuidatur latus datum in duas partes quarum quadrata æquantur quotienti facto. & habebitur puncta quæſita. Id vero efficietur per propoſ. 27. lib. 1. huius

Hinc Effectio Geometrica.

Sit datum quadratum ABCD, in quo oporteat inſcriberē aliud quadratum EFGH in ratione R ad S. inter R & S inueniatur media proportionalis T. Tùm fiat vt R ad T ita AB ad V. Deinde per. 27. lib. 1. diuidatur AB in E taliter vt quadrata AE & EB æquentur quadrato V. Præterea ſumantur AF & CG & DH æquales EB, connectanturque puncta inuenta, vt fiat quadrilaterum EFGH. Dico illud quadrilaterum eſſe quadratum quæſitum. Nam cum EB ſit æqualis AF, CG, DH, erit AE æqualis C*F*, GD, HB, qui enim ab æqualibus demit æqualia, quæ remanent ſunt æqualia. Cumque anguli his lineis erit intercepti, ſint recti: erit quadratum *F*E (per 47 primi) æquale quadratis



tis *F* A & A E. Idemque dicendum de reliquis lateribus quadrilatei inſcripti : ergo cum E B & B H ſint æquales A *F* & A E erit quadratum E H æquale quadrato *F* E. Et ſic de alüs. Igitur quadrilaterum illud eſt æquilaterum. ſed omnes anguli illius quadrilateri ſunt recti ſiquidē angulus A *F* E æquatur angulo B E H, & angulus A E *F* angulo E H B, (per 4 primi (ergo anguli A E *F* & B E H ſimul æquales ſunt angulis A E *F* & A *F* E ſimul. Sed anguli A E *F* & A *F* L ſimul æquantur recto : igitur idem dicendum de angulis A E F & B E H. ac proinde angulus F E H rectus erit. Eadem ratio probat cæteros angulos F G, H rectos eſſe. Ergo quadrilaterum E F G H eſt quadratum.

Hoc autem quadratum E F G H eſt æquale quadrato V, ſiquidem quadratum E F G H æquatur quadratis A E & E B ex conſtructione. Sed linea E B eſt æqualis A F. Igitur quadratum V æquatur quadratis A F & A E. Sed iiſdem quadratis A F & A E æquatur quadratum F E. Ergo quadratum F E æquale eſt quadrato V. Sed vt R ad T ita A B ad V. Igitur quadratum R ad quadratum T eſt vt quadratum A B ad quadratum V. Ergo vt quadratum R ad quadratum T ita quadratum A B C D ad quadratū E F G H. Eſt autem vt quadratum R ad quadratum T ita lineæ R ad S tertiam proportionalem. Igitur vt R ad S ita quadratum A B C D ad quadratum inſcriptum E F G H. Quod erat demonſtrandum.

Scholium

Clauius hoc problema aggreditur l. *6.* in Euclidem in ſcholio propoſ. *33.* ſed fruſtra, nam præſupponit ibi quadraturam circuli, quod tamen nondum Geometricis rationibus eſt effectum.

PROPOSITIO XXXV.

Data ſumma crurum trianguli & altitudine ipſius, cum differentia ſegmentorum baſeos à perpendiculari factorum, inuenire triangulum ſpecie.

Sit ſumma crurum 28, perpendicularis 12, & differentia ſegmentorum baſis 4. Ponatur autem minus ſegmentum baſis 1 R Ergo 1 R † 4 erit maius ſegmentum. Et quoniam eſt vt ſumma ad baſim (dum. Baſis ſecatur à perpendiculari) ita differentià ſegmentorum baſeos ad differentiam crurum: fiat vt 28 ad 2 R † 4, ita 4 ad aliud, & habebitur $\frac{2 R \dagger 4}{7}$, pro differentia crurum. Igitur per canonem propoſ. 1. lib. 1. maius crus $\frac{100 \dagger 1 R}{7}$ & minus $\frac{96 -- 1 R}{7}$. quadratum igitur minoris cruris $\frac{9216 \dagger 1 Q - 192 R}{49}$ æquabitur ſummæ quæ fit ex quadrato minoris ſegmenti baſeos & quadratò perpendicularis, quæ quidem ſumma eſt 1 Q † 144. Quare 49 Q † 7056 erunt æqualia 9216 † 1 Q -- 192 R. Igitur 1 Q erit æquale. 45 -- 4 R. & fit 1 R æqualis 5. vnde reliqua non latebunt. Baſis erit 14, crura autem 13 & 15.

Per Algebram ſpecioſam, data B ſumma crurum, perpendiculari C & differentia ſegmentorum baſeos D. Ponatur minus ſegmentum baſis A. Ergo maius erit D † A, & baſis D † 2 A. quoniam verò eſt vt B ad D † 2 A ita D ad differentiam crurum, erit differentia curum $\frac{D \text{ quadr.} \dagger 2 A D}{B}$. Hæc ſi addatur & detrahatur ſummæ crurũ B, & aggregarum ſemiſſiſque diuidãtur bifariàm fient crura $\frac{B \text{ quadr.} \dagger D \text{ quadr.} \dagger 2 A D}{2 B}$ & $\frac{B \text{ quadr.} -- D \text{ quadr.} -- 2 A D}{2 B}$ Ergo huius minoris quadratum B quadr. quadr. † D quadr quadr.

† 4 A D cub. † 4 A quadr. D quadr. -- 4 A D B quadr. -- 2 D quadr. B quadr. diuiſibilia per 4 B quadr. æquabitur A quadr. † C quadr. Ac proinde numerator fractionis præcedentis eſt æqualis 4 A quadr. B quadr. † 4 C quadr. B quadr. ergo 4 B quadr. A quadr. -- 4 D quadra A quadr. æquatur B quadr. quadr. † D quadr. quadr. † 4 A D cub. -- 4 C quadr. B quadr. -- 4 A D B quadr. -- 2 D quadr. B quadr. vnde ſi diuidas poſteriorem iſtum numerum per 4 B quadr. -- 4 D quadr. fiet quotiens æqualis A quadr.

Hinc Canon.

Quadrato-quadratum ſummæ crurum necte cum quadrato-quadrato differentiæ ſegmentorum baſis : ſimiliter plano-planum ex quadrato perpendicularis in quadratum ſummæ crurum quadruplum adde duplo plano,plano ex quadrato ſummæ crurum in quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos : poſterius aggregatum tolle ex priore, & reſiduum diuide per quadruplum differentiam quadrati ſummæ crurum & quadrati differentiæ ſegmentorum baſis. Quotientem adde quadrato quòd fit à ſemiſſe differentiæ eorumdem ſegmentoruum, huius ſummæ radix quadrata ſi multetur ſupradicta ſemiſſe, exhibebit minus ſegmentum baſeos. Vnde reliqua non latebunt.

Vel.

Quadratum ſummæ crurum multiplica per quadrãtum ſummæ crurum multatum quadruplo quadrato perpendicularis & quadrato differentiæ ſegmentorum baſis: Productum diuide per differentiam quadrati ſummæ crurum & quadrati differentiæ ſegmentorum baſis, habebiſque quadratum baſeos trianguli quæſiti.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data A B æqualis ſummæ crurum alicuius trianguli, & B D differentia ſegmentorum baſeos factorum à perpendiculari, & A C perpendicularis. Super A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur B D, & in connexa D A ſumatur D G dupla A C, & inſcribatur B E æqualis B G, & accipiatur A E, ducaturque H F perpendicularis A D, Dico A F fore baſim trianguli quæſiti ſumpta eum M O æquali A F, & M N æquali B D, diuidatur N O bifariam in I, erigaturque perpendiculariter I P æqualis A C, & connectantur

Propositio XXXV.

Data ſumma crurum trianguli & altitudine ipſius, cum differentia ſegmentorum baſeos à perpendiculari factorum, inuenire triangulum ſpecie.

SIt ſumma crurum 28, perpendicularis 12, & differentia ſegmentorum baſis 4. Ponatur autem minus ſegmentum baſis 1R Ergo 1R † 4 erit maius ſegmentum. Et quoniam eſt vt ſumma ad baſim (dum. Baſis ſecatur à perpendiculari) ita differentià ſegmentorum baſeos ad differentiam crurum: fiat vt 28 ad 2R † 4, ita 4 ad aliud, & habebitur $\frac{2R \dagger 4}{7}$, pro differentia crurum. Igitur per canonem propoſ. 1. lib. 1. maius crus $\frac{100 \dagger 1R}{7}$ & minus $\frac{96 -\!- 1R}{7}$. quadratum igitur minoris cruris $\frac{9216 \dagger 1Q - 192R}{49}$ æquabitur ſummæ quæ fit ex quadrato minoris ſegmenti baſeos & quadratò perpendicularis, quæ quidem ſumma eſt 1Q † 144. Quare 49Q † 7056 erunt æqualia 9216 † 1Q -- 192R. Igitur 1Q erit æquale. 45 -- 4R. & fit 1R æqualis 5. vnde reliqua non latebunt. Baſis erit 14, crura autem 13 & 15.

Per Algebram ſpecioſam, data B ſumma crurum, perpendiculari C & differentia ſegmentorum baſeos D. Ponatur minus ſegmentum baſis A. Ergo maius erit D † A, & baſis D † 2A. quoniam verò eſt vt B ad D † 2A ita D ad differentiam crurum, erit differentia curum $\frac{D\ quadr. \dagger 2AD}{B}$. Hæc ſi addatur & detrahatur ſummæ crurũ B, & aggregatum ſemiſſiſque diuidãtur bifariàm fient crura $\frac{B\ quadr. \dagger D\ quadr. \dagger 2AD}{2B}$ & $\frac{B\ quadr. -\!- D\ quadr. -\!- 2AD}{2B}$ ergo huius minoris quadratum B quadr. quadr. † D quadr quadr.

† 4 A D cub. † 4 A quadr. D quadr. -- 4 A D B quadr. -- 2 D quad. B quadr. diuiſibilia per 4 B quadr. æquabitur A quadr. † C quadr. Ac proinde numerator fractionis præcedentis eſt æqualis 4 A quadr. B quadr. † 4 C quadr. B quadr. ergo 4 B quadr. A quadr. -- 4 D quadra A quadr. æquatur B quadr. quadr. † D quadr. quadr. † 4 A D cub. -- 4 C quadr. B quadr. -- 4 A D B quadr. -- 2 D quadr. B quadr. vnde ſi diuidas poſteriorem iſtum numerum per 4 B quadr. -- 4 D quadr. fiet quotiens æqualis A quadr.

Hinc Canon.

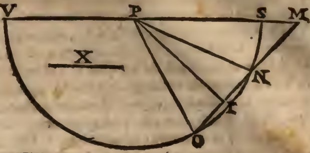
Quadrato-quadratum ſummæ crurum necte cum quadrato-quadrato differentiæ ſegmentorum baſis: ſimiliter plano-planum ex quadrato perpendicularis in quadratum ſummæ crurum quadruplum adde duplo plano, plano ex quadrato ſummæ crurum in quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos: poſterius aggregatum tolle ex priore, & reſiduum diuide per quadruplum differentiam quadrati ſummæ crurum & quadrati differentiæ ſegmentorum baſis. Quotientem adde quadrato quòd fit à ſemiſſe differentiæ eorumdem ſegmentoruum, huius ſummæ radix quadrata ſi multetur ſupradicta ſemiſſe, exhibebit minus ſegmentum baſeos. Vnde reliqua non latebunt.

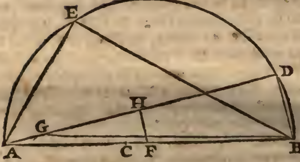
Vel.

Quadratum ſummæ crurum multiplica per quadratum ſummæ crurum multatum quadruplo quadrato perpendicularis & quadrato differentiæ ſegmentorum baſis: Productum diuide per differentiam quadrati ſummæ crurum & quadrati differentiæ ſegmentorum baſis, habebiſque quadratum baſeos trianguli quæſiti.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data A B æqualis ſummæ crurum alicuius trianguli, & B D differentia ſegmentorum baſeos factorum à perpendiculari, & A C perpendicularis. Super A B fiat ſemicirculus in quo inſcribatur B D, & in connexa D A ſumatur D G dupla A C, & inſcribatur B E æqualis B G, & accipiatur A E, ducaturque H F perpendicularis A D, Dico A F fore baſim trianguli quæſiti ſumpta cum M O æquali A F, & M N æquali B D, diuidatur N O bifariam in I, erigaturque perpendiculariter I P æqualis A C, & connectantur





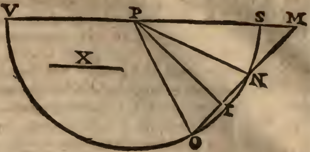
tur P O & P M, & centro. P interuallo P O (minori nempẽ ex duabus P O & P M) deſcribatur ſemicirculus V O S, tranſibit ille per punctum N (ob, *3* tertij Euclidis) linea V M æquatur lineis P M & P O, ſed quadratum lineæ M V eſt æquale quadruplo quadrato V S quadrato S M & duplo rectangulo V S M (per 4 ſecundi (quadratum autem V S eſt quadruplum quadrati P O, & quadratum P O æquatur quadratis P I & I O. Ergo quadratum V S eſt æquale quadruplo quadrato P I & quadruplo quadrato I O, cum vero O N dupla ſit I O erit quadratum O N quadruplum quadrati O I. Igitur quadratum V M æquatur quadrato P I quater quadrato O N quadrato O S & duplo rectanguli V S M. At rectangulum V S M cum quadrato S M eſt æquale rectangulo V M S hoc eſt (per *37* tertij) rectangulo O M N, ergo quadratum V M æquatur quadrato P I quater, quadrato N O rectangulo O M N & rectangulo V S M. Eſt verò rectangulum O M N æquale quadrato M N & rectangulo O N M, quod quidem rectangulum cum quadrato O N æquatur rectangulo M O N. Igitur quadra-

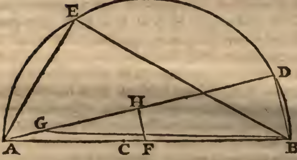
tum M V eſt æquale quadrato P I quater quadrato M N rectangulo M O N & rectangulo V S M. Cum autem rectangulum V M S æquetur rectangulo O M N, ſequitur rectangulum V S M ſuperare tali interuallo rectanguum O N M, quali quadratum M N ſuperat quadratũ M S (quia V S M rectangulum plus quadrato S M erit æquale rectangulo O N M plus quadrato N M, ergo quatuor iſtæ quantitales V S M rectangulum, O N M rectangulum, N M quadratum, & S M quadratum, ſunt arithmeticè proportionales) ac proinde rectangulum V S M æquatur rectangulo O M N & differentiæ quadrati M N à quadrato S M ergo cum quadratum O M æquale ſit rectangulis M N O & O M N. erit quadratum V M æquale quadrato P I quater, quadrata O M ſemel & quadrato N M minus quadrato S M. Proindeque quadratum V M multatum quadrato P I quater & quadrato M N eſt æquale quadrato O M minus quadrato S M. Sed vt V M ad O M ita N M ad S M. Igitur & harum quadrata ſunt proportionalia. Quoniam ergo vt totum quadratum V M ad totum quadratum O M, ita ablatum quadratum M N ad ablatum quadratum S M, erit & reliquum ad reliquem ad reliquum vt totum ad totum. Sed ex A B quadrato ſublatum eſt quadratum B D ſeu M N, & reliquum eſt quadratum A D: ſimiliter ex eodem quadrato A B ſublatum eſt quadratum B E, quod æquippollet quadruplo quadrato. perpendicularis A C, & quadrato. B D ſeu M N, ergo reliquum quadratum A E ſeu A H æquatur quadrato baſis minus quadrato M S. Ac proinde erit vt quadratum A D ad quadratum A H, ita quadratum A B ad quadratum baſis. Sed eſt vt A D ad A H ita A B ad A F. Ergo A F eſt baſis. & A B æqualis V M, & H F æqualis S M. Et triangulum P O M ſpecie quæſitum. Quod erat demoſtrandum.

Corollarium.

In quocumque triangulo cuius perpendicularis cadit intra, eſt vt ſumma crurum ad baſim, ita differentia ſegmentorum baſis ad differentiam crurum. Item vt quadratum ſummæ crurum ad quadratum baſeos, ita differentia quadrati ſummæ crurum & quadrati differentiæ ſegmentorum baſeos ad quadratum ſummæ crurum multatum quadrato differentiæ ſegmentorum baſis & quadruplo perpendicularis quadrato.

Si vero perpendicularis cadit extra, erit vt ſumma crurum ad baſim,





tur P O & P M, & centro. P interuallo P O (minori nēmpē ex duabus P O & P M) deſcribatur ſemicirculus V O S, tranſibit ille per punctum N (ob, *3* tertij Euclidis) linea V M æquatur lineis P M & P O, ſed quadratum lineæ M V eſt æquale quadruplo quadrato V S quadrato S M & duplo rectangulo V S M (per 4 ſecundi (quadratum autem V S eſt quadruplum quadrati P O, & quadratum P O æquatur quadratis P I & I O. Ergo quadratum V S eſt æquale quadruplo quadrato P I & quadruplo quadrato I O, cum vero O N dupla ſit I O erit quadratum O N quadruplum quadrati O I. Igitur quadratum V M æquatur quadrato P I quater quadrato O N quadrato O S & duplo rectanguli V S M. At rectangulum V S M cum quadrato S M eſt æquale rectangulo V M S hoc eſt (per 37 tertij) rectangulo O M N, ergo quadratum V M æquatur quadrato P I quater, quadrato N O rectangulo O M N & rectangulo V S M. Eſt verò rectangulum O M N æquale quadrato M N & rectangulo O N M, quod quidem rectangulum cum quadrato O N æquatur rectangulo M O N. Igitur quadra-

tum M V eſt æquale quadrato P I quater quadrato M N rectangulo M O N & rectangulo V S M. Cum autem rectangulum V M S æquetur rectangulo O M N, ſequitur rectangulum V S M ſuperare tali interuallo rectanguum O N M, quali quadratum M N ſuperat quadratũ M S (quia V S M rectangulum plus quadrato S M erit æquale rectangulo O N M plus quadrato N M, ergo quatuor iſtæ quantitales V S M rectangulum, O N M rectangulum, N M quadratum, & S M quadratum, ſunt arithmeticè proportionales) ac proinde rectangulum V S M æquatur rectangulo O M N & differentiæ quadrati M N à quadrato S M. ergo cum quadratum O M æquale ſit rectangulis M N O & O M N, erit quadratum V M æquale quadrato P I quater, quadrata O M ſemel & quadrato N M minus quadrato S M. Proindeque quadratum V M multatum quadrato P I quater & quadrato M N eſt æquale quadrato O M minus quadrato S M. Sed vt V M ad O M ita N M ad S M. Igitur & harum quadrata ſunt proportionalia. Quoniam ergo vt totum quadratum V M ad totum quadratum O M, ita ablatum quadratum M N ad ablatum quadratum S M, erit & reliquum ad reliquem ad reliquum vt totum ad totum. Sed ex A B quadrato ſublatum eſt quadratum B D ſeu M N, & reliquum eſt quadratum A D: ſimiliter ex eodem quadrato A B ſublatum eſt quadratum B E, quod æquippollet quadruplo quadrato. perpendicularis A C, & quadrato. B D ſeu M N, ergo reliquum quadratum A E ſeu A H æquatur quadrato baſis minus quadrato M S. Ac proinde erit vt quadratum A D ad quadratum A H, ita quadratum A B ad quadratum baſis. Sed eſt vt A D ad A H ita A B ad A F. Ergo A F eſt baſis. & A B æqualis V M, & H F æqualis S M. Et triangulum P O M ſpecie quæſitum. Quod erat demoſtrandum.

Corollarium.

In quocumque triangulo cuius perpendicularis cadit intra, eſt vt ſumma crurum ad baſim, ita differentia ſegmentorum baſis ad differentiam crurum. Item vt quadratum ſummæ crurum ad quadratum baſeos, ita differentia quadrati ſummæ crurum & quadrati differentiæ ſegmentorum baſeos ad quadratum ſummæ crurum multatum quadrato differentiæ ſegmentorum baſis & quadruplo perpendicularis quadrato.

Si vero perpendicularis cadit extra, erit vt ſumma crurum ad baſim,

ita baſis plus dupla diſtantia propinquioris extremitatis baſis à perpendiculari ad differentiam crurum. Item vt quadratum ſummæ crurum ad quadratum ſummæ ex baſi & dupla diſtentia propinquioris extremitatis baſeos à perpendiculari, ita differentia quadrati ſummæ crurum & quadrati baſeos. Ad quadratum ſummæ crurum multatum quadruplo perpendicularis quadrato & quadrato baſeos.

Cogneſces autem vtrum perpendicularis cadat intra an extra, ex data baſi, ſumma crurum & perpendiculari, hoc modo: ex quadrato ſummæ crurum tolle quadruplum quadratum perpendicularis & quadratum baſeos: ſi reſiduum, maius ſit quadrato baſeos, cadit perpendicularis extra triangulum: ſin minus cadit intra.

PROPOSITIO XXXVI.

Data differentia crurum alicuius trianguli & differentia ſegmentorum baſeos, cum altitudine inuenire triangulum ſpecie.

ESto data differentia crurum 2, differentia ſegmentorum baſis 4, & perpendicularis 12. Ponatur baſis IR ergo per canonem propoſ. 1 lib. 1. ſegmentum minus erit $\frac{1R - 4}{2}$. cuius quadratum additum quadrato perpendicularis fiat $\frac{592 \dagger 1Q - 8R}{4}$. pro quadrato minoris cruris. Et quià vt differẽtia crurũ 2 ad differentiam ſegmentorum baſeos 4 ita baſis ad ſummam crurum, erit hæc ſumma 2 R. Ergo cum habeamus differentiam crurum 2, facit per canonem ſupradictum minus latus 1 R --- 1, cuius quadratum 1Q † 1 -- 2 R cum ergo idem quadratum iam ſupra ſit inuentum, fiet æquatio inter illa duo, & tandem IR erit 14.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia crurum B & differentia ſegmentorum baſeos C, & perpendiculari D, ponatur A baſis ergo $\frac{A - C}{2}$ erit minus ſegmentum, cuius quadratum cum quadrato pẽdicularis æquabitur quadrato minoris cruris. Sed iſtud minus crus

eſt etiã C A-B quadr. ergo poſt debitas æquationes A quadratũ erit

2 B

æquale 4 D quadr. B quadr. + B quadr. C quad. -- B quadr quadr. diuiſibilibus per C quadr. -- B quadr. & faciendo vt B ad C ita C ad Z erit iterum A quadratum æquale 4 B D quadr. + Z B-

Z--B

quadr. -- B cub.

Hinc Canon.

Quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos diuide per differentiam crurum quotientem duc in quadratum differentiæ crurum, & productum adde ſolido ex quadruplo quadrato perpendiculdris in differentiam crurum: ex ſumma confecta tolle cubum eiuſdem crurum differentiæ, & reſiduum diuide per interuallum quotientis ſupradicti & differentiæ crurum, habebiſque, quadratum baſeos trianguli quæſiti.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data differentia crurum A B & differentia ſegmentorum baſis A C, perpendicularis V. Duæ differentiæ datæ ponatur ad angulos rectos, & nectatur B C, diuidaturque bifariam in F, & ducatur F G perpendicularis ad B C, protrahaturque donec occurrat B A productæ in puncto G. Tùm centro G interuallo G B vel G C, deſcribatur ſemicirculus B C D & accipiatur A E æqualis A B, deinde ſumatur A H dupla perpendicularis V, & ſuper connexa C H fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur H I æqualis A B differentiæ crurum, & connectatur C I. Poſtea fiat vt D E ad A E ita quadratum C I ad quadratum L M, ſumptaque M R æquali A C, diuidatur L R bifariàm in N, & ex puncto N erigatur perpendicularis N O æqualis lineæ datæ V, iunganturque L O & O M. Dico triangulum L O M eſſe ſpecie quæſitum. Nam centro O interuallo O L fiat ſemicirculus, tranſibit ille per R, eritque.

PM

ita baſiis plus dupla diſtantia propinquioris extremitatis baſis à perpendiculari ad differentiam crurum. Item vt quadratum ſummæ crurum ad quadratum ſummæ ex baſi & dupla diſtentia propinquioris extremitatis baſeos à perpendiculari, ita differentia quadrati ſummæ crurum & quadrati baſeos. Ad quadratum ſummæ crurum multatum quadruplo perpendicularis quadrato & quadrato baſeos.

Cogneſces autem vtrum perpendicularis cadat intra an extra, ex data baſi, ſumma crurum & perpendiculari, hoc modo: ex quadrato ſummæ crurum tolle quadruplum quadratum perpendicularis & quadratum baſeos: ſi reſiduum, maius ſit quadrato baſeos, cadit perpendicularis extra triangulum: ſin minus cadit intra.

PROPOSITIO XXXVI.

Data differentia crurum alicuius trianguli & differentia ſegmentorum baſeos, cum altitudine inuenire triangulum ſpecie.

ESto data differentia crurum 2, differentia ſegmentorum baſis 4, & perpendicularis 12. Ponatur baſis 1 R ergo per canonem propoſ. 1 lib. 1. ſegmentum minus erit $\frac{1R - 4}{2}$. cuius quadratum additum quadrato perpendicularis fiat $\frac{592 + 1Q - 8R}{4}$. pro quadrato minoris cruris. Et quià vt differētia crurū 2 ad differentiam ſegmentorum baſeos 4 ita baſis ad ſummam crurum, erit hæc ſumma 2 R. Ergo cum habeamus differentiam crurum 2, facit per canonem ſupradictum minus latus 1 R --- 1, cuius quadratum 1Q † 1 --- 2 R cum ergo idem quadratum iam ſupra ſit inuentum, fiet æquatio inter illa duo, & tandem 1 R erit 14.

Per Algebram ſpecioſam, data differentia crurum B & differentia ſegmentorum baſeos C, & perpendiculari D, ponatur A baſis ergo $\frac{A - C}{2}$ erit minus ſegmentum, cuius quadratum cum quadrato pēdicularis æquabitur quadrato minoris cruris. Sed iſtud minus crus

eſt etiã C A-B quadr. ergo poſt debitas æquationes A quadratū erit

2 B

æquale 4 D quadr. B quadr. † B quadr. C quad. -- B quadr. quadr. diuiſibilibus per C quadr. -- B quadr. & faciendo vt B ad C ita C ad Z erit iterum A quadratum æquale 4 B D quadr. † Z B-

Z---B

quadr. -- B cub.

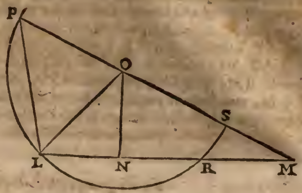
Hinc Canon.

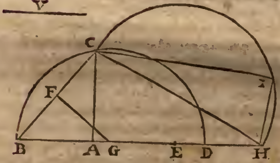
Quadratum differentiæ ſegmentorum baſeos diuide per differentiam crurum quotientem duc in quadratum differentiæ crurum, & productum adde ſolido ex quadruplo quadrato perpendicularis in differentiam crurum: ex ſumma confecta tolle cubum eiuſdem crurum differentiæ, & reſiduum diuide per interuallum quotientis ſupradicti & differentiæ crurum, habebiſque, quadratum baſeos trianguli quæſiti.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data differentia crurum A B & differentia ſegmentorum baſis A C, perpendicularis V. Duæ differentiæ datæ ponatur ad angulos rectos, & nectatur B C, diuidaturque biſariam in F, & ducatur F G perpendicularis ad B C, protrahaturque donec occurrat B A productæ in puncto G. Tùm centro G interuallo G B vel G C, deſcribatur ſemicirculus B C D & accipiatur A E æqualis A B, deinde ſumatur A H dupla perpendicularis V, & ſuper connexa C H fiat ſemicirculus, in quo inſcribatur H I æqualis A B differentiæ crurum, & connectatur C I. Poſtea fiat vt D E ad A E ita quadratum C I ad quadratum L M, ſumptaque M R æquali A C, diuidatur L R biſariàm in N, & ex puncto N erigatur perpendicularis N O æqualis lineæ datæ V, iunganturque L O & O M. Dico triangulum L O M eſſe ſpecie quæſitum. Nam centro O interuallo O L fiat ſemicirculus, tranſibit ille per R, eritque.

PM





PM ſumma crurum LO & OM. Eſt autẽ vt in præcedentẽ propoſitione PM ad LM ita RM ad SM. Quoniam verò factum eſt vt DE ad EA ita CI quadratũ ad quadratũ LM, erit cõponẽdo, vt DA ad EA ſeu AB, ita quadratum CI plus quadrato LM ad quadratum LM. Sed quadratum CH æquatur quadratis AH & AC, hoc eſt RM eſt autem AH dupla V (ſeu NO) ergo cum HI æquetur AB, & quadratum CH quadratis CI & HI, erunt duo quadrata CI & HI æqualia quadrato RM differentiæ ſegmentorum baſis, & quadruplo quadrato NO perpendicularis datæ. Ac proinde CI quadratum æquatur quadra RM & quadruplo quadrato NO, & quadrato LM minus quadrato differentiæ crurum. Sed ex præcedente propoſitione iſta omnia æquantur quadrato ſummæ crurum: ergo vt DA ad AB ſic quadratum PM ad qua-

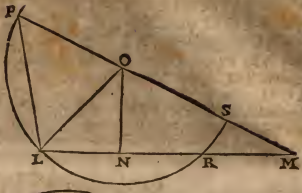
dratum L M. Sed vt quadratum P M ad quadratum L M, ita quadratum R M ad quadratum S M. Igitur vt D A ad A B ita quadratum R M ad quadratum S M. Sed vt D A ad A B ita quadratum A C ad quadratum A B. Ergo vt quadratum A C ad quadratum A B, ita quadratum R M ad quadratum S M. Sed A C eſt æqualis R M, igitur A B erit æqualis S M. Ac proinde triangulum L O M, cum habeat perpendicularem N O datam, differentiam ſegmentorum baſis R M datam, & differentiam crurum S M datam, erit ſpecie quæſitum. quod erat demonſtrandum.

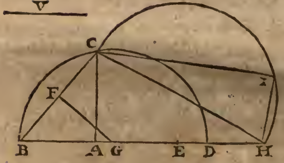
Propositio XXXVII.

Data baſe, altitudine, & ſumma crurum alicuius trianguli, inuenire triangulum ſpecie, quando perpendicularis cadit intra.

Esto baſis 14, perpendicularis 12, & ſumma crurum 28. experire primum per corollar. Prop. 35 an perpendicularis cadat intra, ex quadrato ſummæ crurum 784 tollendo quadratum baſis, & quadruplum quadratum perpendicularis (quæ duo ſimul faciunt 772) reſiduum 12 minus eſt quadrato baſeos, ergo perpendicularis cadit intra. Fiat itaque per idem corollar. vt quadratū ſummæ crurum 784 ad quadratum baſeos, 196, ita (ponendo prius 1 R pro differentiâ ſegmentorum baſis à perpendeculari factorum) differentiâ quadrati ſummæ crurum & quadrati differentiâ ſegmentorum baſis 784 --- 1Q ad aliud, & habebitur quadratum ſummæ crurum multatum quadrato differentiâ ſegmentorum baſis & quadruplo perpendicularis quadrato $\frac{143664 --- 196Q}{784}$, ſed illud idem eſt 208 --- 1Q. ergo eſt æquatio inter illa duo, ac proptereà 1Q eſt æquale 16. & 1 R eſt 4.

Per Algebram ſpecioſam, data B baſi, C perpendiculari, & ſumma crurum D, ponatur A pro differentiâ ſegmentorum baſeos. Ergo erit vt D quadr. ad B quadr. ita D quadr. --- A quadr. ad D quadr. A quadr. --- 4 C quadr. igitur multiplicando primum per vltimum erit productus D quadr. quadr. --- D quadr.





PM ſumma crurum LO & OM. Eſt autẽ vt in præcedẽtẽ propoſitione PM ad LM ita RM ad SM. Quoniam verò factum eſt vt DE ad EA ita CI quadratũ ad quadratũ LM, erit cõponẽdo, vt DA ad EA ſeu AB, ita quadratum CI plus quadrato LM ad quadratum LM. Sed quadratum CH æquatur quadratis AH & AC, hoc eſt RM eſt autem AH dupla V (ſeu NO) ergo cum HI æquetur AB, & quadratum CH quadratis CI & HI, erunt duo quadrata CI & HI æqualia quadrato RM differentiæ ſegmentorum baſis, & quadruplo quadrato NO perpendicularis datæ. Ac proinde CI quadratum æquatur quadra RM & quadruplo quadrato NO, & quadrato LM minus quadrato differentiæ crurum. Sed ex præcedente propoſitione iſta omnia æquantur quadrato ſummæ crurum: ergo vt DA ad AB ſic quadratum PM ad qua-

dratum L M. Sed vt quadratum P M ad quadratum L M, ita quadratum R M ad quadratum S M. Igitur vt D A ad A B ita quadratum R M ad quadratum S M. Sed vt D A ad A B ita quadratum A C ad quadratum A B. Ergo vt quadratum A C ad quadratum A B, ita quadratum R M ad quadratum S M. Sed A C eſt æqualis R M, igitur A B erit æqualis S M. Ac proinde triangulum L O M, cum habeat perpendicularem N O datam, differentiam ſegmentorum baſis R M datam, & differentiam crurum S M datam, erit ſpecie quæſitum. quod erat demonſtrandum.

Propoſitio XXXVII.

Data baſe, altitudine, & ſumma crurum alicuius trianguli, inuenire triangulum ſpecie, quando perpendicularis cadit intra.

Esto baſis 14, perpendicularis 12, & ſumma crurum 28. experire primum per corollar. Prop. 35 an perpendicularis cadat intra, ex quadrato ſummæ crurum 784 tollendo quadratum baſis, & quadruplum quadratum perpendicularis (quæ duo ſimul faciunt 772) reſiduum 12 minus eſt quadrato baſeos, ergo perpendicularis cadit intra. Fiat itaque per idem corollar. vt quadratū ſummæ crurum 784 ad quadratum baſeos, 196, ita (ponendo prius 1 R pro differentiâ ſegmentorum baſis à perpendeculari factorum) differentiâ quadrati ſummæ crurum & quadrati differentiâ ſegmentorum baſis 784 --- 1Q ad aliud, & habebitur quadratum ſummæ crurum multatum quadrato differentiâ ſegmentorum baſis & quadruplo perpendicularis quadrato

$$\frac{143664 ---- 196Q}{784}$$

ſed illud idem eſt 208 --- 1Q. ergo eſt æquatio inter illa duo, ac propterea 1Q eſt æquale 16. & 1 R eſt 4.

Per Algebram ſpecioſam, data B baſi, C perpendiculari, & ſumma crurum D, ponatur A pro differentiâ ſegmentorum baſeos. Ergo erit vt D qudr. ad B quadr. ita D quadr. ---- A quadr. ad D quadr. A quadr. --- 4 C quadr. igitur multiplicando primum per vltimum erit productus D quadr. quadr. ---- D quadr.

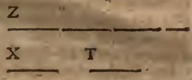
A quadr. -- 4 C quadr. D quadr. æqualis producto ſecundi per tertium B quadr. D quadr. -- B quadr. A quadr. & fit A quadr. æquale D quadr. quadr. -- 4 C quadr. D quadr. --- B quadr. D quadr.
―――――――――――――――――――――
D quadr. --- B quadr.

Hinc Canon.

Fiat vt quadratum ſummæ crurum multatum quadrato Baſeos ad quadratum ſummæ crurum, ita quadratum ſummæ crurum multatum quadrato baſeos & quadruplo quadrato perpendicularis ad aliud, & habebitur quadratum differentiæ ſegmentorum baſis. Vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit in figura propoſ. 35, O M baſis, P I perpendicularis & V M ſmuma laterum & tollatur more ſolito quadratum O M de quadrato V M & relinquatur quadratum Z deinde ex eodem quadrato V M tollatur quadratum P I quadruplum plus quadrato O M & reſtet quadratum X tum fiat vt Z ad V M ita X ad T, ſumaturque M N æqualis T.



& diuiſa N O bifariam in I erigatur I P perpendicularis ad O M & æqualis perpendiculari datæ, nectanturque O P & M P. Dico triangulum P O M eſſe ſpecie quæſitum. Nam ex coroll. propoſ. 35 eſt vt ſumma laterum ad baſim, ita differentia ſegmentorum baſis ad differentiam laterum. Ergo vt quadratum ſummæ laterum ad quadratum baſis ita quadratum differentiæ ſegmentorum baſis ad quadratum differentiæ laterum. Et diuidendo, vt Z ad quadratum baſis ita quadratum differentiæ ſegmentorum baſis multatum quadrato differentiæ laterum ad quadratum differentiæ laterum Et per conuerſionem rationis vt Z ad V M, ita quadratum differentiæ ſegmentorum baſis multatum quadrato differentiæ laterum ad quadratum differentiæ ſegmentorum baſis. Sed ex præcedenti propoſ. quadratum ſummæ laterum multatum quadruplo quadrato perpendicularis & quadrato baſis (hoc eſt ex praxi quadratũ X) æquatur quadrato differentiæ ſegmentorum baſis multato quadrato differentiæ laterum. Ergo vt quadratum Z ad quadratum V M ita

quadratum X ad quadratum differentiæ ſegmentorum baſis. Sed factum eſt vt Z ad VM ita X ad T. Igitur eorum quadrata erunt etiam proportionalia. Ac proinde T erit quadratum differentiæ ſegmentorum baſis. quod erat demonſtrandum.

Propositio XXXVIII.

Data baſe, altitudine, & ſumma crurum alicuius trianguli, inuenire triangulum ſpecie, quando perpendicularis cadit extra.

Esto baſis 4 perpendicularis 12 & ſumma laterum 28. ponatur autem differentia laterum 1R. ergo per coroll. propoſ. 35 erit vt 4 ad 1R ita 28 ad baſim 4 plus dupla diſtantiâ ad locum perpendicularis. Sed vt 4 ad 1R ita 28 ad 7R. igitur 7R æquatur baſi plus dupla illa diſtanti. Ergo quadratum ſummæ laterum 784 multatum quadruplo quadrato perpendicularis plus quadrato 7R ſeu 49Q ſeu 208 --- 49Q æquatur 16 --- 1Q. Igitur 1Q æquatur 4. & fit 1R æqualis 2.

Per Algebram ſpecioſam, data baſi B, perpendiculari C, & ſumma laterum D, ponatur A pro differentia laterum, ergo vt B ad A ita D ad AD/B. proindeque ſimili diſcurſu poſt repetitas operationes ſupradictas erit A quadratum æquale D quadr. B quadr. -- B quadr. quadr. --- B quadr. 4 C quadr. / D quadr. -- B quadr.

Hinc Canon.

Quadratum baſeos multiplica per quadratum ſummæ laterum multatum quadrato baſeos & quadruplo quadrato perpendicularis: productum diuide per differentiam quadrati ſummæ laterum & quadrati baſeos, habebis quadratum differentiæ laterum.

Hinc Effectio Geometrica

Sit in figura propoſ. 35 data baſis trianguli MN, perpendicularis

PI

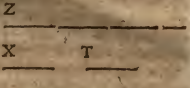
A quadr. -- 4 C quadr. D quadr. æqualis producto ſecundi per tertium B quadr. D quadr. --- B quadr. A quadr. & fit A quadr. æquale D quadr. quadr. -- 4 C quadr. D quadr. --- B quadr. D quadr.
————————————————————
D quadr. --- B quadr.

Hinc Canon.

Fiat vt quadratum ſummæ crurum multatum quadrato Baſeos ad quadratum ſummæ crurum, ita quadratum ſummæ crurum multatum quadrato baſeos & quadruplo quadrato perpendicularis ad aliud, & habebitur quadratum differentiæ ſegmentorum baſis. Vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit in figura propoſ. 35, OM baſis, PI perpendicularis & VM ſmuma laterum & tollatur more ſolito quadratum OM de quadrato VM & relinquatur quadratum Z deinde ex eodem quadrato VM tollatur quadratum PI quadruplum plus quadrato OM & reſtet quadratum X tum fiat vt Z ad VM ita X ad T, ſumaturque MN æqualis T



& diuiſa NO biſariam in I erigatur IP perpendicularis ad OM & æqualis perpendiculari datæ, nectanturque OP & MP. Dico triangulum POM eſſe ſpecie quæſitum. Nam ex coroll. propoſ. 35 eſt vt ſumma laterum ad baſim, ita differentia ſegmentorum baſis ad differentiam laterum. Ergo vt quadratum ſummæ laterum ad quadratum baſis ita quadratum differentiæ ſegmentorum baſis ad quadratum differentiæ laterum. Et diuidendo, vt Z ad quadratum baſis ita quadratum differentiæ ſegmentorum baſis multatum quadrato differentiæ laterum ad quadratum differentiæ laterum. Et per conuerſionem rationis vt Z ad VM, ita quadratum differentiæ ſegmentorum baſis multatum quadrato differentiæ laterum ad quadratum differentiæ ſegmentorum baſis. Sed ex præcedenti propoſ. quadratum ſummæ laterum multatum quadruplo quadrato perpendicularis & quadrato baſis (hoc eſt ex praxi quadratũ X) æquatur quadrato differentiæ ſegmentorum baſis multato quadrato differentiæ laterum. Ergo vt quadratum Z ad quadratum VM ita

quadratum X ad quadratum differentiæ ſegmentorum baſis. Sed factum eſt vt Z ad VM ita X ad T. Igitur eorum quadrata erunt etiam proportionalia. Ac proinde T erit quadratum differentiæ ſegmentorum baſis. quod erat demonſtrandum.

Propositio XXXVIII.

Data baſe, altitudine, & ſumma crurum alicuius trianguli, inuenire triangulum ſpecie, quando perpendicularis cadit extra.

ESto baſis 4 perpendicularis 12 & ſumma laterum 28. ponatur autem differentia laterum 1 R. ergo per coroll. propoſ. 35 erit vt 4 ad 1 R ita 28 ad baſim 4 plus dupla diſtantiâ ad locum perpendicularis. Sed vt 4 ad 1 R ita 28 ad 7 R. igitur 7 R æquatur baſi plus dupla illa diſtanti. Ergo quadratum ſummæ laterum 784 multatum quadruplo quadrato perpendicularis plus quadrato 7R ſeu 49Q ſeu 208---49Q æquatur 16---1Q. Igitur 1Q æquatur 4. & fit 1 R æqualis 2.

Per Algebram ſpecioſam, data baſi B, perpendiculari C, & ſumma laterum D, ponatur A pro differentia laterum, ergo vt B ad A ita D ad A D. proindeque ſimili diſcurſu poſt repetitas operationes

B

ſupradictas erit A quadratum æquale D quadr. B quadr.-- B quadr.

D quadr.--

quadr.--- B quadr. 4 C quadr.

B quadr.

Hinc Canon.

Quadratum baſeos multiplica per quadratum ſummæ laterum multatum quadrato baſeos & quadruplo quadrato perpendicularis: productum diuide per differentiam quadrati ſummæ laterum & quadrati baſeos, habebis quadratum differentiæ laterum.

Hinc Effectio Geometrica

Sit in figura propoſ. 35 data baſis trianguli M N, perpendicularis

PI

P I & ſumma laterum V M. Tollatur autem more ſolido quadratum M N ex quadrato V M, & relinquatur quadratum Z. ſimiliter ex eodem quadrato V M tollatur quadruplum quadratum P I plus quadrato M N & relinquatur X. deinde fiat vt Z ad X ita M N ad T. Dico T fore differentiam crurum, nam eſt vt V M ad O M ita M N ad S M ex corollar. propoſ. 35. ergo permutando vt V M ad M N ita O M ad S M. Igitur vt quadratum V M ad quadratum M N, ita quadratum O M ad quadratum S M, & diuidendo vt quadratum Z ad qudratum M N, ita quadratum O M multatum quadrato S M ad quadratum S M. ſed quadratum O M multatum quadrato S M æquatur quadrato V M multato quadruplo quadrato P I & quadrato M N (ſeu X) vt probatum eſt in propoſ. 35. ergo vt quadratum Z ad quadratum M N ita quadratum X ad quadratum S M. Sed factum eſt vt Z ad X ita M N ad T. Igitur permutando erit vt Z ad M N ita X ad T. Ergo T eſt differentià laterum quod erat demonſtrandum. Hinc autem facile eſt exhibere triangulum ſpecie. Quod eſt propoſitum.

Z

X T

Propositio XXXIX.

Data diametro circuli triangulo circumſcripti, ſumma crurum & eius altitudine, inuenire triangulum ſpecie.

Esto diameter $\frac{161}{4}$, ſumma crurum 28, & altitudine 12, ponatur vnum crus 1 R, ergo alterum erit 28 --- 1R. Igitur planum ſub cruribus erit 28R --- 1Q. At idem planum ex perpendiculari 12 in diametrum circuli circumſcripti $\frac{161}{4}$. ergo 28R --- 1Q æquatur 195 & fit 1R æqualis 13 vel 15. talia erunt crura quæſita.

Per Algebram ſpecioſam, data diametro B, ſumma crurum C & altitudine D, ponatur A pro vno crure, ergo C --- A erit alterum

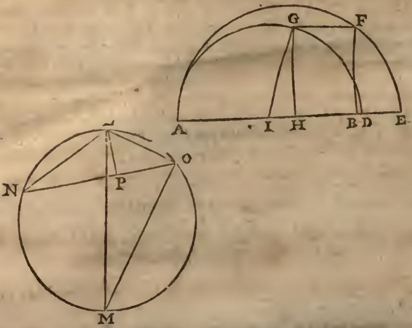
crus & planum ſub cruribus C A --- A quadr. qui proinde æquabitur B D. Igitur A quadr. æquabitur C A -- B D.

Hinc Canon.

Cape quadratum dimidiæ crurum ſummæ : inde tolle planam ſub diametro circuli circumſcripti & altitudine datã : reſidui radix ſupradicto addita & detracta dimidid, ẽxhibebit crura.

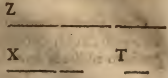
Hinc Effectio Geometrica.

Sit data diameter circuli triangulo circumſcripti A B, & ea biſariam diuiſa deſcribatur circulus, altitudo ſit B E, & ſumma cruram



A D. ſuper totam A E fiat ſemicirculus ad cuius circumferentiam erigatur perpendicularis B F & ex puncto F ducatur F G parallela A E. donec occurrat ſemicircumferentiæ factæ ſuper A D in puncto G, ex quo demitatur G H perpendiculariter. Tùm accepta L M æquali A B fiat circulus, & ex puncto L inſcribatur L N æqualis A H, & L O æqualis H D nectaturque N O. Dico N L O eſſe triangulum ſpecie quæſitum. Nam demiſſa L P perpendiculari ad

P I & ſumma laterum V M. Tollatur autem more ſolido quadratum M N ex quadrato V M, & relinquatur quadratum Z. ſimiliter ex eodem quadrato V M tollatur quadruplum quadratum P I plus quadrato M N & relinquatur X. deinde fiat vt Z ad X ita M N ad T. Dico T fore differentiam



crurum, nam eſt vt V M ad O M ita M N ad S M ex corollar. propoſ. 35. ergo permutando vt V M ad M N ita O M ad S M. Igitur vt quadratum V M ad quadratum M N, ita quadratum O M ad quadratum S M, & diuidendo vt quadratum Z ad qudratum M N, ita quadratum O M multatum quadrato S M ad quadratum S M. ſed quadratum O M multatum quadrato S M æquatur quadrato V M multato quadruplo quadrato P I & quadrato M N (ſeu X) vt probatum eſt in propoſ. 35. ergo vt quadratum Z ad quadratum M N ita quadratum X ad quadratum S M. Sed factum eſt vt Z ad X ita M N ad T. Igitur permutando erit vt Z ad M N ita X ad T. Ergo T eſt differentiâ laterum quod erat demonſtrandum. Hinc autem facile eſt exhibere triangulum ſpecie. Quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO XXXIX.

Data diametro circuli triangulo circumſcripti, ſumma crurum & eius altitudine, inuenire triangulum ſpecie.

Esto diameter 16$\frac{1}{4}$, ſumma crurum 28, & altitudine 12, ponatur vnum crus 1 R, ergo alterum erit 28 --- 1R. Igitur planum ſub cruribus erit 28R --- 1Q. At idem planum ex perpendiculari 12 in diametrum circuli circumſcripti 16$\frac{1}{4}$. ergo 28R --- 1Q æquatur 195 & fit 1R æqualis 13 vel 15. talia erunt crura quæſita.

Per Algebram ſpecioſam, data diametro B, ſumma crurum C & altitudine D, ponatur A pro vno crure, ergo C --- A erit alterum

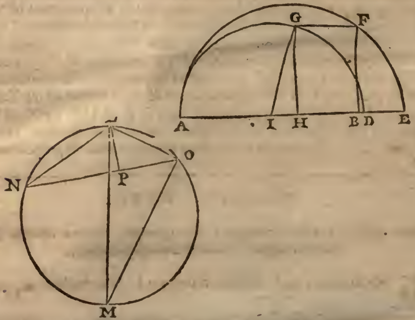
crus & planum ſub cruribus C A --- A quadr. qui proinde æquabitur B D. Igitur A quadr. æquabitur C A -- B D.

Hinc Canon.

Cape quadratum dimidiæ crurum ſummæ : inde tolle planam ſub diametro circuli circumſcripti & altitudine data : reſidui radix ſupradicto addita & detracta dimidid, exhibebit crura.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data diameter circuli trangulo circumſcripti A B, & ea biſariam diuiſa deſcribatur circulus, altitudo ſit B E, & ſumma cruram



A D. ſuper totam A E fiat ſemicirculus ad cuius circumferentiam erigatur perpendicularis B F & ex puncto F ducatur F G parallela A E. donec occurrat ſemicircumferentiæ factæ ſuper A D in puncto G, ex quo demitatur G H perpendiculariter. Tùm accepta L M æquali A B fiat circulus, & ex puncto L inſcribatur L N æqualis A H, & L O æqualis H D nectaturque N O. Dico N L O eſſe triangulum ſpecie quæſitum. Nam demiſſa L P perpendiculari ad

NO, & ducta MO, efficientur duo triangula LOM & NLP æquiangula, ſiquidem & anguli N & M eidem baſi inſiſtunt & anguli P & C recti ſunt. Ergo vt LM hoc eſt AB ad LO ſeu HB, ita NL ſeu AH ad LP. Sed iſta duo quadrata BF & GH ſunt æqualia. Quadratũ autem BF æquatur rectangulo ABE, & quadratum GH æquatur rectangulo AHD, per 8 ſexti, igitur per 16 ſexti, vt AB ad HD ita AH ad BE. Ergo BE & LP ſunt æquales per 9 quinti. Ac proinde cum BE ſit altitudo data erit quoque eadem altitudo LP. Igitur NLO eſt triangulum ſpecie quæſitum. Quod quod erat demonſtrandum.

Propositio XL.

Data ſemidiametro circuli triangulo inſcripti, cum eius altitudine & plano ex baſi in ſummam crurum inuenire triangulum ſpecie.

Esto data ſemidiameter 4, altitudo 12, & planum 392. Ponatur autem 1R pro baſi: & quia vt baſis ad ſummam crurum, ita ſemidiameter circuli inſcripti ad differentiam altitudinis & eiuſdem ſemidiametri, ſi fiat vt 4 ad 8 ita 1R ad aliud, habebuntur 2R pro ſumma crurum. Ergo multiplicando hanc crurum ſummam per baſim 1R fient 2Q æqualia plano dato 392. igitur 1R eſt æqualis 14.

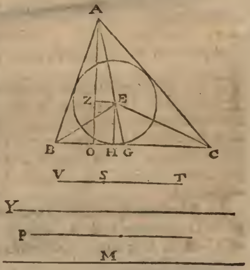
Per Algebram ſpecioſam, data ſemidiametro B, altitudine C, & plano D, ponatur baſis A, ergo per theorema ſuperius ſi fiat vt B ad C--B ita A ad aliud, fiet ſumma crurum $\frac{\text{C A} - \text{B A}}{\text{B}}$ igitur ſi hanc ſummam multiplices per baſim A erit productus $\frac{\text{C A quadr.} - \text{B A quadr.}}{\text{B}}$ æquale plano dato D. Ergo A quadratum poſt debitam reductionem æquabitur $\frac{\text{D B.}}{\text{B} - \text{C}}$

Hinc Canon.

Altitudinem datam multabis ſemidiametro circuli inſcripti, & per hoc reſiduum diuides ſolidum ſub plano dato in ſemidiametrum prodibitque in quotiente quadratum baſeos. Vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ſemidiameter circuli triangulo inſcripti V S, & altitudo trianguli V T, & quadratum Y æquale plano rectangulo ſub baſi in ſummam crurum. fiat S T ad V S ita quadratum Y ad quadratũ P. Deinde fiat vt P ad Y ita ad M. tum per 38 huius data baſe P, altitudine V T, & ſumma crurum M fiat triangulum ſpecie A B C. Dico eſſe illud triangulum quæſitum. inſcribatur enim circulus in triangulo & demittatur ex centro F lineæ F H perpendicularis ad baſim B C, hæc erit ſemidiameter circuli, ducta deinde perpendiculari A O & A F G per centrum ducatur C F & B F. Quoniam enim factum eſt P ad Y ita Y ad M erit rectangulum P M æquale quadrato Y ſed rectangulum P M æquatur rectangulo ſub B C in ſummam B A & A C igitur rectangulum ſub B C in ſummam B A & A C æquatur quadrato Y. Sed factum eſt quadratum Y ad quadratum P vt S T ad V S. Ergo vt rectangulum ſub B C in ſummam B A & A C ad quadratum B C ita S T ad V S. Sed per 1 ſexti vt rectangulum ſub B C in ſummam B A & A C ad quadratum B C ita eſt ſumma B A & A C ad B C. vt autem B A & A C ad B C ita eſt A F ad F G, ſiquidem cum C A & C B tangent circulum diuidetur angulus A C G bifariàm per lineam C F, ergo per 3 ſexti vt A C ad C G ita A F ad F G & propter eamdem rationem vt A F ad F G



ita

NO, & ducta MO, efficientur duo triangula LOM & NLP æquiangula, ſiquidem & anguli N & M eidem baſi inſiſtunt & anguli P & C recti ſunt. Ergo vt LM hoc eſt AB ad LO ſeu HB, ita NL ſeu AH ad LP. Sed iſta duo quadrata BF & GH ſunt æqualia. Quadratũ autem BF æquatur rectangulo ABE, & quadratum GH æquatur rectangulo AHD, per 8 ſexti, igitur per *16* ſexti, vt AB ad HD ita AH ad BE. Ergo BE & LP ſunt æquales per *9* quinti. Ac proinde cum BE ſit altitudo data erit quoque eadem altitudo LP. Igitur NLO eſt triangulum ſpecie quæſitum. Quod quod erat demonſtrandum.

Propositio XL.

Data ſemidiametro circuli triangulo inſcripti, cum eius altitudine & plano ex baſi in ſummam crurum inuenire triangulum ſpecie.

Esto data ſemidiameter 4, altitudo 12, & planum *392*. Ponatur autem 1 R pro baſi: & quia vt baſis ad ſummam crurum, ita ſemidiameter circuli inſcripti ad differentiam altitudinis & eiuſdem ſemidiametri, ſi fiat vt 4 ad 8 ita 1 R ad aliud, habebuntur 2R pro ſumma crurum. Ergo multiplicando hanc crurum ſummam per baſim 1 R fient 2Q æqualia plano dato *392*. igitur 1 R eſt æqualis 14.

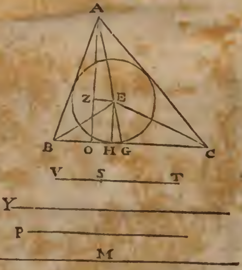
Per Algebram ſpecioſam, data ſemidiametro B, altitudine C, & plano D, ponatur baſis A, ergo per theorema ſuperius ſi fiat vt B ad C -- B ita A ad aliud, fiet ſumma crurum $\frac{CA \text{ -- } BA}{B}$ igitur ſi hanc ſummam multiplices per baſim A erit productus $\frac{CA \text{ quadr. -- } BA \text{ puadr.}}{B}$ æquale plano dato D. Ergo A quadratum poſt debitam reductionem æquabitur $\frac{DB}{B \text{ -- } C}$.

Hinc Canon.

Altitudinem datam multabis ſemidiametro circuli inſcripti, & per hoc reſiduum diuides ſolidum ſub plano dato in ſemidiametrum prodibitque in quotiente quadratum baſeos. Vnde reliqua non latebunt.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit data ſemidiameter circuli triangulo inſcripti V S, & altitudo trianguli V T, & quadratum Y æquale plano rectangulo ſub baſi in ſummam crurum. fiat S T ad V S ita quadratum Y ad quadratũ P. Deinde fiat vt P ad Y ita ad M. tum per 38 huius data baſe P, altitudine V T, & ſumma crurum M fiat triangulum ſpecie A B C. Dico eſſe illud triangulum quæſitum. inſcribatur enim circulus in triangulo & demittatur ex centro F lineæ F H perpendicularis ad baſim B C, hæc erit ſemidiameter circuli, ducta deinde perpendiculari A O & A F G per centrum ducatur C F & B F. Quoniam enim factum eſt P ad Y ita Y ad M erit rectangulum P M æquale quadrato Y ſed rectangulum P M æquatur rectangulo ſub B C in ſummam B A & A C igitur rectangulum ſub B C in ſummam B A & A C æquatur quadrato Y.



Sed factum eſt quadratum Y ad quadratum P vt S T ad V S. Ergo vt rectangulum ſub B C in ſummam B A & A C ad quadratum B C ita S T ad V S. Sed per 1 ſexti vt rectangulum ſub B C in ſummam B A & A C ad quadratum B C ita eſt ſumma B A & A C ad B C. vt autem B A & A C ad B C ita eſt A F ad F G, ſiquidem cum C A & C B tangent circulum diuidetur angulus A C G bifariàm per lineam C F, ergo per 3 ſexti vt A C ad C G ita A F ad F G & propter eamdem rationem vt A F ad F G ita

ita A B ad B G. Ergo componendo antecedentia & conſequentia erit vt B A plus A C ad B ita A F ad. Sed ducta Z F parallela baſi erit vt A F ad F G ita A Z ad Z O. Igitur vt A ad Z O ita quadratum Y ad quadratum P hoc eſt vt S T ad V S. Et componendo vt A O ad Z O ita V T ad V S. Sed A O ex conſtructione æqualis eſt V T, igitur Z O æqualis eſt V S, per *9* quinti. Ergo data ſemidiametro circuli, altitudine, & rectangulo ſub baſi in ſummam crurum, exhibitum eſt triangulum ſpecie. Quod erat & faciendum & demonſtrandum.

Propositio XLI.

Data baſe alicuius trianguli, cum ipſius altitudine, & differentia quadratorum à cruribus, inuenire triangulum ſpecie.

DEtur baſis 14, altitudo 12. & differentia quadratorum à cruribus, S *6*. Et primo quidem cognoſces inde an perpendicularis cadat intra, nec ne: ſiquidem diuidendo differentiam quadratorum à cruribus per baſim, ſi quotiens ſit minor baſe, perpēdicularis cadit intra triangulum: ſin autem fuerit maior, cadit extra. Diuide ergo 5*6* per 14, quotiens eſt 4, qui quoniam minor eſt 14, perpendicularis cadit intra.

Ponatur ergo 1 R pro maior parte baſis, ergo 1 Q † 144 erit maioris cruris quadratum. ſimiliter minor pars baſis erit 14 --- 1 R, cuius quadratum 1*9*6 † 1 Q --- 28 R iunctum quadrato perpendicularis 144 fiat 340 † 1 Q --- 28 R pro quadrato minoris cruris. hoc ergo quadratum ſi tollas à priori, reſtant 28 R -- 1*9*6 æqualià 5*6*. igitur 1 R eſt *9*.

Per Algebram ſpecioſam, data baſi B, altitudine C, & differentia quadratorum à cruribus quadrato D, ponatur maior pars baſis A ergo minor erit B -- A igitur A quadr. † C quadr. eſt æquale quadrato maioris cruris, & B quadr. † A quadr. --- 2 B A † C quadr. æquale quadrato minoris cruris. Quare ſi hoc ab illo tollas, reſtabit differentia quadratorum à cruribus 2 B A --- B quadr. hæc proinde æquabitur D, & poſt debitam metatheſim & diuiſionem fiet A

æqualis D † B quadr.

2 B

Quod ſi cognoueris perpendicularem cadere extra, data baſe 96 & perpendiculari ℞ 5719, & differentiâ quadratorum à cruribus 17856 pones 1 R pro diſtantia inter baſem & imum perpendicularis, ergo quadratum maioris cruris erit 1 Q † 9216 † 192 R † 5719 & quadratum minoris 1 Q † 5719. quare hoc poſteriori quadrato à priori ſublato reſtabit 9216 † 192 R æquale differentiæ datæ 17856. igitur 1 R eſt 45.

Per Algebram ſpecioſam, datis iiſdem, quæ ſupra data ſunt, ponatur A pro diſtantia inter baſem & perpendicularē. Ergo B quadr. † A quadr. † 2 BA † quadr. † C quadr. æquatur quadrato maioris cruris, & A quadr † C quadr. æquatur quadrata minoris cruris. Quare ſi hoc poſterius tollas à priori, reſtabit B quadr. † 2 B A æquale D quadr. ergo A æqualis eſt D quadr. --- B quadr.

2 B

Hinc Canon.

Quando perpendicularis cadit intra ſummā differentiæ datæ & quadrati baſeos diuide per duplam baſim & orietur maior pars baſis: ſi autem cadit extra differentiam eorumdem diuide per duplam baſim & orietur diſtantia inter baſim & perpendicularem. Ex alia poſitione qua in primo caſu poneretur differentia ſegmentorum baſis 1 R, in ſecundo autem compoſita ex baſe & dupla diſtantiâ baſeos à perpendiculari naſcitur.

Alter Canon facilimus.

In primo caſu, dum perpendicularis cadit intra, diuide differentiam datam per baſim, & fiet differentiâ ſegmentorum baſis. In ſecundo autem, dum cadit extra, diuide eamdem differentiam per baſim & fit compoſita ex baſi & dupla diſtantia baſis à perpendiculari.

Hinc Effectio Geometrica

Sit in figura propoſitionis 35. data baſis trianguli O M, perpendicularis P I, & X poſſit differentiam quadratorum à cruribus. Fiat autem vt O M ad X ita X ad N M. Quoniam N M minor eſt

ita A B ad B G. Ergo componendo antecedentia & conſequentia erit vt B A plus A C ad B ita A F ad. Sed ducta Z F parallela baſi erit vt A F ad F G ita A Z ad Z O. Igitur vt A ad Z O ita quadratum Y ad quadratum P hoc eſt vt S T ad V S. Et componendo vt A O ad Z O ita V T ad V S. Sed A O ex conſtructione æqualis eſt V T, igitur Z O æqualis eſt V S, per 9 quinti. Ergo data ſemidiametro circuli, altitudine, & rectangulo ſub baſi in ſummam crurum, exhibitum eſt triangulum ſpecie. Quod erat & faciendum & demonſtrandum.

PROPOSITIO XLI.

Data baſe alicuius trianguli, cum ipſius altitudine, & differentia quadratorum à cruribus, inuenire triangulum ſpecie.

DEtur baſis 14, altitudo 12. & differentia quadratorum à cruribus, 56. Et primo quidem cognoſces inde an perpendicularis cadat intra, nec ne: ſiquidem diuidendo differentiam quadratorum à cruribus per baſim, ſi quotiens ſit minor baſe, perpēdicularis cadit intra triangulum: ſin autem fuerit maior, cadit extra. Diuide ergo 56 per 14, quotiens eſt 4, qui quoniam minor eſt 14, perpendicularis cadit intra.

Ponatur ergo 1 R pro maior parte baſis, ergo 1 Q † 144 erit maioris cruris quadratum. ſimiliter minor pars baſis erit 14 --- 1 R, cuius quadratum 196 † 1 Q --- 28 R iunctum quadrato perpendicularis 144 fiat 340 † 1 Q --- 28 R pro quadrato minoris cruris. hoc ergo quadratum ſi tollas à priori, reſtant 28 R -- 196 æqualiā 56. igitur 1 R eſt 9.

Per Algebram ſpecioſam, data baſi B, altitudine C, & differentia quadratorum à cruribus quadrato D, ponatur maior pars baſis A ergo minor erit B -- A igitur A quadr. † C quadr. eſt æquale quadrato maioris cruris, & B quadr. † A quadr. --- 2 B A † C quadr. æquale quadrato minoris cruris. Quare ſi hoc ab illo tollas, reſtabit differentia quadratorum à cruribus 2 B A --- B quadr. hæc proinde æquabitur D, & poſt debitam metatheſim & diuiſionem fiet A

æqualis D † B quadr.
—————
2 B

Quod ſi cognoueris perpendicularem cadere extra, data baſe 96 & perpendiculari ℞ 5719, & differentiâ quadratorum à cruribus 17856 pones 1 R pro diſtantia inter baſem & imum perpendicularis, ergo quadratum maioris cruris erit 1 Q † 9216 † 192 R † 5719 & quadratum minoris 1 Q † 5719. quare hoc poſteriori quadrato à priori ſublato reſtabit 9216 † 192 R æquale differentiæ datæ 17856: igitur 1 R eſt 45.

Per Algebram ſpecioſam, datis iiſdem, quæ ſupra data ſunt, ponatur A pro diſtantia inter baſem & perpendicularē. Ergo B quadr. † A quadr. † 2 BA † quadr. † C quadr. æquatur quadrato maioris cruris, & A quadr † C quadr. æquatur quadrata minoris cruris. Quare ſi hoc poſterius tollas à priori, reſtabit B quadr. † 2 B A æquale D quadr. ergo A æqualis eſt D quadr. --- B quadr.
—————
2 B

Hinc Canon.

Quando perpendicularis cadit intra ſummã differentiæ datę & quadrati baſeos diuide per duplam baſim & orietur maior pars baſis: ſi autem cadit extra differentiam eorumdem diuide per duplam baſim & orietur diſtantia inter baſim & perpendicularem. Ex alia poſitione qua in primo caſu poneretur differentia ſegmentorum baſis 1 R, in ſecundo autem compoſita ex baſe & dupla diſtantiâ baſeos à perpendiculari naſcitur.

Alter Canon facilimus.

In primo caſu, dum perpendicularis cadit intra, diuide differentiam datam per baſim, & fiet differentiâ ſegmentorum baſis. In ſecundo autem, dum cadit extra, diuide eamdem differentiam per baſim & fit compoſita ex baſi & dupla diſtantia baſis à perpendiculari.

Hinc Effectio Geometrica

Sit in figura propoſitionis 35. data baſis trianguli O M, perpendicularis P I, & X poſſit differentiam quadratorum à cruribus. Fiat autem vt O M ad X ita X ad N M. Quoniam N M minor eſt

baſe perpendicularis cadit intra, reliqua igitur N O diuidatur bifariam in I & ex I erigatur perpendicularis æqualis P I & ab extremitatibus baſis datæ ducatur O P & M P. Dico P O M eſſe triangulum ſpeciè quæſitum. Primo enim quadratum P M æquatur P I & I M. ſimiliterque quadratum P O æquatur P I & O I per 47 primi. Quare ſi duo poſteriora quadrata tollantur aduobus prioribus reſtabit differentià quadratorum à cruribus. Ac proinde hæc differentià æquatur quadrato I M minus quadrato O I ſed quadratum O I æquale quadrato I N igitur quadratum I M multatum quadrato I N æquatur differentiæ quadratorum à cruribus. Sed per 4 ſecundi, quadratum I M æquatur quadratis partium I N & N M & duplo rectanguli ſub partibus, hoc autem duplum æquale eſt rectangulo M N O, igitur rectangulũ M N O plus quadrato N M eſt æquale differentiæ quadratorum à cruribus. Sed rectangulum M N O plus quadrato N M æquatur rectangulo O M N. igitur rectangulũ O M N æquatur differentiæ quadratorum O P & P M, ſed factum eſt vt O M ad X ita X ad N M. ergo per 17 ſexti. rectangulũ O M N æquatur quadrato X. Igitur data linea X potente differentiam quadratorum à cruribus, cum baſi O M, & perpendiculari P I, inuentum eſt triangulum ſpecie. Quod erat & faciendum & demonſtrandum.

Quod ſi daretur baſis N M, & perpendicularis P I, & differentia quadratorum quadratum x, & N M minor foret X, perpendicularis caderet extra. fieretque ſimiliter vt M N ad X ad aliud nempe M O, & differentia M O & M N diuideretur bifariàm in I. vnde erigeretur perpendicularis æqualis P I. & ex P. ad extremitates baſeos ducerentur duę lineæ, foretque triangulum P N M triangulum ſpeciè quæſitum. Demonſtratio eſt omnimò ſimilis præcedenti. Et vel inde manifeſta eſt quod P N ſit æqualis P O.

Propositio XLII.

Data baſi alicuius trianguli, & perpendiculari & ſumma quadratorum à cruribus inuenire triangulum ſpecie.

ADuertendum in primis quod ſi quadrata crurum ſuperent quadratum baſeos & duplum & quadratum perpendicularis, hanc perpendicularem cadere extra triangulum: quod ſi quadrata cru-

rum ſuperentur à quadrato baſis & duplo quadrato perpendicularis, cadet intra.

Detur itaque perpendicularis 12, baſis 14 & ſumma quadratorũ à cruribus *394*. Ergo ex prædicta ſuppoſitione perpendicularis cadit intra. ponatur autẽ 1 R pro vna parte baſeos in quam cadit perpendicularis. ergo altera erit 14 --- 1 R horum quadrata 1 Q & 1 Q † *196* --- 28 R iuncta duplo quadrato perpendicularis 288, efficietur agregatum 484 † 2 Q 28 R, æquale *394* & poſt debitam reductionem & diuiſionem fit 1 Q æquale 14 R --- 45.

Per Algebram ſpecioſam, data baſi B, perpendiculari C, & ſumma quadratorum D. Ponatur A vna pars baſeos ergo B --- A erit altera pars. Horum quadrata A quadr. & B quadr. † A quadr. -- 2 B A. Addita 2 C quadr. faciunt ſummam B quadr. † 2 A quadr. -- † 2 C quadr. --- 2 B A æqualem igitur poſt debitam reductionem ac diuiſionem fit A quadr. æquale D † 2 B A -- 2 C quadr. -- B quadr.

2

Altero autem in caſu, quo perpendicularis cadit extra, detur baſis *96*, perpendicularis ℞ *5719*, ſumma vero quadratorum *33344*. ponatur pars ſiue diſtantia inter baſim & perpendicularem 1 R ergo 1 Q † *5719* facit quadratum minoris cruris quadratum vero maioris eſt 1Q † *9216* † 192 R † *5719*. quæ duo ſimul iuncta faciunt ſummam 2 Q † 192 R † 20654 æqualem *33344*. & tandem fit 1 Q æquale *6345* -- *96* R. Et eſt 1 R 45.

Per Algebram ſpecioſam, datis iiſdem B. C. D vt ſupra ponatur pro diſtantia inter baſim & perpendicularem A ergo A quadr. † C quadr. æquatur quadrato minoris cruris. Similiter A quadr. † B quadr. † 2 B A † C quadr. æquale eſt quadrato maioris cruris Ergo 2 A quadr. † 2 C quadr. † 2 B A † B Q æqualia ſunt D igitur A quadr. erit æquale D -- 2 C quadr. -- B quadr. -- 2 B A.

2

Hinc Canon.

Quando perpendicularis cadit intra, duplum quadratum perpendicularis adde quadrato baſeos: ex ſumma tolle quadrata à cruribus & huius relicti ſemiſſem detrahe quadrato dimidiæ baſeos: iſtius enim reſidui poſterioris radix quadrata ſupradicto addita & detracta

dimidio

baſe perpendicularis cadit intra, reliqua igitur N O diuidatur biſariam in I & ex I erigatur perpendicularis æqualis P I & ab extremitatibus baſis datæ ducatur O P & M P. Dico P O M eſſe triangulum ſpeciè quæſitum. Primo enim quadratum P M æquatur P I & I M. ſimiliterque quadratum P O æquatur P I & O I per 47 primi. Quare ſi duo poſteriora quadrata tollantur aduobus prioribus reſtabit differentià quadratorum à cruribus. Ac proinde hæc differentià æquatur quadrato I M minus quadrato O I ſed quadratum O I æquale quadrato I N igitur quadratum I M multatum quadrato I N æquatur differentiæ quadratorum à cruribus. Sed per 4. ſecundi, quadratum I M æquatur quadratis partium I N & N M & duplo rectanguli ſub partibus, hoc autem duplum æquale eſt, rectangulo M N O, igitur rectangulũ M N O plus quadrato N M eſt æquale differentiæ quadratorum à cruribus. Sed rectangulum M N O plus quadrato N M æquatur rectangulo O M N. igitur rectangulũ O M N æquatur differentiæ quadratorum O P & P M, ſed factum eſt vt O M ad X ita X ad N M. ergo per 17 ſexti. rectangulũ O M N æquatur quadrato X. Igitur data linea X potente differentiam quadratorum à cruribus, cum baſi O M, & perpendiculari P I, inuentum eſt triangulum ſpecie. Quod erat & faciendum & demonſtrandum.

Quod ſi daretur baſis N M, & perpendicularis P I, & differentia quadratorum quadratum x, & N M minor foret X, perpendicularis caderet extra. fieretque ſimiliter vt M N ad X ad aliud nempe M O, & differentia M O & M N diuideretur biſariàm in I vnde erigeretur perpendicularis æqualis P I. & ex P. ad extremitates baſeos ducerentur duę lineæ, foretque triangulum P N M triangulum ſpeciè quæſitum. Demonſtratio eſt omnimò ſimilis præcedenti. Et vel inde manifeſtà eſt quod P N ſit æqualis P O.

Propositio XLII.

Data baſi alicuius trianguli, & perpendiculari & ſumma quadratorum à cruribus inuenire triangulum ſpecie.

Aduertendum in primis quod ſi quadrata crurum ſuperent quadratum baſeos & duplum & quadratum perpendicularis, hanc perpendicularem cadere extra triangulum: quod ſi quadrata cru-

rum ſuperentur à quadrato baſis & duplo quadrato perpendicularis, cadet intra.

Detur itaque perpendicularis 12, baſis 14 & ſumma quadratorũ à cruribus *394*. Ergo ex prædicta ſuppoſitione perpendicularis cadit intra. ponatur autẽ I R pro vna parte baſeos in quam cadit perpendicularis. ergo altera erit 14 --- I R horum quadrata I Q & I Q † *196* --- 28 R iuncta duplo quadrato perpendicularis 288, efficietur agregatum 484 † 2 Q 28 R, æquale *394* & poſt debitam reductionem & diuiſionem fit I Q æquale 14 R --- 45.

Per Algebram ſpecioſam, data baſi B, perpendiculari C, & ſumma quadratorum D. Ponatur A vna pars baſeos ergo B --- A erit altera pars. Horum quadrata A quadr. & B quadr. † A quadr. - 2 B A. Addita 2 C quadr. faciunt ſummam B quadr. † 2 A quadr. - † 2 C quadr. --- 2 B A æqualem igitur poſt debitam reductionem ac diuiſionem fit A quadr. æquale D † 2 B A -- 2 C quadr. -- B quadr.

2

Altero autem in caſu, quo perpendicularis cadit extra, detur baſis *96*, perpendicularis ℞ 5*719*, ſumma vero quadratorum *33344*. ponatur pars ſiue diſtantia inter baſim & perpendicularem I R ergo I Q † 5*719* facit quadratum minoris cruris quadratum vero maioris eſt I Q † *9216* † *192* R † 5*719*. quæ duo ſimul iuncta faciunt ſummam 2 Q † *192* R † 2*0654* æqualem *33344*. & tandem fit I Q æquale *6345* -- *96* R. Et eſt I R 45.

Per Algebram ſpecioſam, datis iiſdem B, C, D vt ſupra ponatur pro diſtantia inter baſim & perpendicularem A ergo A quadr. † C quadr. æquatur quadrato minoris cruris. Similiter A quadr. † B quadr. † 2 B A † C quadr. æquale eſt quadrato maioris cruris Ergo 2 A quadr. † 2 C quadr. † 2 B A † B Q æqualia ſunt D igitur A quadr. erit æquale D -- 2 C quadr. -- B quadr. -- 2 B A.

2

Hinc Canon.

Quando perpendicularis cadit intra, duplum quadratum perpendicularis adde quadrato baſeos: ex ſumma tolle quadrata à cruribus & huius relicti ſemiſſem detrahe quadrato dimidiæ baſeos: iſtius enim reſidui poſterioris radix quadrata ſupradicto addita & detracta

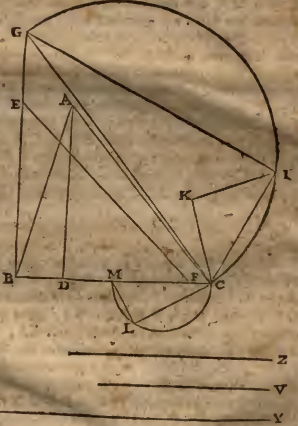
dimidio

dimidio, dabit partes baſeos, ac proinde locum perpendicularis.

Quando autem perpendicularis cadit extra, ex ſumma quadratorum à cruribus tolle quadratum baſis & duplum quadratum perpendicularis: reſidui ſemiſſem adde quadrato dimidiæ baſeos: iſtius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibet diſtantiam inter baſim & perpendicularem.

Hinc Effectio Geometrica.

Detur baſis trianguli Z, perpendicularis V, ſitque Y potens quadrata crurum, ſumatur BC æqualis Z, & BE perpendicularis ad BC & æqualis V. Ponaturque in BC (ſi opus eſt protracta) linea BF æqualis BE, & accipiatur BG æqualis FE, nectaturque GC. Et ſuper ipſam facto ſemiciculo inſcribatur GI æqualis Y. tùm ducta CI, fiat triangulum CIK iſoſceles & rectangulũ, diuiſaque BC bifariàm in M, deſcribatur ſuper CM ſemicirculus, in quo inſcribatur IL æqualis CK, & connexa ML ſumatur MD æqualis. ex D erigatur DA perpendiculariter æqualis V, & connectantur AB & AC. Dico triangulum ABC eſſe ſpecie quæſitum.

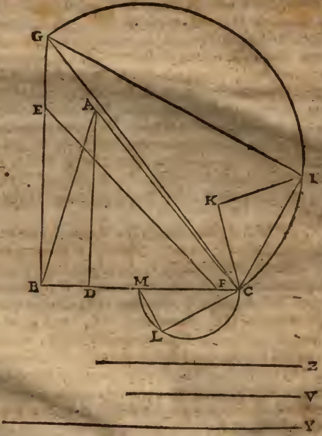


dimidio, dabit partes baſeos, ac proinde locum perpendicularis.

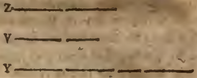
Quando autem perpendicularis cadit extra, ex ſumma quadratorum à cruribus tolle quadratum baſis & duplum quadratum perpendicularis: reſidui ſemiſſem adde quadrato dimidiæ baſeos: iſtius enim ſummæ radix quadrata ſupradicto multata dimidio exhibet diſtantiam inter baſim & perpendicularem.

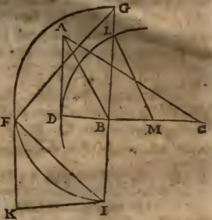
Hinc Effectio Geometrica.

Detur baſis trianguli Z, perpendicularis V, ſitque Y potens quadrata crurum, ſumatur BC æqualis Z, & BE perpendicularis ad BC & æqualis V. Ponaturque in BC (ſi opus eſt protracta) linea BF æqualis BE, & accipiatur BG æqualis FE, nectaturque GC. Et ſuper ipſam facto ſemiciculo inſcribatur GI æqualis Y. tùm ducta CI, fiat triangulum CIK iſoſceles & rectangulũ, diuiſaque BC bifariàm in M, deſcribatur ſuper CM ſemicirculus, in quo inſcribatur IL æqualis CK, & connexa ML ſumatur MD æqualis. ex D erigatur DA perpendiculariter æqualis V, & connectantur AB & AC. Dico triangulum ABC eſſe ſpecie quæſitum.



quadratis BD & DA, ſimiliterque quadratum AC æquabitur quadratis AD & DC, igitur trianguli ABC quadrata crurum AB & AC æqualia ſunt duplo quadrato AD & quadratis DB & DC. Sed quadratum DC, per 4 ſecundi, æquatur quadrato DB & quadrato BC & duplo rectanguli DBC. igitur quadrata crurum AB & AC æquantur duplo quadrato DA, duplo quadrato DB, quadrato BC, & duplo rectanguli DBC, eſt autem BG potens duplum quadrati DA, duplum verò quadrati DB cum duplo rectanguli DBC æquatur duplo rectanguli CDB, ergo quadrata crurum BA & CA æqualia ſunt quadrato BG, quadrato BC (hoc eſt quadrato CG & duplo rectanguli CDB. Sed CG æquatur GF. Igitur quadrata crurum æqualia quadrato GF. Et duplo rectanguli CDB.





Sed quoniam recta CB ſecta eſt bifariam in M, & ei adiecta eſt BD, erit per *6* ſcundi, rectangulum CDB cum quadrato BM æquale quadrato MD. Quadratum autem MD hoc eſt ML æquatur quadratis BM & BL, dempto vtrinque quadrato BM, reſtabit rectangulũ CDB æquale quadrato BL, hoc eſt IK, igitur duplum rectangulum CDB æquatur duplo quadrato KI, ſeu quadrato FI, ergo quadrata crurum AB & AC æquantur quadratis GF & FI, ſed quadrata GF & FI æqualià ſunt quadrato GI. Seu Y quadrato, igitur cum triangulum ABC habeat baſim BC æqualem Z, & altitudinem DA æqualem V, & quadrata crurum æqualia quadrato Y, eſt illud ſpeciè quæſitum. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XLIII.

Data trianguli area, & ſumma laterum, inuenire latera ſigillatim.

HOc Problema innumeras patitur ſolutiones: detur enim area *6*, & ſumma laterum 12, ponaturque I R pro vno latere, ergo reliqua duo erunt 12 -- I R. Pro vno ex illis duobus cape pro libito quemlibet numerum (modo ſit minor media parte laterum, vt nihil fiat contra 20 primi Euclidis) puta 4. igitur tertium lateris erit 8 -- I R & quoniam demonſtrat Clauius l. 4. Geom. Pract. c. 2. quod ſi tria trianguli latera ſigillatim tollantur ex ſemiſſe laterum, ſolidum ex tribus reſiduis in ſemiſſem æquatur quadrato areæ: ſi ex *6* dimidio laterum tollas 4 & I R & 8 -- 1 R, & reſidua 2 & *6* ---- 1 R & I R ---- 2 multiplices inter ſe & ſolidum inde factum 16 R -- 2 Q -- 24 ducas in ſemiſſem *6*, fiat *96* R. --- 12 Q --- 144. æqualia *36*. ergo I R eſt *3* vel 5. igitur tria latera ſunt 4. *3*. 5. alia tria ſunt $\frac{10}{3}$ $\frac{13}{3}$ ℞ $\frac{19}{36}$ $\frac{13}{3}$ · † ℞ $\frac{19}{36}$.

Per lAgebram ſpecioſam, data trianguli area B, & ſumma laterum C, & capto vno latere ad libitum D, ponatur ſecundum latus A ergo tertium erit C -- D -- A. & factis operationibus quos ſupra texuimus, erit tandem A quadratum æquale 8 A C D quadr. † 4 A-

C cub. -- 12 A D C quadr. † 4 D C cub. -- 16 B quadr. -- 4 C quadr.

4 C quadr. --- 8 C D.

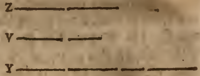
D quadr. -- C quadr. quadr.

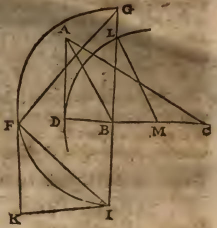
Hinc Canon.

Cape quamcumque quantitatem pro primo latere (modo nihil fiat contra 20 primi) huius quantitatis differentia à ſemiſſe laterum ad notetur, & huius differentiæ quadratum ducatur in quadratũ ſemiſſis eiuſdem: hic plano-planus addatur quadrato areæ datæ, & ſumma inde nata diuidatur per productum ex dimidio laterum in differentiam primò captam. Habebiturque planus quo ſublato ex quadrato dimidiæ differentiæ quantitatis primum captæ à ſumma late-

rum

quadratis BD & DA, ſimiliterque quadratum AC æquabitur quadratis AD & DC, igitur trianguli ABC quadrata crurum AB & AC æqualia ſunt duplo quadrato AD & quadratis DB & DC. Sed quadratum DC, per 4 ſecundi, æquatur quadrato DB & quadrato BC & duplo rectanguli DBC, igitur quadrata crurum AB & AC æquantur duplo quadrato DA, duplo quadrato DB, quadrato BC, & duplo rectanguli DBC, eſt autem BG potens duplum quadrati DA, duplum verò quadrati DB cum duplo rectanguli DBC æquatur duplo rectanguli CDB, ergo quadrata crurum BA & CA æqualia ſunt quadrato BG, quadrato BC (hoc eſt quadrato CG & duplo rectanguli CDB. Sed CG æquatur GF. Igitur quadrata crurum æqualia quadrato GF. Et duplo rectanguli CDB.





Sed quoniam recta CB ſecta eſt bifariam in M, & ei adiecta eſt BD, erit per 6 ſcundi, rectangulum CDB cum quadrato BM æquale quadrato MD. Quadratum autem MD hoc eſt ML æquatur quadratis BM & BL, dempto vtrinque quadrato BM, reſtabit rectangulũ CDB æquale quadrato BL, hoc eſt IK, igitur duplum rectangulum CDB æquatur duplo quadrato KI, ſeu quadrato FI, ergo quadrata crurum AB & AC æquantur quadratis GF & FI, ſed quadrata GF & FI æqualià ſunt quadrato GI. Seu Y quadrato, igitur cum triangulum ABC habeat baſim BC æqualem Z, & altitudinem DA æqualem V, & quadrata crurum æqualia quadrato Y, eſt illud ſpeciè quæſitum. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XLIII.

Data trianguli area, & ſumma laterum, inuenire latera ſigillatim.

HOc Problema innumeras patitur ſolutiones: detur enim area 6, & ſumma laterum 12, ponaturque 1 R pro vno latere, ergo reliqua duo erunt 12 --- 1 R. Pro vno ex illis duobus cape pro libito quemlibet numerum (modo ſit minor media parte laterum, vt nihil fiat contra 20 primi Euclidis) puta 4. igitur tertium lateris erit 8 -- 1 R & quoniam demonſtrat Clauius l. 4. Geom. Pract. c. 2. quod ſi tria trianguli latera ſigillatim tollantur ex ſemiſſe laterum, ſolidum ex tribus reſiduis in ſemiſſem æquatur quadrato areæ: ſi ex 6 dimidio laterum tollas 4 & 1 R & 8 -- 1 R, & reſidua 2 & 6 ---- 1 R & 1 R ---- 2 multiplices inter ſe & ſolidum inde factum 16 R -- 2 Q --- 24 ducas in ſemiſſem 6, fiat 96 R --- 12 Q --- 144. æqualia 36. ergo 1 R eſt 3 vel 5. igitur tria latera ſunt 4. 3. 5. alia tria ſunt $\frac{10}{3}$ $\frac{13}{3}$ ℞ $\frac{19}{36}$ $\frac{13}{3}$ † ℞ $\frac{19}{36}$.

Per lAgebram ſpecioſam, data trianguli area B, & ſumma laterum C, & capto vno latere ad libitum D, ponatur ſecundum latus A ergo tertium erit C -- D -- A. & factis operationibus quos ſupra texuimus, erit tandem A quadratum æquale 8 A C D quadr. † 4 A-
C cub. -- 12 A D C quadr. † 4 D C cub. -- 16 B quadr. -- 4 C quadr.
4 C quadr. --- 8 C D.
D quadr. -- C quadr. quadr.

Hinc Canon.

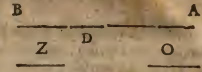
Cape quamcumque quantitatem pro primo latere (modo nihil fiat contra 20 primi) huius quantitatis differentia à ſemiſſe laterum ad notetur, & huius differentiæ quadratum ducatur in quadratũ ſemiſſis eiuſdem: hic plano-planus addatur quadrato areæ datæ, & ſumma inde nata diuidatur per productum ex dimidio laterum in differentiam primò captam. Habebiturque planus quo ſublato ex quadrato dimidiæ differentiæ quantitatis primum captæ à ſumma late-

rum

rum, reſidui radix quadrata eidem dimidiæ differentiæ detracta, dabit ſecundum latus trianguli vnde tertium non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data ſumma trium laterum trianguli A B, & ſit Z potens eiuſdem trianguli aream. Sumatur autem probaſe trianguli B D ad libitum minor temen ſemiſſe A B, vt nihil fiat contra 20 primi Euclidis. Tum fiat vt dimidia B D ad Z ita Z ad O. Deinde per 37 & 38 huius, ex data baſi B D, perpendiculari O, & ſumma crurum B D fiat triangulum, eritque factũ quod deſideratur. Etenim cum ſit vt media BD ad Z ita Z ad O,



erit quadratum Z ſeu area trianguli æqualis rectangulo ex media B D in O. Igitur cum BD ſumpta ſit pro baſe trianguli, & rectangulum ſub media baſi in perpendicularem æquætur area, erit neceſſario O perpendicularis.

Corollarium.

Si ex ſemiſſe ſummæ laterum trianguli tollantur tria latera ſigillatim erit vt rectangulum ex vno illorum reſiduorum in prædictam ſemiſſem ad trianguli aream, ita area trianguli ad rectangulum ſub duobus aliis reſiduis.

Hinc ſolues tria elegantiſſima problemata, quorum primum eſt eiuſmodi: Datis duabus diametris circuli circumſcripti & inſcripti triangulo, & plano ſub cruribus inuenire tria latera. ſint duæ diametri 16$\frac{1}{4}$ & 8, planum ſub cruribus 195. ponatur baſis I R, & diuidatur planum 195 per maiorem diametrum habebitur perpendicularis 12, per 39 huius, igitur ducta baſi I R in ſemiſſem perpendicularis, fiet area 6 R. Ac proinde quadratum area erit 36Q. Sed illud idem habebimus alio modo, per theorema præcedens, primo enim habetur ex præcedentibus ſemidiametrum circuli inſcripti ad perpendicularem eſſe vt baſis ad ſummam laterum triùm trianguli, ergo quoniam tria priora cognita ſunt, erit ſumma laterum trium 3 R. vnde ſi tollas baſim, reſtabit ſumma crurum 2 R. Sed planus ſub cruribus eſt 195. igitur, per 26 primi, crura ſigillatim erunt I R + ℞ (I Q -- 195) & I R -- ℞ (I Q --- I Q) ac proinde habentur

tria latera trianguli, quæ ſingula ſi tollantur ex ſemiſſe ſummæ laterum, extabunt tria reſidua $\frac{1R}{2}$, & $\frac{1R \text{ --- ℞}(1Q \text{ -- } 195)}{2}$ & $\frac{1R \dagger\text{- ℞}(1Q \text{ --- } 195)}{2}$ ergo plano planus ſub illis tribus reſiduis & ſemiſſe ſummæ laterum qui eſt $\frac{585Q}{4}$ --- $\frac{9QQ}{16}$ æquatur quadrato areæ 36 Q. Igitur poſt debitam reductionem 1 R eſt æqualis 14 & crura 13 & 15.

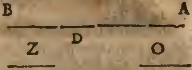
Problema ſecundum: *Data baſe alicuius trianguli & perpendiculari & plano crurum, inuenire crura.* Eſto baſis 14, perpendicularis 12, & planum ſub cruribus 195. ponatur autem ſumma crurum 2 R. Igitur ſumma trium laterum erit 2 R † 14, *cuius dimidium* 1 R † 7. Seruetur. tùm per Canonem propſ. 26 lib. 1. data ſumma crurum 2 R & plano ſub cruribus 195, inueniantur crura, 1 R † ℞-(1Q --- 195) & 1 R --- ℞(1Q --- 195) ergo habentur tria latera ſigillatim, quæ ſi auferantur à dimidio mox ſeruato 1 R -- 7. habentur trià reſidua 7 † ℞(1 Q -- 195) & 7 -- ℞(1 Q -- 195) & 1 R -- 7. quæ cum ſemiſſe faciunt plano-planum 193 Q -- 11956 -- 1 QQ æqualem quadrato areæ trianguli. At area habetur multiplicando dimidiam baſem 7 in perpendicularem 12, fiat enim 84, cuius quadratum eſt 7056. ergo 1 QQ eſt æquale 293 Q -- 19012 -- igitur 1 R ſiue ſiue ſemiſſis crurum eſt 14 cum igitur ſumma crurum poſita ſit 2 R, erit hæc 28, quæ per canon. propoſ. 26. lib. 1. diuiſa in duas partes mutua multiplicatione facientes 195, exhibet crura ſigillatim 13 & 15.

Problema Tertium. Dato vno crure, & diametro circuli inſcripti, cum ratione baſis ad crurum ſummam, inuenire ſingula latera trianguli. Eſto crus datum 13. diameter 8, & ratio baſis ad crurum ſummam 1 ad 2. fiat autem vt 1 ad 2, ita ſemidiameter 4 ad aliud, & habebitur 8, quod ſi cum ſemidiametro iungatur, fiet perpendicularis trianguli 12. ponatur baſis 1 R, igitur ob rationem datam 1 ad 2, erit ſumma crurum 2 R. At vnum crus eſt 13, ergo alterum erit 2 R -- 13 habentur itaque ſingula trianguli latera quibus ſublatis ex ſemiſſe $\frac{3R}{2}$ erunt tria reſidua $\frac{3R}{2}$ -- 13 & 13 -- $\frac{1R}{2}$ & $\frac{1R}{2}$ quæ

rum, reſidui radix quadrata eidem dimidiæ differentiæ detracta, dabit ſecundum latus trianguli vnde tertium non latebit.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto data ſumma trium laterum trianguli A B, & ſit Z potens eiuſdem trianguli aream. Sumatur autem probaſe trianguli B D ad libitum minor temen ſemiſſe A B, vt nihil fiat contra 20 primi Euclidis. Tum fiat vt dimidia B D ad Z ita Z ad O. Deinde per *37* & *38* huius, ex data baſi B D, perpendiculari O, & ſumma crurum B D fiat triangulum, eritque factũ quod deſideratur. Etenim cum ſit vt media B D ad Z ita Z ad O,



erit quadratum Z ſeu area trianguli æqualis rectangulo ex media B D in O. Igitur cum B D ſumpta ſit pro baſe trianguli, & rectangulum ſub media baſi in perpendicularem æquatur area, erit neceſſario O perpendicularis.

Corollarium.

Si ex ſemiſſe ſummæ laterum trianguli tollantur tria latera ſigillatim, erit vt rectangulum ex vno illorum reſiduorum in prædictam ſemiſſem ad trianguli aream, ita area trianguli ad rectangulum ſub duobus aliis reſiduis.

Hinc ſolues tria elegantiſſima problemata, quorum primum eſt eiuſmodi: Datis duabus diametris circuli circumſcripti & inſcripti triangulo, & plano ſub cruribus inuenire tria latera. ſint duæ diametri *161* & 8, planum ſub cruribus *195*. ponatur baſis I R, & diui-

4

datur planum *195* per maiorem diametrum habebitur perpẽndicularis 12, per *39* huius, igitur ducta baſi I R in ſemiſſem perpendicularis, fiet area *6* R. Ac proinde quadratum area erit *36* Q. Sed illud idem habebimus alio modo, per theorẽma præcedens, primo enim habetur ex præcedentibus ſemidiametrum circuli inſcripti ad perpendicularem eſſe vt baſis ad ſummam laterum triũm trianguli, ergo quoniam tria priora cognita ſunt, erit ſumma laterum trium *3* R. vnde ſi tollas baſim, reſtabit ſumma crurum 2 R. Sed planus ſub cruribus eſt *195*. igitur, per *26* primi, crura ſigillatim erunt I R + ℞ (I Q -- *195*) & I R -- ℞ (I Q --- I Q) ac proinde habentur

tria latera trianguli, quæ ſingula ſi tollantur ex ſemiſſe ſummæ laterum, extabunt tria reſidua $\frac{1R}{2}$, & $\frac{1R \text{---} ℞(1Q \text{--} 195)}{2}$ & $\frac{1R + ℞(1Q \text{---} 195)}{2}$ ergo plano-planus ſub illis tribus reſiduis & ſemiſſe ſummæ laterum qui eſt $\frac{585Q}{4} \text{---} \frac{9QQ}{16}$ æquatur quadrato areæ 36 Q. Igitur poſt debitam reductionem I R eſt æqualis 14 & crura 13 & 15.

Problema ſecundum: Data baſe alicuius trianguli & perpendiculari & plano crurum, inuenire crura. Eſto baſis 14, perpendicularis 12, & planum ſub cruribus 195. ponatur autem ſumma crurum 2 R. Igitur ſumma trium laterum erit 2 R + 14, cuius dimidium 1 R † 7. Seruetur. tùm per Canonem propſ. 26 lib. 1. data ſumma crurum 2 R & plano ſub cruribus 195, inueniantur crura, 1 R † ℞ (1Q --- 195) & 1 R --- ℞ (1Q --- 195) ergo habentur tria latera ſigillatim, quæ ſi auferantur à dimidio mox ſeruato 1 R -- 7. habentur tria reſidua 7 † ℞ (1Q --- 195) & 7 -- ℞ (1Q -- 195) & 1 R -- 7. quæ cum ſemiſſe faciunt plano-planum 193 Q -- 11956 -- 1 QQ æqualem quadrato areæ trianguli. At area habetur multiplicando dimidiam baſem 7 in perpendicularem 12, fiat enim 84, cuius quadratum eſt 7056. ergo 1 QQ eſt æquale 293 Q -- 19012 -- igitur I R ſiue ſiue ſemiſſis crurum eſt 14 cum igitur ſumma crurum poſita ſit 2 R, erit hæc 28, quæ per canon. propoſ. 26. lib. 1. diuiſa in duas partes mutua multiplicatione facientes 195, exhibet crura ſigillatim 13 & 15.

Problema Tertium. Dato vno crure, & diametro circuli inſcripti, cum ratione baſis ad crurum ſummam, inuenire ſingula latera trianguli. Eſto crus datum 13. diameter 8, & ratio baſis ad crurum ſummam 1 ad 2. fiat autem vt 1 ad 2, ita ſemidiameter 4 ad aliud, & habebitur 8, quod ſi cum ſemidiametro iungatur, fiet perpendicularis trianguli 12. ponatur baſis I R, igitur ob rationem datam 1 ad 2, erit ſumma crurum 2 R. At vnum crus eſt 13, ergo alterum erit 2 R -- 13 habentur itaque ſingula trianguli latera quibus ſublatis ex ſemiſſe $\frac{3R}{2}$ erunt tria reſidua $\frac{3R \text{ -- } 13}{2}$ & $\frac{13 \text{ -- } 1R}{2}$ & $\frac{1R}{2}$ quæ

cum eadem ſemiſſe facient plano planum æqualem quadrato areæ 36Q. Ac proinde poſt dibitam reductionem & diuiſionem, erit I Q æquale $\frac{624}{18}$ R -- $\frac{10416}{36}$. & fit I R æqualis 14. crura autem erunt 13 & 15.

Propositio XLIV.

Dato triangulo efficere rectangulum æquale & iſoperimetrum.

ESto triangulum quodpiam habens tria latera 11. 13. 20. inquiratur perpendicularis $\frac{33}{5}$ ſuper latus 20. igitur area trianguli erit *66*. ſumma laterum eſt 44; cuius dimidium 22. Et quia cuiuſcumque rectanguli duo latera circa angulum rectum æqualia ſunt duobus aliis lateribus, diuidendus erit numerus 22 in duos qui efficiant *66* per mutuam ſui multiplicationem. Ponatur ergo I R pro vno, erit alter 22 -- 1 R, quibus inuicem ductis fiet 22R -- 1 Q. æqualis *66*. igitur I Q æquatur 22R -- *66*. & fit I R æqualis 11 † ℞ 55 vel 11 -- ℞ 55. talia erunt latera circa rectum.

Per Algebram ſpecioſam, data B ſumma laterum, & C potente aream trianguli, ponatur A pro vno latere rectanguli ergo aliud latus ipſi propinquum erit $\frac{B -- A}{2}$. igitur $\frac{BA -- 2A \text{ quadr.}}{2}$ æquatur C & fit A quadr. æquale $\frac{BA -- C}{2}$.

Hinc Canon.

Cape quadrantem ſummæ laterum, & ex huius quadrantis quadrato tolle aream trianguli datam: reſidui radix quadrata ſupradicto quadranti addita & detracta exhibebit duo latera rectanguli circa rectum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit datum in figura propoſitionis 40, triangulum ABC cui oporteat efficere rectangulum æquale & iſoperimetrum. Si inter

baſim B C & ſemiſſem perpendicularis, inueniatur media proportionalis, hæc media poterit aream trianguli. iam ſi media perimeter trianguli, diuidatur in duas partes taliter, vt efficiant rectangulum æquale quadrato mediæ iſtius, dico rectangulum illud eſſe quæſitum. Primò eſt æquale trianguli, quia eſt æquale quadrato mediæ, quod eidem areæ æquatur. deinde eſt etiam iſoperimetrum, ſiquidem duo latera circa rectum æquantur dimidiæ perimetro trianguli. Ergo latera opoſita ſint iſtis æqualia, erunt quatuor rectanguli latera æqualia toti perimetro trianguli. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XLV.

Dato Pentagono regulari inuenire rectangulum Iſoperimerimetrum & æquale ſemiſſe areæ ipſius.

ESto datum Pentagonum cuius latus 4. Euclidis l. 14. prop. 3. demonſtrat quadratum lateris Pentagoni & quadratum latera duo pentagoni ſubtendentis, quintupla eſſe quadrati à ſemidiametro eiuſdem circuli. Deinde idem Euclidis l. 13. prop. 8. docet duas lineas quæ ſubtendunt angulos vicinos pentagoni æquilateri, ſecare ſe inuicem media & extrema ratione, & maius ſegmentum æquale eſſe lateri pentagoni. Quia ergo latus pentagoni eſt 4, ſeu maius ſegmentum ſubtendentis, ponatur minus ſegmentum 1 R, igitur tota ſubtendens erit 4 † 1 R. Ac proinde ſi hæc ſubtendens ducatur in 1 R, fiet 4 R † 1 Q æqualis 16 quadrato maioris ſegmenti. Et fit 1 R æqualis ℞ 20 -- 2 tale igitur erit minus ſegmentum ſubtendentis, cui ſi addas 4 maius ſegmentum, erit tota ſubtendens ℞ 20 † 2. huius quadratum 24 † ℞ 320 additum 16, quadrato lateris, facit 40 † ℞ 320 quintuplum quadrati à ſemidiametro. Ergo ſemidiameter erit ℞ (8 † ℞ 64 / 5) igitur ſi ex eius quadrato tollas quadratum dimidii lateris, reſtabit quadratum perpendicularis à centro in latus 4 † ℞ 64 / 5. & quoniam area cuiuſlibet figu-

cum eadem ſemiſſe facient plano planum æqualem quadrato areæ 36 Q. Ac proinde poſt dibitam reductionem & diuiſionem, erit I Q æquale $\frac{624}{18}$ R -- $\frac{10416}{36}$. & fit I R æqualis 14. crura autem erunt 13 & 15.

Propositio XLIV.

Dato triangulo efficere rectangulum æquale & iſoperimetrum.

Esto triangulum quodpiam habens tria latera 11. 13. 20. inquiratur perpendicularis $\frac{33}{5}$ ſuper latus 20. igitur area trianguli erit *66*. ſumma laterum eſt 44, cuius dimidium 22. Et quia cuiuſcumque rectanguli duo latera circa angulum rectum æqualia ſunt duobus aliis lateribus, diuidendus erit numerus 22 in duos qui efficiant *66* per mutuam ſui multiplicationem. Ponatur ergo I R pro vno, erit alter 22 -- 1 R, quibus inuicem ductis fiet 22R -- 1 Q. æqualis *66*. igitur I Q æquatur 22 R -- *66*. & fit I R æqualis 11 † ℞ 55 vel 11 -- ℞ 55. talia erunt latera circa rectum.

Per Algebram ſpecioſam, data B ſumma laterum, & C potentè aream trianguli, ponatur A pro vno latere rectanguli ergo aliud latus ipſi propinquum erit $\frac{B}{2}$ -- A. igitur $\frac{B\,A}{2}$ -- A quadr. æquatur C & fit A quadr. æquale $\frac{B\,A}{2}$ -- C.

Hinc Canon.

Cape quadrantem ſummæ laterum, & ex huius quadrantis quadrato tolle aream trianguli datam: reſidui radix quadrata ſupradicto quadranti addita & detracta exhibebit duo latera rectanguli circa rectum.

Hinc Effectio Geometrica.

Sit datum in figura propoſitionis 40, triangulum A B C cui oporteat efficere rectangulum æquale & iſoperimetrum. Si inter

baſim B C & ſemiſſem perpendicularis, inueniatur media proportionalis, hæc media poterit aream trianguli. iam ſi media perimeter trianguli, diuidatur in duas partes taliter, vt efficiant rectangulum æquale quadrato mediæ iſtius, dico rectangulum illud eſſe quæſitum. Primò eſt æquale trianguli, quia eſt æquale quadrato mediæ, quod eidem areæ æquatur. deinde eſt etiam iſoperimetrum, ſiquidem duo latera circa rectum æquantur dimidiæ perimetro trianguli. Ergo latera opoſita ſint iſtis æqualia, erunt quatuor rectanguli latera æqualia toti perimetro trianguli. Quod erat demonſtrandum.

Propositio XLV.

Dato Pentagono regulari inuenire rectangulum Iſoperimerimetrum & æquale ſemiſſe areæ ipſius.

ESto datum Pentagonum cuius latus 4. Euclidis l. 14. prop. 3. demonſtrat quadratum lateris Pentagoni & quadratum latera duo pentagoni ſubtendentis, quintupla eſſe quadrati à ſemidiametro eiuſdem circuli. Deinde idem Euclidis l. 13. prop. 8. docet duas lineas quæ ſubtendunt angulos vicinos pentagoni æquilateri, ſecare ſe inuicem media & extrema ratione, & maius ſegmentum æquale eſſe lateri pentagoni. Quia ergo latus pentagoni eſt 4, ſeu maius ſegmentum ſubtendentis, ponatur minus ſegmentum 1 R, igitur tota ſubtendens erit 4 † 1 R. Ac proinde ſi hæc ſubtendens ducatur in 1 R, fiet 4 R † 1 Q æqualis 16 quadrato maioris ſegmenti. Et fit 1 R æqualis ℞ 20 -- 2 tale igitur erit minus ſegmentum ſubtendentis, cui ſi addas 4 maius ſegmentum, erit tota ſubtendens ℞ 20 † 2. huius quadratum 24 † ℞ 320 additum 16, quadrato lateris, facit 40 † ℞ 320 quintuplum quadrati à ſemidiametro. Ergo ſemidiameter erit ℞ (8 † ℞ 64/5) igitur ſi ex eius quadrato tollas quadratum dimidii lateris, reſtabit quadratum perpendicularis à centro in latus 4 † ℞ 64/5. & quoniam area cuiuſlibet figu-

ſiæ regularis æquatur rectangulo ſub ea perpendiculari in dimidiam figuræ perimetrum, ſi quadrati mox inuenti radicem quadratam ducas in 10, habebis aream pentagoni ℞ (400 † ℞ 128000) huius areæ ſemiſſis eſt ℞ (100 † ℞ 8000) data ergo hæc ſemiſſi areæ, tamquam producto, & dimidio pentagoni circuitu, 10, diuidatur 10 (per 26 lib. 1.) in duos qui producant hanc ſemi-aream. Duo numeri ſunt 5 † 1 ℞ (25 -- ℞ (100 † ℞ 8000) & 5 -- ℞ (25 -- ℞ (100 † ℞ 8000). talia erunt rectanguli quæſiti latera circa rectum.

Per Algebram ſpecioſam, data B pro circuitu polygoni, & C pro ſemiſſe areæ, ponatur A pro vno latere quæſiti rectanguli. Ergo $\frac{C}{A}$ erit alterũ. igitur duo illa latera æquantur B. Ac proinde 2 Aquadr.

2

† 2 C æquatur A B. Igitur A quadratum eſt æquale $\frac{A\,B - 2\,C}{2}$. hic ſuppoſuimus priorem partem operationis, ſtudentes breuitati.

Hinc Canon.

Quadrato-quadratum lateris dati duc in 25, & productum diuide per 16, habebiſque partem rationalem binomij: deinde quadrato-quadrato-quadratum eiuſdem lateris duo in 125, productum diuide per 64, quotientis radix quadrata iuncta cum parte rationali mox inuenta, dabit quadratum areæ pentagoni, & ita radix vniuerſalis iſtius aggregati erit area. Ergo ſi diuidas ſemiſſem pentagoni in duas partes, quæ efficiant ſemi-areã prædictam, habebis latera rectanguli quæſita circa rectum. Id autem fit per l. 1. prop. 26.

Hinc Effectio Geometrica.

Dati pentagoni regularis inueniatur centrum, ex quo in latus demitatur perpendicularis. Huius perpendicularis & quadratis perimetri pentagoni accipiatur media proportionalis, quæ ſit B. Tùm per 26 lib. 1 data ſemiperimetro, quadrato B quod à duabus ſemiperimetri partibus fieri debet, inueniãtur illæ duæ partes. Dico factum eſſe quod poſtulatur. primò enim rectangulum quod fit à duabus illis partibus eſt iſoperimetrum pentagono, quia duo eius latera circa rectũ ſunt æqualia ſemiperimetro pentagoni. deinde ſuperfici-

Mmm

es eius æquatur quadrato B quod eſt æquale rectangulo ex perpendiculari in quadrãtem perimetri pentagoni. ergo cum rectangulum ex perpendiculari in ſemiperimetrum ſit æqualę ſuperficiei totius pentagoni, rectangulum ex ea in quadrantem, æquabitur ſemi areæ. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc patet quomodo fieri poſſit rectangulum iſoperimetrum cuicumque polygono regulari, & cuicumque eius parti æquale: modo pars illa non detur maior iuſto.

Propositio XLVI.

Inuenire rectangulum iſoperimetrum dodecagono æquilatero dato, quod circulo circumſcribitur, & æquale triangulo æquilatero, quod eidem circulo inſcribitur

DEtur latus dodecagoni æquilateri circulo circũſcripti 8 - ℞ 48. ergo dimidium latus erit 4 -- ℞ 12. & quia diameter circuli ſuperat latus trianguli inſcripti dimidio latere dodecægoni circumſcripti, erit diameter circuli in noſtro problemate 4 & latus trianguli inſcripti ℞ 12. quoniam verò ſemper quadratum lateris trianguli æquilateri ſe habet ad quadratum perpendicularis ſe habet vt 4 ad 3, erit quadratum iſtius perpendicularis 9 & ipſa perpendicularis 3. ergo quoniam dimidia baſis eſt ℞ 3, ſi ipſam ducas in perpendicularem 3 fiet area trianguli æquilateri ℞ 27. ſi itaque dimidium dodecagoni circuitum diuidas in duas partes, ita vt efficiant mutuo ductu ℞ 27, habebis propoſitum. Id vere fit per 26 lib. 1. nam poſito latere dodecagoni 8 -- ℞ 48 circulus dodecagoni dimidius erit 48 --- ℞ 1728 cuius dimidium eſt 24 --- ℞ 432. ex huius quadrato 1008 --- ℞ 5995328 tolle ℞ 27 & fit pro reſiduo 1008 -- ℞ 1005823. ergo duo latera rectanguli quæſita ſunt 24 -- ℞ 432 † ℞ (1008 ℞ - 1008 -- ℞ 1005723) & 24 -- ℞ 432 -- ℞ (1008 -- ℞ 1005723).

Per Algebram ſpecioſam, poſito latere dodecagoni B & area trianguli C. erit ſemiſſis circuitus dodecagoni 6 B, & eius quadrans 3 B. ergo 3 B. † ℞ (9 B quadr. -- C) & 3 B -- ℞ (9 B quadr. -- C) erunt latera quæſita.

ræ regularis æquatur rectangulo ſub ea perpendiculari in dimidiam figuræ perimetrum, ſi quadrati mox inuenti radicem quadratam ducas in 10, habebis aream pentagoni ℞ (400 † ℞ 128000) huius areæ ſemiſſis eſt ℞ (100 † ℞ 8000) data ergo hæc ſemiſſi areæ, tamquam producto, & dimidio pentagoni circuitu, 10, diuidatur 10 (per 26 lib. 1.) in duos qui producant hanc ſemi-aream. Duo numeri ſunt 5 † 1 ℞ (25 -- ℞ (100 † ℞ 8000) & 5 -- ℞ (25 -- ℞ (100 † ℞ 8000). talia erunt rectanguli quæſiti latera circa rectum.

Per Algebram ſpecioſam, data B pro circuitu polygoni, & C pro ſemiſſe areæ, ponatur A pro vno latere quæſiti rectanguli. Ergo $\frac{C}{A}$ erit alterũ. igitur duo illa latera æquantur $\frac{B}{2}$. Ac proinde 2 Aquadr. † 2 C æquatur A B. Igitur A quadratum eſt æquale $\frac{A B -- 2 C}{2}$, hic ſuppoſuimus priorem partem operationis, ſtudentes breuitati.

Hinc Canon.

Quadrato quadratum lateris dati duc in 25, & productum diuide per 16, habebiſque partem rationalem binomij: deinde quadrato-quadrato-quadratum eiuſdem lateris duo in 125, productum diuide per 64, quotientis radix quadrata iuncta cum parte rationali mox inuenta, dabit quadratum areæ pentagoni, & ita radix vniuerſalis iſtius aggregati erit area. Ergo ſi diuidas ſemiſſem pentagoni in duas partes, quæ efficiant ſemi-areã prædictam, habebis latera rectanguli quæſita circa rectum. Id autem fit per l. 1. prop. 26.

Hinc Effectio Geometrica.

Dati pentagoni regularis inueniatur centrum, ex quo in latus demittatur perpendicularis. Huius perpendicularis & quadratis perimetri pentagoni accipiatur media proportionalis, quæ ſit B. Tùm per 26 lib. 1 data ſemiperimetro, quadrato B quod à duabus ſemiperimetri partibus fieri debet, inueniãtur illæ duæ partes. Dico factum eſſe quod poſtulatur. primò enim rectangulum quod fit à duabus illis partibus eſt iſoperimetrum pentagono, quia duo eius latera circa rectũ ſunt æqualia ſemiperimetro pentagoni. deinde ſuperfici-

es eius æquatur quadrato B quod eſt æquale rectangulo ex perpendiculari in quadrantem perimetri pentagoni. ergo cum rectangulum ex perpendiculari in ſemiperimetrum ſit æquale ſuperficiei totius pentagoni, rectangulum ex ea in quadrantem, æquabitur ſemi areæ. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Hinc patet quomodo fieri poſſit rectangulum iſoperimetrum cuicumque polygono regulari; & cuicumque eius parti æquale: modo pars illa non detur maior iuſto.

Propositio XLVI.

Inuenire rectangulum iſoperimetrum dodecagono æquilatero dato, quod circulo circumſcribitur, & æquale triangulo æquilatero, quod eidem circulo inſcribitur

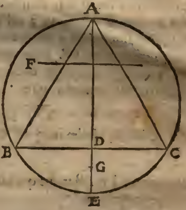
Detur latus dodecagoni æquilateri circulo circũſcripti 8 - ℞ 48. ergo dimidium latus erit 4 -- ℞ 12. & quia diameter circuli ſuperat latus trianguli inſcripti dimidio latere dodecægoni circumſcripti, erit diameter circuli in noſtro problemate 4 & latus trianguli inſcripti ℞ 12. quoniam verò ſemper quadratum lateris trianguli æquilateri ſe habet ad quadratum perpendicularis ſe habet vt 4 ad 3, erit quadratum iſtius perpendicularis 9 & ipſa perpendicularis 3. ergo quoniam dimidia baſis eſt ℞ 3, ſi ipſam ducas in perpendicularem 3 fiet area trianguli æquilateri ℞ 27. ſi itaque dimidium dodecagoni circuitum diuidas in duas partes, ita vt efficiant mutuo ductu ℞ 27, habebis propoſitum. Id vere fit per 26 lib. 1. nam poſito latere dodecagoni 8 -- ℞ 48 circulus dodecagoni dimidius erit 48 --- ℞ 1728 cuius dimidium eſt 24 --- ℞ 432. ex huius quadrato 1008 --- ℞ 5995328 tolle ℞ 27 & fit pro reſiduo 1008 -- ℞ 1005823. ergo duo latera rectanguli quæſita ſunt 24 -- ℞ 432 † ℞ (1008 ℞ 1008 -- ℞ 1005723) & 24 -- ℞ 432 -- ℞ (1008 -- ℞ 1005723).

Per Algebram ſpecioſam, poſito latere dodecagoni B & area trianguli C. erit ſemiſſis circuitus dodecagoni 6 B, & eius quadrans 3 B. ergo 3 B. † ℞ (9 B quadr. -- C) & 3 B -- ℞ (9 B quadr. -- C) erunt latera quæſita.

Hinc Canon.

Fiat vt 1 -- ℞ $\frac{3}{4}$ ad 1 ita dimidium latus dodecagoni circumſcripti ad aliud & fiet diameter circuli dodecagono inſcripti. Quæ multatã latere dimidio dodecagoni, dabit latus trianguli æquilateri inſcripti dodrans diametri erit perpendicularis trianguli, ac proinde trianguli area non latebit. Iam vero ſi ſextuplum, lateris dodecagoni diuidas in duo ſegmenta, quæ mutuo ductu efficiant aream trianguli mox inuentam, habebis latera rectanguli circa rectum. Id autem fit per 26 primi.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit circulus circa quem Intelligatur dodecagonum, & in quo per 5 quarti inſcribatur triangulum æquilaterum, ex cuius vno angulo A ducatur perpendicularis A E ad latus oppoſitum B C, tranſibit illa per centrum & ideo erit diameter circuli. Sumatur autem A G æqualis A B & ſit D punctum in quo A L ſecat B C. Sitque F media proportionalis inter B D & A D. Tũ duo decupla G E diuidatur in duas partes, per 26 primi, quarum rectangulũ æquatur quadrato F. Dico rectangulum illud eſſe quod poſcitur. Nam cum A E ſuperet A B interuallo G E, cumque eadem A E ſuperet A B dimidio latere dodecagoni circumſcripti, vt demonſtrat Dominus Hardy ſubtiliſſimus Geometra, erit G E dimidium dodecagoni circumſcripti latus, ergo duo decupla G E æquatur ſemiſſi peripheriæ dodecagoni circumſcripti, Cum igitur rectanguli facti latera duo circa rectum æquentur iſti ſemiſſi, quatuor latera illius erunt æqualia peripheriæ dodecagoni. Sed hoc idem rectangulum æquatur quadrato F, quadratum vero F eſt æquale rectangulo ſub B D & B A, ſeu triangulo A B C, igitur rectangulum factum eſt iſoperimetrum dodecagono

circumſcripto & æquale triangulo inſcripto quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVII.

Diuidere quantitatem datam quater in duo ſegmenta ita vt maius ſegmentum primæ diuiſionis habeat datam rationem ad minus ſecundæ: at maius ſegmentum ſecundæ habeat rationem datam ad minus tertiæ: & rurſus maius tertiæ ad minus quartæ habeat quoque rationem datam & tandem maius quartæ ad minus primæ habeat etiam rationem datam.

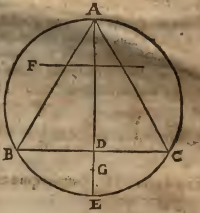
Sit datus numerus 360 diuidendus quater ita vt maius ſegmentum primæ diuiſionis ad minus ſecundæ ſit vt 2 ad 1, maius ſecundæ ad minus tertiæ vt 3 ad 1, maius tertiæ ad minus quartæ vt 8 ad 1 & maius quartæ ad maius primæ vt 9 ad 2. Ponatur maius ſegmentum primæ 1 R ergo minus erit 360 -- 1 R. & quia maius primæ ad minus ſecundæ debet eſſe vt 2 ad 1 erit minus ſecundæ $\frac{1 R}{2}$ ergo maius ſecundæ $\frac{720 -- 1 R}{2}$. Quoniam vero eſt vt maius ſecundæ ad minus tertiæ ita 3 ad 1. erit minus tertiæ $\frac{720 -- 1 R}{6}$ ergo maius $\frac{1440 + 1 R}{6}$. Rurſus quia maius tertiæ ad minus quartæ debet eſſe vt 8 ad 1, erit minus quartæ $\frac{1440 + 1 R}{48}$ ergo maius $\frac{15840 -- 1 R}{48}$. hoc igitur ad minus ſegmentum primo 360 -- 1 R debet eſſe vt 9 ad 2. ergo productus ſub extremis $\frac{31680 -- 2 R}{48}$ æquari debet producto ſub mediis 324 -- 9 R. ac proinde 1 R eſt 288 vnde minus ſegmentum primæ diuiſionis erit 72. maius ſecundæ 216, minus ſecundæ 144. maius tertiæ 288, minus tertiæ 72, maius quartæ 324, & minus quartæ 36. & ſatisfaciunt quæſtioni.

per

Hinc Canon.

Fiat vt 1 -- ℞ $\frac{3}{4}$ ad 1 ita dimidium latus dodecagoni circumſcripti ad aliud & fiet diameter circuli dodecagono inſcripti. Quæ multatã latere dimidio dodecagoni, dabit latus trianguli æquilateri inſcripti dodrans diametri erit perpendicularis trianguli, ac proinde trianguli area non latebit. Iam vero ſi ſextuplum, lateris dodecagoni diuidas in duo ſegmenta, quæ mutuo ductu efficiant aream trianguli mox inuentam, habebis latera rectanguli circa rectum. Id autem fit per 26 primi.

Hinc Effectio Geometrica.



Sit circulus circa quem Intelligatur dodecagonum, & in quo per 5 quarti inſcribatur triangulum æquilaterum, ex cuius vno angulo A ducatur perpendicularis A E ad latus oppoſitum B C, tranſibit illa per centrum & ideo erit diameter circuli. Sumatur autem A G æqualis A B & ſit D punctum in quo A L ſecat B C. Sitque F media proportionalis inter B D & A D. Tũ duo decupla G E diuidatur in duas partes, per 26 primi, quarum rectangulũ æquatur quadrato F. Dico rectangulum illud eſſe quod poſcitur. Nam cum A E ſuperet A B interuallo G E, cumque eadem A E ſuperet A B dimidio latere dodecagoni circumſcripti, vt demonſtrat Dominus Hardy ſubtiliſſimus Geometra, erit G E dimidium dodecagoni circumſcripti latus, ergo duo decupla G E æquatur ſemiſſi peripheriæ dodecagoni circumſcripti, Cum igitur rectanguli facti latera duo circa rectum æquentur iſti ſemiſſi, quatuor latera illius erunt æqualia peripheriæ dodecagoni. Sed hoc idem rectangulum æquatur quadrato F, quadratum vero F eſt æquale rectangulo ſub B D & B A, ſeu triangulo A B C, igitur rectangulum factum eſt iſoperimetrum dodecagono

circumſcripto & æquale triangulo inſcripto quod erat demonſtrandum.

Propositio XLVII.

Diuidere quantitatem datam quater in duo ſegmenta ita vt maius ſegmentum primæ diuiſionis habeat datam rationem ad minus ſecundæ: at maius ſegmentum ſecundæ habeat rationem datam ad minus tertiæ: & rurſus maius tertiæ ad minus quartæ habeat quoque rationem datam & tandem maius quartæ ad minus primæ habeat etiam rationem datam.

Sit datus numerus 360 diuidendus quater ita vt maius ſegmentum primæ diuiſionis ad minus ſecundæ ſit vt 2 ad 1, maius ſecundæ ad minus tertiæ vt 3 ad 1, maius tertiæ ad minus quartæ vt 8 ad 1 & maius quartæ ad maius primæ vt 9 ad 2. Ponatur maius ſegmentum primæ I R ergo minus erit 360 -- I R. & quia maius primæ ad minus ſecundæ debet eſſe vt 2 ad 1 erit minus ſecundæ $\frac{\text{I R}}{2}$ ergo maius ſecundæ $\frac{720 - \text{I R}}{2}$. Quoniam vero eſt vt maius ſecundæ ad minus tertiæ ita 3 ad 1. erit minus tertiæ $\frac{720 - \text{I R}}{6}$ ergo maius $\frac{1440 + \text{I R}}{6}$. Rurſus quia maius tertiæ ad minus quartæ debet eſſe vt 8 ad 1, erit minus quartæ $\frac{1440 + \text{I R}}{48}$ ergo maius $\frac{15840 - \text{I R}}{48}$. hoc igitur ad minus ſegmentum primo 360 -- I R debet eſſe vt 9 ad 2. ergo productus ſub extremis $\frac{31680 - 2\text{R}}{48}$ æquari debet producto ſub mediis 324 -- 9R. ac proinde I R eſt 288 vnde minus ſegmentum primæ diuiſionis erit 72. maius ſecundæ 216, minus ſecundæ 144. maius tertiæ 288, minus tertiæ 72, maius quartæ 324, & minus quartæ 36. & ſatisfaciunt quæſtioni.

per

Per Algebram ſpecioſam, detur B quantitas diuidenda & quatuor proportiones dentur B ad C & B ad D & B ad F & B ad G. ponatur autem A maius ſegmentum primæ diuiſionis ergo ſecundum erit B -- A. Et quia eſt primum ſegmentum primæ ad ſecundum ſecundæ vt B ad C erit ſecundum ſecundæ $\frac{CA}{B}$. Ergo primum $\frac{BA - CA}{B}$. hoc ad ſecundum tertiæ debet eſſe vt B ad D ergo ſecundum tertiæ erit $\frac{BBD - DCA}{BB}$ ac proinde primum tertiæ eſt $\frac{BBB + DCA - BBD}{BB}$. Quod quidem ad ſecundum quartæ eſt vt B ad F ergo ſecundum quartæ eſt $\frac{BBBF + FDCA - BBDF}{BBB}$. Igitur primum quartæ eſt $\frac{BBBB + BBDF - BBBF - FDCA}{BBB}$. Illud itaque ad ſecundum primæ quod iam inuentum eſt B -- A eſt vt B ad G. Ac proinde productus ſub extremis $\frac{BBBBG + BBDFG - BBBFG - GFDCA}{BBB}$ erit æqualis producto ſub mediis BB -- BA. Ergo A eſt æqualis $\frac{BBBBB + BBBFG - BBBBG - BBDFG}{BBBB - GFDC}$.

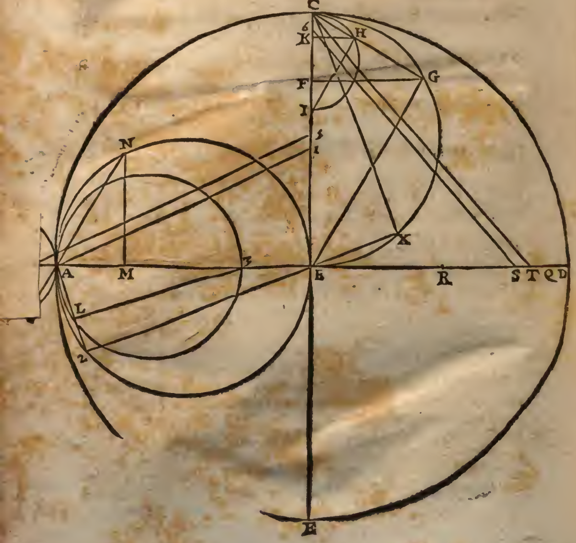
Hinc Canon.

Diſpoſitis omnibus taliter vt quantitas diuidenda ſit antecedens quatuor proportionum datarum adde cubo quadratum quantitatis diuidendæ cum producto ex plano ſub duobus poſterioribus terminis conſequentibus in cubum eiuſdem quantitatis diuidendæ, hanc ſummam multa plano. ſolido quod fit ex quadrato-quadrato quantitatis diuidendæ in poſteriorem terminum conſequentem, & plano ſolido quod fit ex quadrato quantitatis diuidendæ in ſolidum ſub

tribus poſterioribus terminis conſequentibus & reſiduum ſerua. Hoc reſiduum diuide per differentiam quadrato-quadrati quantitatis diuidendæ & plano plani ſub omnibus terminis conſequentibus. Et fiet maius ſegmentũ primæ diuiſionis, vnde reliqua non latebũt.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto A B lineæ quater diuidenda ita vt primum ſegmentum primæ diuiſionis ad ſecundum ſecundæ ſit vt A B ad B I. Primũ ſecundæ ad ſecundum tertiæ vt A B ad A 2, primum tertiæ ad ſecundum



Per Algebram ſpecioſam, detur B quantitas diuidenda & quatuor proportiones dentur B ad C & B ad D & B ad F & B ad G. ponatur autem A maius ſegmentum primæ diuiſionis ergo ſecundum erit B -- A. Et quia eſt primum ſegmentum primæ ad ſecundum ſecundæ vt B ad C erit ſecundum ſecundæ $\frac{CA}{B}$. Ergo primum $\frac{BA - CA}{B}$. hoc ad ſecundum tertiæ debet eſſe vt B ad D ergo ſecundum tertiæ erit $\frac{BBD - DCA}{BB}$ ac proinde primum tertiæ eſt $\frac{BBB + DCA - BBD}{BB}$. Quod quidem ad ſecundum quartæ eſt vt B ad F ergo ſecundum quartæ eſt $\frac{BBBF + FDCA - BBDF}{BBB}$. Igitur primum quartæ eſt $\frac{BBBB + BBDF - BBBF - FDCA}{BBB}$. Illud itaque ad ſecundum primæ quod iam inuentum eſt B -- A eſt vt B ad G. Ac proinde productus ſub extremis $\frac{BBBBG + BBDFG - BBBFG - GFDCA}{BBB}$ erit æqualis producto ſub mediis BB -- BA. Ergo A eſt æqualis $\frac{BBBBB + BBBFG - BBBBG - BBDFG}{BBBB - GFDC}$.

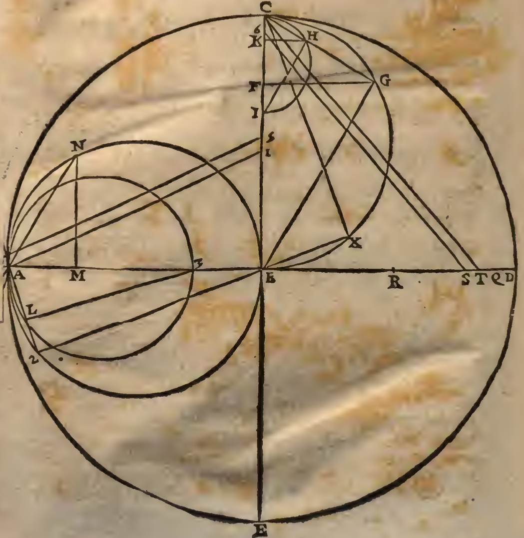
Hinc Canon.

Diſpoſitis omnibus taliter vt quantitas diuidenda ſit antecedens quatuor proportionum datarum adde cubo quadratum quantitatis diuidendæ cum producto ex plano ſub duobus poſterioribus terminis conſequentibus in cubum eiuſdem quantitatis diuidendæ, hanc ſummam multa plano. ſolido quod fit ex quadrato-quadrato quantitatis diuidendæ in poſteriorem terminum conſequentem, & plano ſolido quod fit ex quadrato quantitatis diuidendæ in ſolidum ſub

tribus poſterioribus terminis conſequentibus & reſiduum ſeruā. Hoc reſiduum diuide per differentiam quadrato-quadrati quantitatis diuidendæ & plano plani ſub omnibus terminis conſequentibus. Et fiet maius ſegmentū primæ diuiſionis, vnde reliqua non latebūt.

Hinc Effectio Geometrica.

Eſto A B lineæ quater diuidenda ita vt primum ſegmentum primæ diuiſionis ad ſecundum ſecundæ ſit vt A B ad B I. Primū ſecundæ ad ſecundum tertiæ vt A B ad A 2, primum tertiæ ad ſecundum



quartæ vt A B ad A 3, at vero primum quartæ ad ſecundum primæ ſit vt A B ad A 4. deſcribantur primò duo circuli ſuper A B & ſuper A 3. tum centro B interuallo B A fiat maior circulus & producta A B vſque ad D ducatur ipſi perpendicularis B C. Tum ſumpta B F æquali A 3 ponatur F G perpendicularis ad B C donec occurrat peripheriæ ſemicirculi facti ſuper B C in puncto G, nectanturque G C & G B. Deinde accepta C V æqualis A 4 & facto ſemicirculo ſuper C V ſecto per C G in H ducatur H V & demittatur H K perpendicularis ad B O. Poſtea inſcribatur A 2 circulo facto ſuper A B ſecans minorem circulum factum ſuper A 3 in L. & capta A M æquali A L, erigatur M N perpendicularis ad A B, facto ſuper A 4 circulo ducatur N A O linea recta & demittatur O P perpendicularis ad B A 4. ducatur deinde linea A I & huic parallela P 5, & C 6 ſumatur æqualis 15, & D Q æqualis A P, & Q R æqualis A 4 ſeu C V & R S æqualis V K, nectaturque 6 S & huic parallela ducatur C T. Dico B T fore primum ſegmentum primæ diuiſionis & T D ſecundum vnde reliqua non latebunt, nam ſi fiat vt A B ad B I ita B T ad aliud erit primum ſegmentum ſecundæ & ſic de aliis. Demonſtratio ferè ſimilis eſt demonſtrationi propoſ. 13. l. 1. quare illam lubens omitto.

Propositio XLVIII.

Inuenire quotlibet quadrata quorum ſumma æquetur quadrato.

ADuerte Diophantum id feciſſe de tribus, & per eius operationem id non poſſe fieri de pluribus. nos de quotcumque id præſtabimus. Diuidatur quadratum aliquod puta 100 in duo quadrata (per 1. prop. append. lib. 1.) puta in 64 & 36. tùm 36 diuidatur in duo quadrata $\frac{576}{25}$ & $\frac{324}{25}$. & 64 in alia duo $\frac{576}{25}$ $\frac{1024}{25}$. & ſic habebuntur quatuor quadrata quorum ſumma 100. ſeu relictis denominatoribus quatuor numeratores erunt quadrati quorum ſumma eſt numerus quadratus 2500. iam quilibet numerator poteſt diuidi in alia duo quadrata, & partium inuentarum poteſt iterum fieri

ſubdiuiſio. Igitur inueniri poſſunt quolibet quadrata quorum ſumma æquatur quadrato. En tibi ſex quadrata 5184. 9216. 8100. 14400. 16384. 9216. quorum ſumma eſt quadratum 62500.

Aliter inuentis tribus, vti factum eſt in ſcholio propoſitionis 39 appendires, 4. 64. 256. quorum ſumma æquatur 324. inueniatur quadratus qui additus 324 faciat quadratum, & ſit I Q. ergo 324 † I Q æquatur quadrato. Finge latus I R 20. ergo I Q † 400 - 40R æquantur 324 † I Q & ſit I R æqualis $\frac{19}{10}$. ac propterea $\frac{361}{100}$ eſt quadratus quæſitis. Quare ſi tres partes 4. 64. 256 ducas in denumeratorem tres producti cum numeratore 361, dabunt quatuor quadrata 400. 6400. 25600. 361. quorum ſumma eſt numerus quadratus 32761. à radice 181. ſimiliter quæri poteſt aliud quadratum quod cum 32761 faciat quadratū. Sit illud I Q. Ergo 32761 † I Q æqatur quadrato finge latus 180 -- 2R & ſit I R æqualis $\frac{724}{3}$ cuius quadratum eſt 524176. ergo ſi quatuor quadrata ſuperiora ducas in 9 producti 3608. 57600. 230400. 3249. cum numeratore 524176 erunt quinque quadrata, quorum ſumma eſt numerus quadratus 819025. à latere 905. & ſic deinceps reperies quot volueris.

Geometricè, res perficitur nullo negotio, nam quælibet & quotlibet quadrata inuicem adduntur per 47 primi.

Propositio XLIX.

Inuenire bis, immò & infinities in diuerſis rationibus tres quantitates quadratas Geometrice proportionales, ita vt ſumma mediæ cum alterutra extremarum faciat quadratum.

Accipiantur duo quicumque numeri, puta 1 & 2. ex illis formetur triangulum rectangulum modo ſæpe in præcedentibus explicato. Sintque 3. 4. 5. tum capiantur quadrata duorum minorum, nempe 9 & 16. & tollatur ex iis quilibet numerus prædictis minor, puta 6. relinquentur 3 & 10. hi tres 3. 6. 10 ſic connectentur

quartæ vt A B ad A 3, at vero primum quartæ ad ſecundum primæ ſit vt A B ad A 4. deſcribantur primò duo circuli ſuper A B & ſuper A 3. tum centro B interuallo B A fiat maior circulus & producta A B vſque ad D ducatur ipſi perpendicularis B C. Tum ſumpta B F æquali A 3 ponatur F G perpendicularis ad B C donec occurrat peripheriæ ſemicirculi facti ſuper B C in puncto G, nectanturque G C & G B. Deinde accepta C V æqualis A 4 & facto ſemicirculo ſuper C V ſecto per C G in H ducatur H V & demittatur H K perpendicularis ad B O. Poſtea inſcribatur A 2 circulo facto ſuper A B ſecans minorem circulum factum ſuper A 3 in L. & capta A M æquali A L, erigatur M N perpendicularis ad A B, facto ſuper A 4 circulo ducatur N A O linea recta & demittatur O P perpendicularis ad B A 4. ducatur deinde linea A I & huic parallela P 5, & C 6 ſumatur æqualis 15, & D Q æqualis A P, & Q R æqualis A 4 ſeu C V & R S æqualis V K, nectaturque 6 S & huic parallela ducatur C T. Dico B T fore primum ſegmentum primæ diuiſionis & T D ſecundum vnde reliqua non latebunt, nam ſi fiat vt A B ad B I ita B T ad aliud erit primum ſegmentum ſecundæ & ſic de aliis. Demonſtratio ferè ſimilis eſt demonſtrationi propoſ. 13. l. 1. quare illam lubens omitto.

PROPOSITIO XLVIII.

Inuenire quotlibet quadrata quorum ſumma æquetur quadrato.

ADuerte Diophantum id feciſſe de tribus, & per eius operationem id non poſſe fieri de pluribus. nos de quotcumque id præſtabimus. Diuidatur quadratum aliquod puta 100 in duo quadrata (per 1. prop. append. lib. 1.) puta in 64 & 36. tùm 36 diuidatur in duo quadrata $\frac{576}{25}$ & $\frac{324}{25}$. & 64 in alia duo $\frac{576}{25}$ $\frac{1024}{25}$. & ſic habebuntur quatuor quadrata quorum ſumma 100. ſeu relictis denominatoribus quatuor numeratores erunt quadrati quorum ſumma eſt numerus quadratus 2500. iam quilibet numerator poteſt diuidi in alia duo quadrata, & partium inuentarum poteſt iterum fieri

ſubdiuiſio. Igitur inueniri poſſunt quolibet quadrata quorum ſumma æquatur quadrato. En tibi ſex quadrata 5184. 9216. 8100. 14400. 16384. 9216. quorum ſumma eſt quadratum 62500.

Aliter inuentis tribus, vti factum eſt in ſcholio propoſitionis 39 appendires, 4. 64. 256. quorum ſumma æquatur 324. inueniatur quadratus qui additus 324 faciat quadratum, & ſit I Q. ergo 324 † I Q æquatur quadrato. Finge latus I R 20. ergo I Q † 400-40R æquantur 324 † I Q & ſit I R æqualis $\frac{19}{10}$. ac propterea $\frac{361}{100}$ eſt quadratus quæſitis. Quare ſi très partes 4. 64. 256 ducas in denumeratorem tres producti cum numeratore 361, dabunt quatuor quadrata 400. 6400. 25600. 361. quorum ſumma eſt numerus quadratus 32761. à radice 181. ſimiliter quęri poteſt aliud quadratum quod cum 32761 faciat quadratũ. Sit illud I Q. Ergo 32761 † I Q æqatur quadrato finge latus 180--2R & ſit I R æqualis $\frac{724}{3}$ cuius quadratum eſt 524176. ergo ſi quatuor quadrata ſuperiora ducas in 9 producti 3608. 57600. 230400. 3249. cum numeratore 524176 erunt quinque quadrata, quorum ſumma eſt numerus quadratus 819025. à latere 905. & ſic deinceps reperies quot volueris.

Geometricè, rés perficitur nullo negotio, nam quælibet & quotlibet quadrata inuicem adduntur per 47 primi.

Propositio XLIX.

Inuenire bis, immò & infinities in diuerſis rationibus tres quantitates quadratas Geometrice proportionales, ita vt ſumma media cum alterutra extremarum faciat quadratum.

ACcipiantur duo quicumque numeri, puta 1 & 2. ex illis formetur triangulum rectangulum modo ſæpe in præcedentibus explicato. Sintque 3. 4. 5. tum capiantur quadrata duorum minorum, nempe 9 & 16. & tollatur ex iis quilibet numerus prædictis minor, puta 6. relinquentur 3 & 10. hi tres 3. 6. 10 ſic connectentur

tur cum 1 R, vt in aliis ſit ſignum plus, & in alio minus, vel contra in vno plus & in cæteris minus. (prout æquatio commoda occurrat) ſint igitur tres. illi numeri 3 † 1 R. 6 -- 1 R. 10 † 1 R. medius cum alterutro extremorum eſt quadratus 9 aut 16. reſtat igitur vt ſint proportionales. Ergo productus ſub extremis 30 † 1 Q † 13 R æquatur quadrato medij 36 † 1 Q --- 12 R. & fit 1 R æqualis $\frac{6}{25}$. iuxta quam ſi reſoluas coſſicos ſuperiores, inuenientur tres quæſiti $\frac{81}{25}$. $\frac{144}{25}$. $\frac{256}{25}$. & quia denominator eſt quadratus ex vi operationis, & vbique idem: additi autem extremi cum medio ſigillatim faciunt quadratum, & ſunt tres proportionales, ſequitur illos eſſe quadratos. Ac proinde ſecluſis denominatoribus erunt tres numeratores 81. 144. 256. quadrati, & continuè proportionales, & medius cum alterutro extremo faciet quadratum.

Similiter formetur aliud triangulum ex 2 & 3. latera trianguli erunt 5. 12. 13. capiantur quadrata duorum minorum 25 & 144. & ex vtroque ſigillatim tollatur quiſpiam numerus, puta 20 pro medio inter duo reſidua 5 & 124. erunt igitur tres numeri apti ad hoc opus 5. 20. 124. hos ſic cōnectes cum 1 R, vt fiant 5 -- 1 R. 20 † 1 R. 124 -- 1 R. cum ergo medius cum quolibet extremo faciat quadratum, reſtant vt ſunt Geometricè proportionales. Igitur extremorum 620 † 1 Q -- 129 R æquatur quadrato medii 400 † 1 R † 40 R & fit 1 R æqualis $\frac{220}{169}$. iuxta quam reſoluti coſſieci dant tres quæſitos proportionales quadratos, & dempto cōmuni denominatorē 169, fiunt tres quæſiti 625. 3600. 20736. qui & quadrati ſunt, & proportionales, & medius additus extremo facit quadratum, & ſunt in diuerſa cum prioribus proportione, quia formatum eſt triangulum rectangulum ex duobus numeris non habentibus eamdem cum ſuperioribus rationem.

Rurſus formetur ex 3 & 4 triangulum rectangulum cuius latera 7. 24. 25. & capiantur quadrata duorum minorum 49 & 576. ex vtroque tollantur 40 pro medio inter duo reſidua 9 & 536. hos ſic compones cum 1 R vt fiant 9 -- 1 R. 40 † 1 R. 536 -- 1 R. cum ergo

medius cuilibet extremo additus faciat 1 Q reſtat vt ſint proportionales. igitur productus ſub extremis 4824 † 1 Q -- 545 R æquatur quadrato medii 1690 † 1 Q † 80 R. & fit 1 R æqualis $\frac{3224}{625}$ iuxta quam reſoluti coſſici dempto denominatorē, fiunt tres quæſiti 2401. 28224. 331776. qui & quadrati ſunt, & continuè proportionales, & medius cuilibet extremo additus facit quadratum, & ſunt in diuerſa cum prioribus ratione.

Simili prorſus modo inuenire potes innumeros alios hos tantum proribus addo 4096. 14400. 50625. ſicut etiam 6561. 129600. 2560000. atque 14641. 435600. 12960000.

Geometricè. res expeditur nullo negotio, ſumptis tribus quibuſcumque proportionalibus lineis: nam quadratum mediæ additur cum quadrato cuiuſlibet extremæ, & fit quadratum. Per 47 primi.

Scholium.

Aduerte poſitionis poſſe infinitis mediis variari, tollendo diuerſos numeros ex duobus minoribus quadratis: vt in primo exēplo ex duobus quadratis 9 & 16 poteſt tolli 3 pro medio inter duo reſidua 6 & 13. vnde eos tres componendo cum 1 R, orirentur coſſici 6 -- 1 R 3 † 1 R. 13 -- 1 R. & procedendo vt ſupra 1 R fieret æqualis $\frac{69}{25}$ iuxta quam reſoluti coſſici darent eoſdem numeros, qui ſupra reperti ſunt.

Similiter tollendo 4 reſidua forent 5 & 12 vnde coſſici naſcerentur 5 -- 1 R. 4 † 1 R. 12 -- 1 R. & operendo vt ſupra fit 1 R æqualis $\frac{44}{25}$ iuxte quam reſoluti coſſici fiunt iidem numeri qui ſuprà.

Rurſus tollendo 8 reſidua forent 1 & 8 vnde coſſicos ſic componeres 1 † 1 R. 8 -- 1 R. 8 † 1 R. & per ſimilem operationem fit 1 R æqualis $\frac{56}{25}$ iidemque euadunt numeri. Semperque res eodem modo continget. Hoc quoque experiri licet in duobus aliis exemplis. Porro ex hac propoſitione ſolues duo ſequentia problemata.

tur cum 1 R, vt in aliis ſit ſignum plus, & in alio minus, vel contra in vno plus & in cæteris minus. (prout æquatio commoda occurrat) ſint igitur tres illi numeri *3* † 1 R. *6* -- 1 R. 10 † 1 R. medius cum alterutro extremorum eſt quadratus *9* aut 16. reſtat igitur vt ſint proportionales. Ergo productus ſub extremis *30* † 1 Q † 13 R æquatur quadrato medij *36* † 1 Q -- 12 R. & fit 1 R æqualis $\frac{6}{25}$. iuxta quam ſi reſoluas coſſicos ſuperiores, inuenientur tres quæſiti $\frac{81}{25}$. $\frac{144}{25}$. $\frac{256}{25}$. & quia denominator eſt quadratus ex vi operationis, & vbique idem : additi autem extremi cum medio ſigillatim faciunt quadratum, & ſunt tres proportionales, ſequitur illos eſſe quadratos. Ac proinde ſecluſis denominatoribus erunt tres numeratores 81. 144. *256*. quadrati, & continuè proportionales, & medius cum alterutro extremo faciet quadratum.

Similiter formetur aliud triangulum ex 2 & 3. latera trianguli erunt 5. 12. 13. capiantur quadrata duorum minorum 25 & 144. & ex vtroque ſigillatim tollatur quis piam numerus, puta 20 pro medio inter duo reſidua 5 & 124. erunt igitur tres numeri apti ad hoc opus 5. 20. 124. hos ſic cōnectes cum 1 R, vt fiant 5 -- 1 R. 20 † 1 R. 124 -- 1 R. cum ergo medius cum quolibet extremo faciat quadratum, reſtant vt ſint Geometricè proportionales. Igitur extremorum *620* † 1 Q -- 129 R æquatur quadrato medii 400 † 1 R † 40 R & fit 1 R æqualis $\frac{220}{169}$. iuxta quam reſoluti coſſiеci dant tres quæſitos proportionales quadratos, & dempto cōmuni denominatorē *169*. fiunt tres quæſiti *625*. *3600*. *20736*. qui & quadrati ſunt, & proportionales, & medius additus extremo facit quadratum, & ſunt in diuerſa cum prioribus proportione, quia formatum eſt triangulum rectangulum ex duobus numeris non habentibus eamdem cum ſuperioribus rationem.

Rurſus formetur ex *3* & 4 triangulum rectangulum cuius latera 7. 24. 25. & capiantur quadrata duorum minorum 49 & *576*. ex vtroque tollantur 40 pro medio inter duo reſidua *9* & *536*. hos ſic compones cum 1 R vt fiant *9* -- 1 R. 40 † 1 R. *536* -- 1 R. cum ergo

medius cuilibet extremo additus faciat 1 Q reſtat vt ſint proportionales. igitur productus ſub extremis 4824 † 1 Q -- 545 R æquatur quadrato medii 1600 † 1 Q † 80 R. & fit 1 R æqualis $\frac{3224}{625}$. iuxta quam reſoluti coſſici dempto denominatorē, fiunt tres quæſiti 2401. 28224. 331776. qui & quadrati ſunt, & continuè proportionales, & medius cuilibet extremo additus facit quadratum, & ſunt in diuerſa cum prioribus ratione.

Simili prorſus modo inuenirē potes innumeros alios hos tantum proribus addo 4096. 14400. 50625. ſicut etiam 6561. 129600. 2560000. atque 14641. 435600. 12960000.

Geometricē. res expeditur nullo negotio, ſumptis tribus quibuſcumque proportionalibus lineis : nam *quadratum* mediæ additur cum quadrato cuiuſlibet extremæ, & fit quadratum. Per 47 primi.

Scholium.

Aduertē poſitionis poſſe infinitis mediis variari, tollendo diuerſos numeros ex duobus minoribus quadratis: vt in primo exēplo ex duobus quadratis 9 & 16 poteſt tolli 3 pro medio inter duo reſidua 6 & 13. vnde eos tres componendo cum 1 R, orirentur coſſici 6 -- 1 R 3 † 1 R. 13 -- 1 R. & procedendo vt ſupra 1 R fieret æqualis $\frac{69}{25}$. iuxta quam rēſoluti coſſici darent eoſdem numeros, qui ſupra reperti ſunt.

Similiter tollendo 4 reſidua forent 5 & 12 vnde coſſici naſcerentur 5 -- 1 R. 4 † 1 R. 12 -- 1 R. & operendo vt ſupra fit 1 R æqualis $\frac{44}{25}$. iuxte quam reſoluti coſſici fiunt iidem numeri qui ſuprà.

Rurſus tollendo 8 reſidua forent 1 & 8 vnde coſſicos ſic componeres 1 † 1 R. 8 -- 1 R. 8 † 1 R. & per ſimilem operationem fit 1 R æqualis $\frac{56}{25}$. iidemque euadunt numeri. Semperque res eodem modo continget. Hoc quoque experiri licēt in duobus aliis exemplis. Porro ex hac propoſitione ſolues duo ſequentia problemata.

PROBLEMA PRIMVM.

Inuenire tres numeros proportionales tales, vt cubus medii ſit æqualis ſumma quadratorum à ſingulis, & productus ex quolibet in quemlibet ſit quadratus.

CApe tres numeros ex iis qui in propoſitione menti ſunt, & iis necte characterem radicum, vt ſint 81R. 144R. 256R. quadrati illlorum ſunt 6561Q. 20736Q. 65536Q. quorum ſumma 92833Q æquari debet cubo medii 2985984C. ergo I R æquatur $\frac{92833}{2985984}$. acproinde tres numeri quæſiti ſunt 7519473. 13367952. 23764248. (ſi modo ſingulis illis ſupponatur communis denominator 2985984).

PROBLEMA SECVNDVM.

Inuenire tres numeros continuè proportionales, æquales cubo, ita vt medius additus alterutri extremo, faciat quadratum, & productus ex quolibet in quemlibet, ſit quadratus.

SVmantur tres quadrati 81Q. 144Q. 256Q. hi ſunt continuè proportionales, & medius additus cuilibet extremo facit quadratum 225Q vel 400Q. & inſuper cum ſint quadrati productus ex quolibet in quemlibet erit quadratus. Reſtat ergo vt illi tres ſimul ſumpti 481Q æquentur cubo. ſit ille I C. Igitur I R ſit 481. cuius quadratus 231361 ductus ſigillatim in 81. 144. 256. dat tres quæſitos 18740241. 33315904. 59228416. ſunt enim continuè proportionales quia quadratum medij æquatur producto extremorum: deinde primus cum ſecundo facit quadratum cuius latus 7215. & ſecundus cum tertio facit quadratum cuius latus 9620. tres vero additi ſimul faciunt cubum cuius latus 481. & quilibet in quemlibet facit quadratum, quia quilibet eſt numerus quadratus.

PROPOSITIO L.

Inuenire tres quantitates proportionales ita vt differentiâ extremarum ſit 375, & ſi ſumma omnium addantur 4 & 51, fiant quadrati.

POnatur ſumma omnium 1 R. Ergo 1 R † 4 & 1 R † 51 faciunt quadratum tollatur horum minor à maiore. Differentia eſt 47. quam producunt 1 & 47. horum producentum ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur 1 R † 51. vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquetur 1 R † 4 & prodibit vtique valor radicis 525. talis eſt ſumma trium quæſitorum. Ponatur nunc medius numerus 1 R ergo ſumma extremorum erit 525 -- 1R at differentia extremorum eſt 375. igitur extremi ſunt 450 -- 1R & 75 -- 1R. quare horum pro-
2 2
ductus 33750 -- 525R † 1Q æquatur quadrato medij 1Q. Ergo
2 4
1 R ſit 100 & tres numeri 25. 15. 100. 400.
Geometricè res eſt facilis, nam data differentia extremarum B & duobus addendis. Planis C & D. Sumatur quodlibet quadratum A pro minore cui addatur quadratum B per angulum rectum, vt habeatur hypotenuſæ quadratum pro maiore. inter maiorem & minorem ſumatur media. Ergo habetur ſumma trium. Sit illa ſumma æqualis plano F cui addatur planum C & D per angulum rectum & fient quadrata quæſita. Per 47 primi.

PROPOSITIO LI.

Inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales Geometricè, ita vt quadrata extremarum habeant rationem datam ad quadrata mediarum & productus ſub extremis vel mediis ſit datus, & inſuper mediarum, quadrata faciant quadratum.

DEtur productus ſub mediis vel extremis 12. ratio autem quadratorum ab extremis ad quadrata mediarum 7 ad 2. Ponatur 4Q pro quadratis mediarum & fiat vt 2 ad 7 ita 4Q ad aliud & habebis

PROBLEMA PRIMVM.

Inuenire tres numeros proportionales tales, vt cubus medii ſit æqualis ſummæ quadratorum à ſingulis, & productus ex quolibet in quemlibet ſit quadratus.

CApe tres numeros ex iis qui in propoſitione menti ſunt, & iis necte characterem radicum, vt ſint 81R. 144R. 256R. quadrati illorum ſunt 6561Q. 20736Q. 65536Q. quorum ſumma 92833Q æquari debet cubo medii 2985984C. ergo 1R æquatur $\frac{62833}{2985984}$. ac proinde tres numeri quæſiti ſunt 7519473. 13367952. 23764248. (ſi modo ſingulis illis ſupponatur communis denominator 2985984).

PROBLEMA SECVNDVM.

Inuenire tres numeros continuè proportionales, æquales cubo, ita vt medius additus alterutri extremo, faciat quadratum, & productus ex quolibet in quemlibet, ſit quadratus.

SVmantur tres quadrati 81Q. 144Q. 256Q. hi ſunt continuè proportionales, & medius additus cuilibet extremo facit quadratum 225Q vel 400Q. & inſuper cum ſint quadrati productus ex quolibet in quemlibet erit quadratus. Reſtat ergo vt illi tres ſimul ſumpti 481Q æquentur cubo. ſit ille 1C. Igitur 1R fit 481. cuius quadratus 231361 ductus ſigillatim in 81. 144. 256. dat tres quæſitos 18740241. 33315904. 59228416. ſunt enim continuè proportionales quia quadratum medij æquatur producto extremorum, deinde primus cum ſecundo facit quadratum cuius latus 7215. & ſecundus cum tertio facit quadratum cuius latus 9620. tres vero additi ſimul faciunt cubum cuius latus 481. & quilibet in quemlibet facit quadratum, quia quilibet eſt numerus quadratus.

Propoſitio L.

Inuenire tres quantitates proportionales ita vt differentia extremarum ſit 375, & ſi ſummæ omnium addantur 4 & 51, fiant quadrati.

POnatur ſumma omnium 1R. Ergo 1R † 4 & 1R † 51 faciunt quadratum tollatur horum minor à maiore. Differentia eſt 47. quam producunt 1 1 & 47. horum producentum ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur 1R † 51. vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus æquetur 1R † 4 & prodibit vtique valor radicis 525. talis eſt ſumma trium quæſitorum. Ponatur nunc medius numerus 1R ergo ſumma extremorum erit 525 -- 1R at differentia extremorum eſt 375. igitur extremi ſunt $450 - \frac{1R}{2}$ & $75 - \frac{1R}{2}$. quare horum productus $33750 - \frac{525R}{2} + \frac{1Q}{4}$ æquatur quadrato medij 1Q. Ergo 1R fit 100 & tres numeri 25. 15. 100. 400.

Geometricè res eſt facilis, nam data differentia extremarum B & duobus addendis. Planis C & D. Sumatur quodlibet quadratum A pro minore cui addatur quadratum B per angulum rectum, vt habeatur hypotenuſæ quadratum pro maiore. inter maiorem & minorem ſumatur media. Ergo habetur ſumma trium. Sit illa ſumma æqualis plano F cui addatur planum C & D per angulum rectum & fient quadrata quæſita. Per 47 primi.

Propoſitio LI.

Inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales Geometricè, ita vt quadrata extremarum habeant rationem datam ad quadrata mediarum & productus ſub extremis vel mediis ſit datus, & inſuper mediarum, quadrata faciant quadratum.

DEtur productus ſub mediis vel extremis 12. ratio autem quadratorum ab extremis ad quadrata mediarum 7 ad 2. Ponatur 4Q pro quadratis mediarum & fiat vt 2 ad 7 ita 4Q ad aliud & habebis

habebis 14Q pro extremarum quadratis. Igitur quoniam datur productus ſub extremis. vel mediis 12. erit 24 † 14Q quadratum ſummæ extremarum (per 4 ſecundi) & 24 † 4Q quadratum ſummæ mediarum. Ac proinde ſumma extremarum erit ℞ (24 † 14Q) & ſumma mediarum ℞ (24 † 4Q). At ſi ex quadrato ſemiſſis ſummæ duorum numerorum tollatur productus ipſorum reſidui radix quadrata ſemiſſi ſummæ addita & detracta dabit duos numeros ſigillatim. Ergo quatuor numeri quæſiti ſunt ℞ (*6* † $\frac{7Q}{2}$). † ℞ ($\frac{7Q}{2}$ -- *6*). ℞ (*6* † 1Q) † ℞ 1Q -- *6*). ℞ (*6* † 1Q) ℞ -- ℞ (1Q -- *6*). ℞ (*6* † $\frac{7Q}{2}$) -- ℞ ($\frac{7Q}{2}$ -- *6*) & ſoluta eſt indefinitè. Nam & quatuor illi numeri ſunt proportionales. Et productus ſub mediis vel extremis eſt 12. & quadrata extremarum ad quadrata mediarum habeant rationem 7 ad 2. & inſuper ſumma quadratorum à mediis faciunt quadratum.

Cape pro valore quadrati quemcumque numerum, modo ſit maior *6* (medietate producti dati) & iuxta illum reſoluti coſſici dabunt quatuor quæſitos: vt ſi accipias 1*6* pro valore quadrati, erunt quatuor quæſiti numeri ℞ *62* † ℞ 50. ℞ 22 † ℞ 10. ℞ 22 --- ℞ 10. ℞ *62* -- ℞ 50.

Geometricè, ſit quadratum B æquale producto ſub mediis vel extremis (hic ſicut in præcedenti vtimur literis pro lineis) & ratio data ſit C ad D. duplum quadratum B addatur per 47 primi cum quadrato C & habebitur ſummæ extremarum quadratum. ſimiliter duplum quadratum B additum quadrato D, dabit quadratum ſummæ mediarum. Igitur & ſumma extremarum & ſumma mediarum habebitur. Ergo cum habeatur linea potens rectangulum ſub extremis vel mediis habebuntur ſingulæ per propoſ. 2*6*. l. primi.

Scholium.

Hinc ſolues problema ſequēs: inuenire quatuor numeros diſcretè proportionales Geometricè dato plano ſub mediis vel extremis ita vt quadrata extremarum habeant rationem datam ad quadrata mediarum, & inſuper ſumma quadratorum à mediis ſit quadratus, ſumma autem quadratorum ab extremis ſit cubus. Cum enim quæſtio fuerit

Ppp

ſoluta indefinitè quoad omnes conditiones, dempta vltima. reſtat vt 14Q æquemus cubo taliter vt valor radicis ſit maior ℞ 6. ſit ille cubus 1C & ſit 1R æqualis 14 ergo æquatuor quæſiti ſunt ℞ 692 + ℞ 680. ℞ 202 + ℞ 190. ℞ 202 -- ℞ 190. ℞ 692 -- ℞ 680. nam & ſunt proportionales diſcretè, & productus eſt 12. & quadrata extremorum ad quadrata mediorum ſunt in ratione 7 ad 2, & quadrata mediorum faciunt quadratum 784, à radicè 28. ac tandem quadrata extremorum faciunt cubum 2744, à radice 14.

Similiter ſolueres problema, ſi iuberetur quadrata à ſingulis æquari cubo: tunc enim adderes quadrata mediarum 4Q cum quadratis extremarum 14Q, & ſummam 18Q æquares 1C & fieret valor radicis 18 iuxta quem reſoluti coſſici exhiberent quæſitos.

Non aliter ſolueretur problema ſequens: dato plano ſub mediis vel extremis, inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales Geometricè ita vt differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis habeat rationem datam & inſuper differentia quadratorum ab extremis ſit quadratus: differentia vero quadratorum à mediis cubus. Enimuero ſi quadrato ſemiſſis differentiæ quadratorum à duobus numeris addas quadratum producti, & ſummæ radicem quadratam augeas & multes ſupradicto ſemiſſe: huius aggregati & reſidui radices quadratæ dabunt duos numeros. quare ſi detur productus ſub mediis vel extremis 12 & ratio 8 ad 3. pones quemcumque numerum quadratũ affectum charactere quadratorum pro differentia quadratorum ab extremis, puta 16Q (vt ſit quadratus) tùm facies vt 8 ad 3 ita 16Q ad aliud, & habebis 6Q pro differentia quadratorum à mediis: huius ſemiſſis quadratum 9QQ addes 144 (quadrato producti dati) ſummæ radicem quadratam augebis & multabis 3Q & radix quadrata aggregati reſiduique exhibebit duos medios ℞ (9QQ + 144) + 3Q) & ℞ (9QQ + 144) -- 3Q). ſimili ratione inuenies duos extremos ex differentia quadratorum 16Q nam huius dimidij quadratum 74Q addes producto dato 144, ſummæ radicem quadratam augebis & multabis ſupradicto dimidio 8Q. radix aggregati & reſidui dabit duos extremos ℞ (64QQ + 144) + 8Q) & ℞ (64QQ + 44) -- 8Q) ergo ſi poſtularetur tantum vt differentia quadratorum ab extremis æquaretur quadrato, & haberet rationem datam ad differentiam quadratorum à mediis, 8 ad 3, & productus extremorum vel

habebis 14 Q pro extremarum quadratis. Igitur quoniam datur productus ſub extremis. vel mediis 12. erit 24 † 14 Q quadratum ſummæ extremarum (per 4 ſecundi) & 24 † 4 Q quadratum ſummæ mediarum. Ac proinde ſumma extremarum erit ℞ (24 † 14 Q) & ſumma mediarum ℞ (24 † 4 Q). At ſi ex quadrato ſemiſſis ſummæ duorum numerorum tollatur productus ipſorum reſidui radix quadrata ſemiſſi ſummæ addita & detracta dabit duos numeros ſigillatim. Ergo quatuor numeri quæſiti ſunt ℞ (*6* † $\frac{7Q}{2}$). † ℞ ($\frac{7Q}{2}$ -- *6*). ℞ (*6* † 1Q) † ℞ 1Q -- *6*). ℞ (*6* † 1Q) ℞ -- ℞ (1Q -- *6*). ℞ (*6* † $\frac{7Q}{2}$) -- ℞ ($\frac{7Q}{2}$ -- *6*) & ſoluta eſt indefinitè. Nam & quatuor illi numer. ſunt proportionales. Et productus ſub mēdiis vel extremis eſt 12. & quadrata extremarum ad quadrata mediarum habeant rationem 7 ad 2. & inſuper ſumma quadratorum à mediis faciunt quadratum.

Cape pro valore quadrati quemcumque numerum, modo ſit maior *6* (medietate producti dati) & iuxta illum reſoluti coſſici dabunt quatuor quæſitos: vt ſi accipias 1*6* pro valore quadrati, erunt quatuor quæſiti numeri ℞ *6*2 † ℞ 50. ℞ 22 † ℞ 10. ℞ 22 --- ℞ 10. ℞ *6*2 -- ℞ 50.

Geometricè, ſit quadratum B æquale producto ſub mediis vel extremis (hic ſicut in præcedenti vtimur literis pro lineis) & ratio data ſit C ad D. duplum quadratum B addatur per 47 primi cum quadrato C & habebitur ſummæ extremarum quadratum. ſimiliter duplum quadratum B additum quadrato D, dabit quadratum ſummæ mediarum. Igitur & ſumma extremarum & ſumma mediarum habebitur. Ergo cum habeatur linea potens rectangulum ſub extremis vel mediis habebuntur ſingulæ per propoſ. 2*6*. l. primi.

Scholium.

Hinc ſolues problema ſequēs: inuenire quatuor numeros diſcretè proportionales Geometricè dato plano ſub mediis vel extremis ita vt quadrata extremarum habeant rationem datam ad quadrata mediarum, & inſuper ſumma quadratorum à mediis ſit quadratus, ſumma autem quadratorum ab extremis ſit cubus. Cum enim quæſtio fuerit

ſoluta indefinitè quoad omnes conditiones, dempta vltima. reſtat vt 14Q æquemuis cubo taliter vt valor radicis ſit maior ℞ 6. ſit ille cubus 1C & ſit 1R æqualis 14 ergo æquatuor quæſiti ſunt ℞ 692 − ℞ 680. ℞ 202 + ℞ 190. ℞ 202 − ℞ 190. ℞ 692 − ℞ 680. nam & ſunt proportionales diſcretè, & productus eſt 12. & quadrata extremorum ad quadrata mediorum ſunt in ratione 7 ad 2, & quadrata mediorum faciunt quadratum 784, à radicè 28. ac tandem quadrata extremorum faciunt cubum 2744, à radice 14.

Similiter ſolueres problema, ſi iuberetur quadrata à ſingulis æquari cubo: tunc enim adderes quadrata mediarum 4Q cum quadratis extremarum 14Q, & ſummam 18Q æquares 1C & fieret valor radicis 18 iuxta quem reſoluti coſſici exhiberent quæſitos.

Non aliter ſolueretur problema ſequens: dato plano ſub mediis vel extremis, inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales Geometricè ita vt differentia quadratorum ab extremis ad differentiam quadratorum à mediis habeat rationem datam & inſuper differentia quadratorum ab extremis ſit quadratus: differentia vero quadratorum à mediis cubus. Enimuero ſi quadrato ſemiſſis differentiæ quadratorum à duobus numeris addas quadratum producti, & ſummæ radicem quadratam augeas & multes ſupradicto ſemiſſe: huius aggregati & reſidui radices quadratæ dabunt duos numeros. quare ſi detur productus ſub mediis vel extremis 12 & ratio 8 ad 3. pones quemcumque numerum quadratũ affectum charactere quadratorum pro differentia quadratorum ab extremis, puta 16Q (vt ſit quadratus) tùm facies vt 8 ad 3 ita 16Q ad aliud, & habebis 6Q pro differentia quadratorum à mediis: huius ſemiſſis quadratum 9QQ addes 144 (quadrato producti dati) ſummæ radicem quadratam augebis & multabis 3Q & radix quadrata aggregati reſiduique exhibebit duos medios ℞ (9QQ + 144) + 3Q) & ℞ (9QQ + 144) − 3Q). ſimili ratione inuenies duos extremos ex differentia quadratorum 16Q nam huius dimidij quadratum 74Q addes producto dato 144, ſummæ radicem quadratam augebis & multabis ſupradicto dimidio 8Q. radix aggregati & reſidui dabit duos extremos ℞ (64QQ + 144) + 8Q) & ℞ (64QQ + 44) − 8Q) ergo ſi poſtularetur tantum vt differentia quadratorum ab extremis æquaretur quadrato, & haberet rationem datam ad differentiam quadratorum à mediis, 8 ad 3, & productus extremorum vel

mědiorum eſſet 12, ſoluta eſſet quæſtio indefinitè, & accipiendo quemlibet numerum pro valore radicis haberetur intentum. ſi enim acciperes 1 & reſolueres coſſiecos iuxta illum valorem, fiet quatuor quæſiti ℞ (℞ 208 † 8). ℞ (℞ 153 † 3). ℞ (℞ 153 -- 3). ℞ (℞ 208 -- 8).

Verum poſtulatur inſuper vt differentia quadratorum à mediis faciat cubum. fuit autem hæc differentia 6Q. Igitur 6Q æquantur cubo. ſit ille cubus 1C Ergo 1R fit æqualis 6. ac proinde reſolutis coſſicis ſuperiores iuxta hunc valorem, fiunt quatuor numeri quæſiti ℞ (℞ 83088 † 288). ℞ (℞ 11808 † 108). ℞ (℞ 11808 -- 108). ℞ (℞ 83088 -- 288). ſi quidem differentia quadratorum ab extremis eſt numerus quadratus 576 à radice 24. differentia autem quadratorum à mediis eſt cubus 216 à radice 6. productus ſub mediis vel ſub extremis eſt 12. & differentia quadratorum extremorum 576 ad differentiam quadratorum mediorum 216 eſt in ratione data 8 ad 3.

Similiter ſolueres problema, ſi iuberetur quadrata à ſingulis æquari cubo, nam tunc 22Q æquarentur 1C & fieret 1R æqualis 22 iuxta quem valorem reſoluti coſſici exhiberent quæſitos. Inde etiam ſolues problema ſequens.

Inuenire quadratum & cubum in ratione data.

Sit enim ratio data 8 ad 3. duplicabis vtrumque terminum rationis, (vt prior fiat quadratus) & fient 16 & 6 tum vtrumque 16 & 6 duces in quadratum poſterioris nempe in 36, & fient 576 & 216 in ratione data 8 ad 3. quorum primus 576 eſt quadratus: alter vero 216 eſt cubus. Similiter ſi iubeas cubum ad quadratum eſſe in ratione 7 ad 2. duplicabis vtrumque (vt poſterior fiat quadratus) eruntque 14 & 4. tum vtrumque duces in 196 (quadratum 14) & fiet cubus 2744 qui eſt ad quadratum 784 in ratione data 7 ad 2. hinc etiam ſoluetur problema ſequens.

Inuenire tres numeros Geometricè proportionales ita vt extremi ſint quadrati & medius cubus: vel contra extremi cubi & medius quadratus.

Qvo ad primam partem nulla eſt difficultas nam capiendo quadratum binarij 4 duplicando, habebis cubum 8, & quadruplicando habebis quadratum 16 in continua ratione: capiendo

quadratum ternarij 9 triplicando habebis cubum 27 & noncuplando habebis 81 in continua ratione: capiendo quadratum quaternarij 16 ducendo in 4 & in 16 habebis tres proportionales 16. 64. 256. quorum medius eſt cubus & ſic deinceps in infinitum.

Quod ſpectat ſecundam partem capiatur quilibet cubus pro primo numero, puta 8, ponatur pro ſecundo 1 Q, & pro tertio 1 C, ergo quoniam debent eſſe proportionales productus extremorum 8 C æquatur producto mediorum 1 QQ & fit 1 R æqualis 8. ergo tres numeri quæſiti ſunt 8. 64. 512. extremi enim ſunt cubi & medius quadratus. ita quotlibet reperientur. Inde quoque ſoluetur ſequen- problema.

Inuenire quatuor numeros diſcretè proportionales ita vt medij ſint cubi & extremi quadrati: aut contra.

INueniatur quadratus & cubus in data ratione 2 ad 7, nempe 784 & 2744 deinde in eadem ratione 2 ad 7 inueniatur cubus & quadratus, nempe 175616 & 614656: ſi inuertentur, duo cubi erunt extremi: quadrati autē erunt medij 2744. 784. 614656. 175616.

Inuenire quatuor numeros diſcretè proportionales ita vt quadrati duorum priorum ſimul additi faciant cubum cubi autē duorum poſteriorum ſimul additi faciant quadratum.

DIuidatur aliquis cubus in duos quadratos: quod vt fiat cum arte, cape aliquem cubum, qui ſit quadratus, vt 100000000, & ponatur vna eius pars 1 Q, ergo altera erit 100000000 -- 1 Q hæc igitur poſterior æquari debet quadrato. finge latus 3 R -- 10000. ergo 9Q + 100000000 -- 60000 R æquantur 100000000 -- 1Q. & fit 1 R æqualis 6000. cuius quadratum 3000000. ſublatum ex cubo 100000000, relinquit alterum quadratum 64000000. quare hæc duo quadrata, quorum radices 6000 & 8000, æqualia ſunt cubo iſtæ autem radices habent eamdem quam 3 & 4.

Reſtat igitur vt inueniamus duos cubos quorum ſumma faciat quadratum, & quorum radices ſint in ratione 3 & 4. ſint illæ radices 3 R. harum cubi ſunt 27 C & 64 C, qui ſimul additi faciunt 91C æquanda quadrato. Sit ille quadratus 8281Q. & fit 1 R æqualis

mediorum eſſet 12, ſoluta eſſet quæſtio indefinitè, & accipiendo quemlibet numerum pro valore radicis haberetur intentum. ſi enim acciperes 1 & reſolueres coſſiecos iuxta illum valorem, fiet quatuor quæſiti ℞ (℞ 208 † 8). ℞ (℞ 153 † 3). ℞ (℞ 153 -- 3). ℞ (℞ 208 -- 8).

Verum poſtulatur inſuper vt differentia quadratorum à mediis faciat cubum. fuit autem hæc differentia 6Q. Igitur 6Q æquantur cubo. ſit ille cubus 1 C Ergo 1 R ſit æqualis 6. ac proinde reſolutis coſſicis ſuperiores iuxta hunc valorem, fiunt quatuor numeri quæſiti ℞ (℞ 83088 † 288). ℞ (℞ 11808 † 108). ℞ (℞ 11808 -- 108). ℞ (℞ 83088 -- 288). ſi quidem differentia quadratorum ab extremis eſt numerus quadratus 576 à radice 24. differentia autem quadratorum à mediis eſt cubus 216 à radice 6. productus ſub mediis vel ſub extremis eſt 12. & differentia quadratorum extremorum 576 ad differentiam quadratorum mediorum 216 eſt in ratione data 8 ad 3.

Similiter ſolueres problema, ſi iuberetur quadrata à ſingulis æquari cubo, nam tunc 22Q æquarentur 1 C & fieret 1 R æqualis 22 iuxta quem valorem reſoluti coſſici exhiberent quæſitos. Inde etiam ſolues problema ſequens.

Inuenire quadratum & cubum in ratione data.

SIt enim ratio data 8 ad 3. duplicabis vtrumque terminum rationis, (vt prior fiat quadratus) & fient 16 & 6 tum vtrumque 16 & 6 duces in quadratum poſterioris nempe in 36, & fient 576 & 216 in ratione data 8 ad 3. quorum primus 576 eſt quadratus: alter vero 216 eſt cubus. Similiter ſi iubeas cubum ad quadratum eſſe in ratione 7 ad 2. duplicabis vtrumque (vt poſterior fiat quadratus) eruntque 14 & 4. tum vtrumque duces in 196 (quadratrm 14) & fiet cubus 2744 qui eſt ad quadratum 784 in ratione data 7 ad 2. hinc etiam ſoluetur problema ſequens.

Inuenire tres numeros Geometricè proportionales ita vt extremi ſint quadrati & medius cubus: vel contra extremi cubi & medius quadratus.

QVo ad primam partem nullā eſt difficultas nam capiando quadratum binarij 4 duplicando, habebis cubum 8, & quadruplicando habebis quadratum 16 in continua ratione: capiendo

quadratum ternarij 9 triplicando habebis cubum 27 & noncuplando habebis 81 in continua ratione: capiendo quadratum quaternarij 16 ducendo in 4 & in 16 habebis tres proportionales 16. 64. 256. quorum medius eſt cubus & ſic deinceps in infinitum.

Quod ſpectat ſecundam partem capiatur quilibet cubus pro primo numero, puta 8, ponatur pro ſecundo I Q, & pro tertio I C, ergo quoniam debent eſſe proportionales productus extremorum 8 C æquatur producto mediorum I QQ & fit I R æqualis 8. ergo tres numeri quæſiti ſunt 8. 64. 512. extremi enim ſunt cubi & medius quadratus. ita quotlibet reperientur. Inde quoque ſoluetur ſequens problema.

Inuenire quatuor numeros diſcretè proportionales ita vt medij ſint cubi & extremi quadrati : aut contra.

INueniatur quadratus & cubus in data ratione 2 ad 7, nempe 784 & 2744 deinde in eadem ratione 2 ad 7 inueniatur cubus & quadratus, nempe 175616 & 614656. ſi inuertentur, duo cubi erunt extremi: quadrati autẽ erunt medij 2744. 784. 614656. 175616.

Inuenire quatuor numeros diſcretè proportionales ita vt quadrati duorum priorum ſimul additi faciant cubum cubi autẽ duorum poſteriorum ſimul additi faciant quadratum.

DIuidatur aliquis cubus in duos quadratos: quod vt fiat cum arte, cape aliquem cubum, qui ſit quadratus, vt 100000000, & ponatur vna eius pars I Q, ergo altera erit 100000000 -- I Q hæc igitur poſterior æquari debet quadrato. finge latus 3 R -- 10000. ergo 9 Q + 100000000 -- 60000 R æquantur 100000000 -- I Q. & fit I R æqualis 6000. cuius quadratum 3000000. ſublatum ex cubo 100000000, relinquit alterum quadratum 64000000. quare hæc duo quadrata, quorum radices 6000 & 8000, æqualia ſunt cubo iſtæ autem radices habent eamdem quam 3 & 4.

Reſtat igitur vt inueniamus duos cubos quorum ſumma faciat quadratum, & quorum radices ſint in ratione 3 & 4. ſint illæ radices 3 R. harum cubi ſunt 27 C & 64 C, qui ſimul additi faciunt 91 C æquanda quadrato. Sit ille quadratus 8281 Q. & fit I R æqualis

lis 91. quare duo numeri quæſiti ſunt 273 & 364. quorum cubi 20346417 & 48228544 ſimul faciunt quadratum 68574961, à latere quadrato 8281. ergo quatuor numeri quæſiti Geometricè proportionales diſcretè ſunt 6000. 8000. 273. 364. & ſatisfaciunt quæſtioni.

PROPOSITIO LII.

Inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales Geometricè taliter, vt duæ priores faciant quadratum, ſicuti etiam & duæ poſteriores, Ac tandem ſumma omnium.

POnantur illæ quatuor 1. 3. 1R. 3R. certum eſt illas eſſe. proportionales & ſummam duarum priorum 4 eſſe quadratum reſtat ergo vt ſumma duarum poſteriorum 4R & ſumma omniũ 4R † 4 æquetur quadrato. atque hic occurrit duplicata æqualitas. Igitur duorum numerorum 4R & 4R † 4 quadrato æquandorum ſumatur differentiâ 4. duo illam differentiam producentes ſunt 1 & 4. ergo vel horum ſummæ ſemiſſis quadratus $\frac{25}{4}$ æquetur maiori 4R†4, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus $\frac{6}{4}$ æquetur minori 4R, & prodibit ex vtraque æquatione idem valor radicis nempè $\frac{9}{16}$. iuxta quam reſoluti coſſici exhibebunt quatuor proportionales quæſitos. Et ductis omnibus in denominatorem 16, habebuntur quatuor proportionales, ſine fractionibus 16. 48. 9. 27. qui ſatisfaciunt poſtulatis.

Geometricè id expeditur nullo negotio, nam quatuor quælibet planæ ſuperficies proportionales erunt quæſitæ: ſiquidem & prima cum ſecunda; & tertia cum quarta; & omnes ſimul ita addi poſſunt, vt faciant quadratum per 47 primi.

Propositio LIII.

Inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales Geometricè, taliter vt ſumma omnium; ſumma extremarum eſt ſumma mediarum faciat quadratum.

Accipiatur primò aliquis numerus quadratus puta 100, qui diuidatur in duos quadratos, nempe 64 & 36. tum diuidatur 64 in duos extremos & 36 in duos medios proportionales. Id vero fiet in hunc modũ. Sumantur quatuor numeri ſequẽtes 56†1R. 15-1R. 21†1R. 8--1R. quorũ duo extremi faciunt 64 & duo medij 36. tum vt ſint proportionales, productus extremorum 448--48R-1Q æquetur producto mediorum 315--6R--1Q. & fit 1R æqualis $\frac{133}{42}$. iuxta quam reſoluti coſſici dabunt quatuor proportionales. quorum duo medij æquabuntur 36, & duo extremi 64, & ſumma omnium 100. & ductis omnibus in 42 habebuntur alij quatuor 104370. 20874. 42630. 8526. qui ſatisfacient quæſtioni: nam ſumma omnium eſt 176400 quadratus a latere 420. ſumma extremarum 112896 quadratus à latere 336. ſumma mediarum eſt 63504 quadratus à latere 252. & ſunt diſcretè proportionales.

Geometricè, facile eſt illud problema exequi, quatuor enim ſuperficies proportionales quæcumque erunt quæſitæ: ſiquidem & duæ mediæ, & duæ extremæ & ſigulæ componentur in vnum quadratum per 47 primi.

Scholium.

Hinc patet quomodo datus numerus quadratus aut compoſitus ex duobus quadratis diuidi poſſit in quatuor proportionales diſcretè, taliter vt & ſumma extremorum & ſumma mediorum faciant quadratum.

lis 91. quarē duo numeri quæſiti ſunt 273 & 364. quorum cubi 20346417 & 48228544 ſimul faciunt quadratum 68574961, à latere quadrato 8281. ergo quatuor numeri quæſiti Geometricè proportionales diſcretè ſunt 6000. 8000. 273. 364. & ſatisfaciunt quæſtioni.

Propositio LII.

Inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales Geometricè taliter vt duæ priores faciant quadratum, ſicuti etiam & duæ poſteriores, Ac tandem ſumma omnium.

POnantur illæ quatuor 1. 3. 1R. 3R. certum eſt illas eſſe. proportionales & ſummam duarum priorum 4 eſſe quadratum reſtat ergo vt ſumma duarum poſteriorum 4R & ſumma omniū 4R † 4 æquetur quadrato. atque hic occurrit duplicata æqualitas. Igitur duorum numerorum 4R & 4R † 4 quadrato æquandorum ſumatur differentiā 4. duo illam differentiam producentes ſunt 1 & 4. ergo vel horum ſummæ ſemiſſis quadratus $\frac{25}{4}$ æquetur maiori 4R†4, vel horum differentiæ ſemiſſis quadratus $\frac{6}{4}$ æquetur minori 4R, & prodibit ex vtraque æquatione idem valor radicis nempe $\frac{9}{16}$. iuxta quam reſoluti coſſici exhibebunt quatuor proportionales quæſitos. Et ductis omnibus in denominatorem 16, habebuntur quatuor proportionales, ſine fractionibus 16. 48. 9. 27. qui ſatisfaciunt poſtulatis.

Geometrecè id expeditur nullo negotio, nam quatuor quælibet planæ ſuperficies proportionales erunt quæſitæ: ſiquidem & prima cum ſecunda; & tertia cum quarta; & omnes ſimul ita addi poſſunt, vt faciant quadratum per 47 primi.

Propositio LIII.

Inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales Geometricè, taliter vt ſumma omnium ; ſumma extremarum eſt ſumma mediarum faciat quadratum.

Accipiatur primò aliquis numerus quadratus puta 100, qui diuidatur in duos quadratos, nempe 64 & 36. tum diuidatur 64 in duos extremos & 36 in duos medios proportionales. Id vero fiet in hunc modũ. Sumantur quatuor numeri ſequẽtes 56†1R. 15-1R. 21†1R. 8 -- 1R. quorũ duo extremi faciunt 64 & duo medij 36. tum vt ſint proportionales, productus extremorum 448 -- 48R-1Q æquetur producto mediorum 315 -- 6R -- 1Q. & fit 1R æqualis 133. iuxta quam reſoluti coſſici dabunt quatuor proportionales.

———

42

quorum duo medij æquabuntur 36, & duo extremi 64, & ſumma omnium 100. & ductis omnibus in 42 habebuntur alij quatuor 104370. 20874. 42630. 8526. qui ſatisfacient quæſtioni : nam ſumma omnium eſt 176400 quadratus a latere 420. ſumma extremarum 112896 quadratus à latere 336. ſumma mediarum eſt 63504 quadratus à latere 252. & ſunt diſcretè proportionales.

Geometricè, facile eſt illud problema exequi, quatuor enim ſuperficies proportionales quæcumque erunt quæſitæ: ſiquidem & duæ mediæ, & duæ extremæ & ſigulæ componentur in vnum quadratum per 47 primi.

Scholium.

Hinc patet quomodo datus numerus quadratus aut compoſitus ex duobus quadratis diuidi poſſit in quatuor proportionales diſcretè, taliter vt & ſumma extremorum & ſumma mediorum faciant quadratum.

PROPOSITIO LIV.

Inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales ita vt ſumma duarum priorum, ſumma duarum poſteriorum, & ſumma mediarum faciant quadratum. Et inſuper prima & tertia ſigillatim faciant quadratum.

POnatur quatuor quæſiti numeri 1. *3.* 1Q. *3*Q. (ſic enim ſatisfit quatuor poſtulatis, ſi quidem primus & ſecundus ſimul faciunt quadratum *4*, ſicuti etiam tertius & quartus & præterea primus & tertius ſunt quadrati.) reſtat ergo vt ſumma mediorum 3 † 1Q æquetur quadrato. finge latus 1*R* -- 2 ergo eius quadratum 1Q † 4 - 4*R* æquatur *3* † 1Q & fit 1*R* æqualis $\frac{1}{4}$ iuxta quam reſoluti coſſici dabunt quæſitos. Et ſi illos ducas in 1*6*, fient quatuor noui numeri proportionales ſine fractionibus, 1*6*. 48. 1. *3*. qui ſatisfaciunt quæſtioni.

Geometricè, res facilè expeditur, ſumendo quatuor plana quæcumque diſcretè proportionalia, hæc enim quomodolibet illa ſumas reducuntur ad quadratum per primum Euclidis librum.

Scholium.

Hinc ſolues problema ſequens: Inuenire quatuor numeros proportionales diſcretè, ita vt primus & tertius ſigillatim ſunt quadrati ſumma primi & ſecundi faciant quadratũ, ſicuti etiam ſumma mediorum, nec non ſumma tertij & quarti: ſumma autem extremorum faciat cubum. Cape quatuor numeros inuentos in præcedenti propoſitione, illiſque adijce characterem quadratorũ, vt fiant 1*6*Q. 48Q. 1Q. *3*Q. ita ſatisfit quinque poſtulatis: quare reſtat vt ſumma extremorum 1*9*Q faciat cubum. ſit ille 1C. Et fiet 1*R* æqualis 1*9*, iuxta quam ſi reſolues poſitiones, quatuor quæſiti erunt *5776*. 17328. *361*. *1083*.

Similiter ſolues quæſtionem ſequentem: inuenire cubum qui diuidatur in quatuor numeros proportionales taliter vt primus & tertius ſint quadrati & ſumma duorum priorum faciat quadratum; ſicut ſumma duorum poſteriorum & ſumma mediorum. nam ſumma quatuor

eſt 68Q quæ debet æquari cubo. ſit ille 1C. Et fit 1 *R*. 68. iuxtà quam reſoluti coſſici dabunt quatuor quæſitos. 73984. 221952. 4624. 13872.

Propositio LV.

Diuidere numerum quēcumque datum in quotlibet continuè proportionales, taliter vt productus à duobus quibuſcumque vicinis, aſſumptis illorum duorum quadratis fiat quadratus.

Detur numerus 1360 diuidendis in 4. & quæratur ſtatim aliquis numerus qui producens quemlibet numerum puta 3 exhibeat productum qui cum quadrato producentis & quadrato multiplicati facit quadratum. Sit ille 1R ergo 3 † 1Q † 9 facit quadratum. Finge latus 1R † 2. ergo eius quadratus 1Q † 4 † 4R æquatur 3 † 1Q † 9. & fit 1R æqualis 5. igitur 3 & 5 ſunt duo numeri quorum productus 15 aſſumptis illorum quadratis 9 & 25 facit quadratum. Nempe 49. Nota autem quoſlibet eamdem cum iſtis duobus proportionem habentes, eandem proprietatem habituros.

Quære igitur quatuor numeros, qui habeant continuam proportionem talem, qualem habent 3 5. (Id autem fit per regulam auream) tales ſunt ſine fractione 27. 45. 75. 125. deinde fac vt ſumma eorum 272 ad ſingulos, ita numerus diuidendus 1360 ad alios, & habebuntur quæſiti 135. 225. 375. 625.

Propositio LVI.

Inuenire quotlibet quantitates quadrato æquales, ita vt omnes ſimul ſumptæ minus vna, reliquam illam ſuperant quadrato.

Sint inueniendi quinque numeri æquales quadrato, puta 4, igitur ſumma exceſſuum erit tripla ſummæ numerorum (ſiquidem cum quaterni ſuperent reliquum, ſuperantur quinque ſigillatim, quinque autem faciunt ſummam omnium, igitur bis ſumma omnium tollenda eſt à quindupla omnium ſumma, & ſic remanebit tripla ſumma omnium) ac Proinde exceſſuum ſumma erit 12. diuidere ergo

nec

Propoſitio LIV.

Inuenire quatuor quantitates diſcretè proportionales ita vt ſumma duarum priorum, ſumma duarum poſteriorum, & ſumma mediarum faciant quadratum. Et inſuper prima & tertia ſigillatim faciant quadratum.

PPonatur quatuor quæſiti numeri *1.* *3.* 1Q. *3*Q. (ſic enim ſatisfit quatuor poſtulatis, ſi quidem primus & ſecundus ſimul faciunt quadratum *4*, ſicuti etiam tertius & quartus & præterea primus & tertius ſunt quadrati.) reſtat ergo vt ſumma mediorum 3 † 1Q æquetur quadrato. finge latus 1*R* -- 2 ergo eius quadratum 1Q † 4- 4*R* æquatur *3* † 1Q & fit 1*R* æqualis $\frac{1}{4}$ iuxta quam reſoluti coſſici dabunt quæſitos. Et ſi illos ducas in *16*, fient quatuor noui numeri proportionales ſine fractionibus, *16*. 48. 1. *3*. qui ſatisfaciunt quæſtioni.

Geometricè, res facilè expeditur, ſumendo quatuor plana quæcumque diſcretè proportionalia, hæc enim quomodolibet illa ſumas reducuntur ad quadratum per primum Euclidis librum.

Scholium.

Hinc ſolues problema ſequens: Inuenire quatuor numeros proportionales diſcretè, ita vt primus & tertius ſigillatim ſunt quadrati: ſumma primi & ſecundi faciant quadratū, ſicuti etiam ſumma mediorum, nec non ſumma tertij & quarti: ſumma autem extremorum faciat cubum. Cape quatuor numeros inuentos in præcedenti propoſitione, illiſque adijce characterem quadratorū, vt fiant *16*Q. 48Q. 1Q. *3*Q. ita ſatisfit quinque poſtulatis: quare reſtat vt ſumma extremorum *19*Q faciat cubum. ſit ille 1C. Et fiet 1*R* æqualis *19*, iuxta quam ſi reſolues poſitiones, quatuor quæſiti erunt *5776*. 17328. *361*. *1083*.

Similiter ſolues quæſtionem ſequentem: inuenire cubum qui diuidatur in quatuor numeros proportionales taliter vt primus & tertius ſint quadrati & ſumma duorum priorum faciat quadratum; ſicut ſumma duorum poſteriorum & ſumma mediorum. nam ſumma quatuor

eſt 68Q quæ debet æquari cubo. ſit ille 1C. Et fit 1R. 68. iuxta quam reſoluti coſſici dabunt quatuor quæſitos. 73984. 221952. 4624. 13872.

Propositio LV.

Diuidere numerum quẽcumque datum in quotlibet continuè proportionales, taliter vt productus à duobus quibuſcumque vicinis, aſſumptis illorum duorum quadratis fiat quadratus.

Detur numerus 1360 diuidendis in 4. & quæratur ſtatim aliquis numerus qui producens quemlibet numerum puta 3 exhibeat productum qui cum quadrato producentis & quadrato multiplicati facit quadratum. Sit ille 1R ergo 3 † 1Q † 9 facit quadratum. Finge latus 1R † 2. ergo eius quadratus 1Q † 4 † 4R æquatur 3 † 1Q † 9. & fit 1R æqualis 5. igitur 3 & 5 ſunt duo numeri quorum productus 15 aſſumptis illorum quadratis 9 & 25 facit quadratum. Nempe 49. Nota autem quoſlibet eamdem cum iſtis duobus proportionem habentes, eandem proprietatem habituros.

Quære igitur quatuor numeros, qui habeant continuam proportionem talem, qualem habent 3 5. (Id autem fit per regulam auream) tales ſunt ſine fractione 27. 45. 75. 125. deinde fac vt ſumma eorum 272 ad ſingulos, ita numerus diuidendus 1360 ad alios, & habebuntur quæſiti 135. 225. 375. 625.

Propositio LVI.

Inuenire quotlibet quantitates quadrato æquales, ita vt omnes ſimul ſumptæ minus vna, reliquam illam ſuperant quadrato.

Sint inueniendi quinque numeri æquales quadrato, puta 4, igitur ſumma exceſſuum erit tripla ſummæ numerorum (ſiquidem cum quaterni ſuperent reliquum, ſuperantur quinque ſigillatim, quinque autem faciunt ſummam omnium, igitur bis ſumma omnium tollenda eſt à quindupla omnium ſumma, & ſic remanebit tripla ſumma omnium) ac Proinde exceſſuum ſumma erit 12. diuidere ergo

nec

nec eſſe eſt 12 in quiuſque quadratos quorum quilibet ſit minor 4 (numero diuidendo) Et quia 12 diuiditur exactè in tres quadratos æquales 4. 4. 4. oportet diuidere bis 4 in duos quadratos (per 1 appendicis lib. 1) & fient quatuor quadrati $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{576}{169}$. $\frac{100}{169}$. quibus addendus foret 4 pro quinto, ſi 4 ſiipſo eſſet minor. quia vero id implicat, alia nobis ineunda eſt via, vt ad finem propoſitum perueniamus, nectendusque ultimus quadratus $\frac{100}{169}$ cum 4, vt habeatur ſumma compoſita ex duobus quadratis, quæ (per 2 appendicis lib. 1.) diuidetur in duos quadratos, quorum quilibet minor erit 4. illi autem erunt $\frac{532900}{142129}$. $\frac{119716}{142129}$. quorum latera ſunt $\frac{730}{377}$. $\frac{346}{377}$. quare quinque exceſſus erunt $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{576}{169}$. $\frac{532900}{142129}$. $\frac{119716}{142129}$. quos ſi tollas ſigillatim à 4, reſiduorum ſumas ſemiſſes, fient quæſiti numeri $\frac{32}{25}$. $\frac{36}{50}$. $\frac{100}{338}$. $\frac{17808}{142129}$. $\frac{224400}{142129}$. idem eſto iudicium de pluribus. Sed de ſex ſumma exceſſuum erit quadrupla ſummæ numerorum. de ſeptem quintupla: de octo ſextupla: & ſic de reliquis ob rationem allatam.

Geometricè res eſt facillima, ſumantur enim quinque quælibet ſuperficies, (modo quaternæ reliqua ſint maiores) illæ poſſunt componi in vnum quadratum, quod ſuperabit reliquam ſuperficiem quadrato. vt ſæpius dictum. Per 47 primi. Et 31 tertij.

Propositio LVII.

Datam quantitatem diuidere in quotlibet partes, ita vt cuilibet addendo quantitatem datam, fiat quadratum.

Eſto diuidendus 6 in quatuor partes, quarum cuilibet addendo 4, fiant quadrati. Quoniam igitur ſunt quatuor partes, quæ faciunt 6, & cuilibet addi debet 4, vt fiant quadrata, erunt illa

Rrr

quatuor quadrata ſimul ſumpta æqualia quadruplo 4 & 6, hoc eſt 22. quare diuidendus erit numerus 22 in quatuor quadrata quorum quodlibet ſit maius 4. Porro 22 diuiditur in tres quadratos 9. 9. 4 ſed quoniam 4 non ſuperat ſeipſum, retento 9 (priori quadrato ex his tribus) ſumma reliquorum duorum 13 diuidenda eſt in tres quadratos quorum quilibet ſit maior 4.

vt autem id fiat ex arte, vtendum eſt methodo quadam ſingulari quam Diophantus vocat alicubi adæqualitatem: & quia 13 debet diuidi in tres quadratos, accipiatur triens 13 nempe $\frac{13}{3}$. & inquiretur pars quadratica quæ addita $\frac{13}{3}$ faciat quadratum. Sit illa pars quadratica $\frac{1}{1Q}$. ergo $\frac{1}{1Q} + \frac{13}{3}$ æquatur quadrato. Et ductus omnibus in 1Q, fiet $1 + \frac{13Q}{3}$ æquantum quadrato. Et ductus omnibus in 9 (hæ operationes factæ ſunt vitandarium fractionum gratia) habebis $9 + 39Q$ æquanda quadrato. Finge latus $3 + 6R$. eius quadratum $9 + 36Q + 36R$ æquatur $9 + 39Q$. Et fit 1R æqualis 12. cuius quadratum 144. ergo pars quadratica quæ fuit poſita $\frac{1}{1Q}$ erit $\frac{1}{144}$, quæ addita $\frac{13}{3}$ facit quadratum $\frac{625}{144}$ cuius latus eſt $\frac{25}{15}$, cui adæquanda erunt latera quadratorum trium, in quæ 13 diuidi debet. hoc autem ita fiet.

Deinde 13 compoſitum ex duobus quadratis (per 1 & 2 append. lib. 1.) in tria quadrata 4. $\frac{81}{25}$. $\frac{144}{25}$. quorum latera ſunt 2. $\frac{9}{5}$. $\frac{12}{5}$. latera hæc tria & $\frac{25}{15}$ mox mentum latus reduc in eamdem denominationem & fiunt $\frac{120}{60}$. $\frac{108}{60}$. $\frac{144}{60}$. cum $\frac{125}{60}$. & neglectis denomi-

nec eſſe eſt 12 in quiuſque quadratos quorum quilibet ſit minor 4 (numero diuidendo) Et quia 12 diuiditur exactè in tres quadratos æquales 4. 4. 4. oportet diuidere bis 4 in duos quadratos (per 1 appendicis lib. 1) & fient quatuor quadrati $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{576}{169}$. $\frac{100}{169}$. quibus addendus foret 4 pro quinto, ſi 4 ſipſo eſſet minor, quia vero id implicat, alia nobis ineunda eſt via, vt ad finem propoſitum perueniamus, nectenduſque ultimus quadratus $\frac{100}{169}$ cum 4, vt habeatur ſumma compoſita ex duobus quadratis, quæ (per 2 appendicis lib. 1.) diuidetur in duos quadratos, quorum quilibet minor erit 4. illi autem erunt $\frac{532900}{142129}$. $\frac{119716}{142129}$. quorum latera ſunt $\frac{730}{377}$. $\frac{346}{377}$. quare quinque exceſſus erunt $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{576}{169}$. $\frac{532900}{142129}$. $\frac{119716}{142129}$. quos ſi tollas ſigillatim à 4, reſiduorum ſumas ſemiſſes, fient quæſiti numeri $\frac{32}{25}$. $\frac{36}{50}$. $\frac{100}{338}$. $\frac{17808}{142129}$. $\frac{224400}{142129}$. idem eſto iudicium de pluribus. Sed de ſex ſumma exceſſuum erit quadrupla ſummæ numerorum. de ſeptem quintupla: de octo ſextupla: & ſic de reliquis ob rationem allatam.

Geometricè res eſt facillima, ſumantur enim quinque quælibet ſuperficies, (modo quaternæ reliqua ſint maiores) illæ poſſunt componi in vnum quadratum, quod ſuperabit reliquam ſuperficiem quadrato. vt ſæpius dictum. Per 47 primi. Et 31 tertij.

PROPOSITIO LVII.

Datam quantitatem diuidere in quotlibet partes, ita vt cuilibet addendo quantitatem datam, fiat quadratum.

ESto diuidendus 6 in quatuor partes, quarum cuilibet addendo 4, fiant quadrati. Quoniam igitur ſunt quatuor partes, quæ faciunt 6, & cuilibet addi debet 4, vt fiant quadrata, erunt illa

quatuor quadrata ſimul ſumpta æqualia quadruplo 4 & 6, hoc eſt 22. quare diuidendus erit numerus 22 in quatuor quadrata quorum quodlibet ſit maius 4. Porro 22 diuiditur in tres quadratos 9. 9. 4 ſed quoniam 4 non ſuperat ſeipſum, retento 9 (priori quadrato ex his tribus) ſumma reliquorum duorum 13 diuidenda eſt in tres quadratos quorum quilibet ſit maior 4.

vt autem id fiat ex arte, vtendum eſt methodo quadam ſingulari quam Diophantus vocat alicubi adæqualitatem: & quia 13 debet diuidi in tres quadratos, accipiatur triens 13 nempe $\frac{13}{3}$. & inquiretur pars quadratica quæ addita $\frac{13}{3}$ faciat quadratum. Sit illa pars quadratica $\frac{1}{1Q}$. ergo $\frac{1}{1Q}$ † $\frac{13}{3}$ æquatur quadrato. Et ductus omnibus in 1Q, fiet 1 † $\frac{13Q}{3}$ æquantum quadrato. Et ductus omnibus in 9 (hæ operationes factæ ſunt vitandarium fractionum gratia) habebis 9 † 39Q æquanda quadrato. Finge latus 3 † 6R. eius quadratum 9 † 36Q † 36R æquatur 9 † 39Q. Et fit 1R æqualis 12. cuius quadratum 144. ergo pars quadratica quæ fuit poſita $\frac{1}{1Q}$ erit $\frac{1}{144}$, quæ addita $\frac{13}{3}$ facit quadratum $\frac{625}{144}$ cuius latus eſt $\frac{25}{15}$, cui adæquanda erunt latera quadratorum trium, in quæ 13 diuidi debet. hoc autem ita fiet.

Deinde 13 compoſitum ex duobus quadratis (per 1 & 2 append. lib. 1.) in tria quadrata: 4. $\frac{81}{25}$. $\frac{144}{25}$. quorum latera ſunt 2. $\frac{9}{5}$. $\frac{12}{5}$. latera hæc tria & $\frac{25}{15}$ mox mentum latus reduc in eamdem denominationem & fiunt $\frac{120}{60}$. $\frac{108}{60}$. $\frac{144}{60}$. cum $\frac{125}{60}$. & neglectis denomi-

nationibus, cape differentias numeratorum ſingulorum & 125. differentia 120 & 125 eſt 5 quem affectum charactere radicum iunges cum latere ſuperiori 2, per ſignum plus (quia 125 ſuperat 120) vt fit $2 + 5R$. Pro vno latere. Deinde differentia 108 & 125 eſt 17 quem iunges affectum ſemper charactere radicum cum $\frac{9}{5}$ (quod eſt alterum latus) per ſignum plus (quia 125 ſuperat 108) vt fiat $\frac{9}{5} + 17R$ pro altero latere. Ac tandē differentia 144 & 125 eſt 19 quem affectum radice iunges cum $\frac{12}{5}$ per ſignum minus, (quia 125 ſuperatur à 144) vt fit $\frac{12}{5} - 19R$ pro vltimo latere. Horum trium laterum quadrata inuicem addita $13 + 675Q - 10R$ æquabis 13. & fiet 1R æqualis $\frac{2}{135}$. iuxta quam reſoluta tria latera ſunt $\frac{277}{135}$. $\frac{280}{135}$. $\frac{286}{135}$. quadrati autem ſunt $\frac{76729}{18225}$. $\frac{78400}{18225}$. $\frac{81796}{18225}$. quibus ſi addas 9 iam inuentum, fiet quartus quadratus quatuor autem illi quadrati ſimul æquantur 22. quare ſi ab his ſigillatim auferas 4, fient partes numeri diuidendi 6 quæſitæ. Enimuero iis partibus addendo 4 rurſus efficientur quadrati prædicti. quod erat faciendum.

Geometricè, res perficitur facile diuidendo planum datum in quatuor ſegmenta, quodlibet enim illorum cum plano dato reduci poteſt ad quadratum ex primo libro Euclidis.

Propositio. LVIII.

Datam quantitatem diuidere in quotcumque partes, ita vt cuilibet detrahendo quantitatem datam, fiat quadratum.

Oportet quantitatem datam diuidendam maiorem eſſe quantitate detrahenda toties, quot poſtulantur partes: detur itaque

numerus 16 diuidendus in quatuor ſegmenta, ita vt à quolibet auferendo 2 relinquantur quadrati. nec eſſe eſt vt 16 ſit maior quadruplo 2 quia iſtud quadruplum debet ab eo auferri. tollatur ergo 8 (quadruplum 2) ex 16 & reſiduum 8 diuidatur in quatuor quadrata: & ſtatim patet diuidi in duo quadrata 4 & 4. quare ſi quodlibet illorum ſecetur in duo, ab ſolutum erit problema. Id autem fit per 1 append. lib. 1. & fiunt duo quadrati $\frac{64}{25}$. $\frac{36}{25}$. qui æquantur 4. & alij duo $\frac{576}{169}$. $\frac{100}{169}$ qui rurſus æquantur 4. proinde ſi quatuor illis quadratis ſigillatim addantur 2 fient quatuor numeri quæſiti $\frac{114}{25}$. $\frac{86}{25}$. $\frac{914}{169}$. $\frac{438}{169}$. etenim horum ſumma eſt 16, & tollendo à ſingulis 2, reſtituuntur quadrati ſuperiores.

Geometricè, ex plano diuidendo tollatur quadratum plani detrahendi, & reſiduum diuidatur in quatuor quadrata (quod facile fiet deſcribendo ſemicirculum ſuper lineam, quæ poteſt hoc reſiduum) ſi enim cuilibet quadrato addatur quantitas detrahenda, habebuntur quatuor partes quæſitæ.

Scholium.

Quod in duabus præcedentibus propoſitionibus factum eſt de eodem plano addendo aut detrahendo, fieri poteſt de diuerſis, modo nihil iubeatur quod implicet contradictionem: vt ſi præciperetur quantitatem maiorem detrahi ex minore.

Propositio LIX.

Diuidere quadratum quodcumque vel compoſitum ex duobus quadratis in quadrata quotlibet intra præſcriptos limites cadentia.

Vieta lib. 4. Zet. 5. ſubtiliter admodum diuidit quadratum in duo quorum limites dati ſint: verum quomodo per ipſius metohdum diuidi poſſit in plura non video. Bachetus alia arte vſus eſt ad qu.

natiọnibus, cape differentias numeratorum ſingulorum & 125. differentia 120 & 125 eſt 5 quem affectum charactere radicum iunges cum latere ſuperiori 2, per ſignum plus (quia 125 ſuperat 120) vt ſit 2 † 5R. Pro vno latere. Deinde differentia 108 & 125 eſt 17 quem iunges affectum ſemper charactere radicum cum $\frac{9}{5}$ (quod eſt alterum latus) per ſignum plus (quia 125 ſuperat 108) vt fiat $\frac{9 \dagger 17R}{5}$ pro altero latere. Ac tandē differentia 144 & 125 eſt 19 quem affectum radice iunges cum $\frac{12}{5}$ per ſignum minus, (quia 125 ſuperatur à 144) vt ſit $\frac{12 -- 19R}{5}$ pro vltimo latere. Horum trium laterum quadrata inuicem addita 13 † 675Q -- 10R æquabis 13. & fiet 1R æqualis $\frac{2}{135}$. iuxta quam reſoluta tria latera ſunt $\frac{277}{135}$. $\frac{280}{135}$. $\frac{286}{135}$. quadrati autem ſunt $\frac{76729}{18225}$. $\frac{78400}{18225}$. $\frac{81796}{18225}$. quibus ſi addas 9 iam inuentum, fiet quartus quadratus quatuor autem illi quadrati ſimul æquantur 22. quare ſi ab his ſigillatim auferas 4, fient partes numeri diuidendi 6 quæſitæ. Enimuero iis partibus addendo 4 rurſus efficientur quadrati prædicti. quod erat faciendum.

Geometricè, res perficitur facile diuidendo planum datum in quatuor ſegmenta, quodlibet enim illorum cum plano dato reduci poteſt ad quadratum ex primo libro Euclidis.

PROPOSITIO. LVIII.

Datam quantitatem diuidere in quotcumque partes, ita vt cuilibet detrahendo quantitatem datam, fiat quadratum.

OPortet quantitatem datam diuidendam maiorem eſſe quantitate detrahenda toties, quot poſtulantur partes: detur itaque

numerus 16 diuidendus in quatuor ſegmenta, ita vt à quolibet auferendo 2 relinquantur quadrati. nec eſſe eſt vt 16 ſit maior quadruplo 2 quia iſtud quadruplum debet ab eo auferri. tollatur ergo 8 (quadruplum 2) ex 16 & reſiduum 8 diuidatur in quatuor quadrata: & ſtatim patet diuidi in duo quadrata 4 & 4. quare ſi quodlibet illorum ſecetur in duo, ab ſolutum erit problema. Id autem fit per 1 append. lib. 1. & fiunt duo quadrati $\frac{64}{25}$. $\frac{36}{25}$. qui æquantur 4. & alij duo $\frac{576}{169}$. $\frac{100}{169}$ qui rurſus æquantur 4. proinde ſi quatuor illis quadratis ſigillatim addantur 2 fient quatuor numeri quæſiti $\frac{114}{25}$. $\frac{86}{25}$. $\frac{914}{169}$. $\frac{438}{169}$. etenim horum ſumma eſt 16, & tollendo à ſingulis 2, reſtituuntur quadrati ſuperiores.

Geometricè, ex plano diuidendo tollatur quadratum plani detrahendi, & reſiduum diuidatur in quatuor quadrata (quod facile fiet deſcribendo ſemicirculum ſuper lineam, quæ poteſt hoc reſiduum) ſi enim cuilibet quadrato addatur quantitas detrahenda, habebuntur quatuor partes quæſitæ.

Scholium.

Quod in duabus præcedentibus propoſitionibus factum eſt de eodem plano addendo aut detrahendō, fieri poteſt de diuerſis, modo nihil iubeatur quod implicet contradictionem; vt ſi præciperetur quantitatem maiorem detrahi ex minore.

Propositio LIX.

Diuidere quadratum quodcumque vel compoſitum ex duobus quadratis in quadrata quotlibet intra præſcriptos limites cadentia.

Vieta lib. 4. Z. & 5. ſubtiliter admodum diuidit quadratum in duo quorum limites dati ſint: verum quomodo per ipſius metohdum diuidi poſſit in plura non video. Bachetus alia arte vſus eſt ad

qu.

qu. 12 lib. 5. Diophant. & meo quidem iudicio, longe præſtantiori, ad faciendam eiuſmodi diuiſionem. Ergo extendo quæſtionem ad quolibet quadrata inter limites præſtitutos.

Sit verbi gratia diuidendus 14 in tria quadrata quorum vnum ſit inter 1 & 2. ſecundum inter 4 & 5. tertium ſit complementum præcedentium, & conſequenter cadat inter 7 & 9.

Summa duorum priorum limitum eſt 3 cuius ſemiſſis eſt $\frac{3}{2}$. quare per methodum ſuperius explicatam, inuenienda eſt pars quadratica quæ iuncta 3 faciat quadratum. ea autem eſt $\frac{1}{16}$. quæ addita $\frac{3}{2}$ facit $\frac{25}{19}$. cuius latus $\frac{5}{4}$. ergo latus primi quadrati ad æquandum erit $\frac{5}{4}$.

Simili ratione ſumma duorum ſequentium limitum 4 & 5 eſt 9 cuius ſemiſſis $\frac{9}{2}$. ergo inuenienda eſt pars quadratica, quæ cum $\frac{9}{2}$ faciat quadratum. ea vero eſt $\frac{1}{46}$ quæ iuncta $\frac{9}{2}$ facit quadratum $\frac{289}{64}$. cuius lateri $\frac{17}{8}$ ad æquandum eſt latus ſecundi quadrati quæſiti.

Tertiò ſemiſſem ſummæ duorum priorum limitum 1 & 2. adde ſemiſſi ſummæ poſteriorum 4 & 5. & fient 6 tollenda ex numero diuidendo 14, reſtatque 8. quapropter inquirenda eſt pars quadratica quæ addita 8 faciat quadratum. ea autem eſt $\frac{1}{36}$. cui ſi addas 8, fit quadratum $\frac{289}{39}$. cuius lateri $\frac{17}{6}$. adæquari debet latus tertij quadrati inueniendi.

Deinde quoniam numerus diuidendus 14 ſuapte natura diuiditur in tria quadrata 9. 4. 1. capies eorum quadratorum radices 3. 2. 1. (ſi diuideretur tantum in duo quadrata, vnum eorum diuideres in duo, & ſic haberes tria quadrata. imo ſi eſſet quadratus diuidi poſ-

ſet in tria quadrata, per primam append. lib primi, & ſic tria latera inuenirentur) reductiſque illis ad eamdem denominationem cum tribus fractionibus mox inuentis, $\frac{5}{4}$. $\frac{17}{8}$. $\frac{17}{6}$. fiunt tres iſtæ fractiones $\frac{90}{24}$. $\frac{51}{24}$. $\frac{68}{24}$. & tria latera ſuperiora $\frac{24}{24}$. $\frac{72}{24}$. $\frac{48}{24}$. ex his formari debent latera quadratorum quæſitorum hoc pacto. Et primo quidem certum eſt vnum latus habiturum pro numero abſoluto 1, alterum 3, tertium 2 (latera videlicet quadratorum ex quibus 14 componitur) his ad iungitur quidam numerus radicum cum ſignis plus aut minus, prout numeratores priorum fractionem ſuperant aut ſuperantur à numeratoribus poſteriorum: differentia enim horum numeratorum eſt numerus radicum; vt quoniam 6 eſt defferentia numeratorum 20 & 24, erit primum latus 1 † 6R. item quia differentia numeratorum 51 & 72 eſt 21, erit ſecundum latus 3-21R (ponitur ſignum minus quia 51 ſuperatur à 72) tertio quia differentia numeratorum 68 & 48 eſt 20, erit tertium latus 2 † 20R. horum trium laterum quadrata ſimul ſumpta 14 † 877Q -- 34R æquantur 14. & fit 1R æqualis $\frac{34}{877}$. vnde iuxta poſitiones quadrata quæſita ſunt $\frac{1168561}{769129}$. $\frac{3674889}{769129}$. $\frac{5924356}{769129}$. minus quadratum eſt inter limites datos 1 & 2. mediocre quadratum eſt inter limites 4 & 5. maius vero eſt inter 7 & 9.

Si iuberetur diuiſionem fieri in plura quadrata eodem modo procedendum foret per partes quadraticas, de quibus fuſè diximus in ſchol. propoſ. 36. append. lib. 1.

Geometricè, ſint data duo quadrata pro limitibus primis B & C, & duo alia quadrata pro limitibus ſecundis D & F, eſto vero quadratum G diuidendum in tria quadrata quæ cadant inter limites præſtitutos, ſuper lineam G fiat ſemicirculus & ſumpta quæcumque linia inter B & C inſcribatur ſemicirculo prædicto ab extremitate diametri & connectatur cum altera extremitate: tum ſuper connexam fiat ſecundus ſemicirculus in quo inſcribatur ab extremitate diametri aliqua linea inter D & F & perficiatur triangulum

pēr connēxam. quadratum poſterioris iſtius connexæ & duo quadrata inſcriptarum, erunt tria quæſita per 31 tertij & 47 primi.

Eadem arte diuidetur quodcumque quadratum in quodcumque quadrata inter præfixos limites, modo non iubeatur fieri diuiſionem quæ repugnet.

Propositio LX.

Inuenire quodcumque quantitates, taliter vt quæuis iuncta ſumma omnium illa minorum, faciat quadratum.

Facile eſt hoc problema, nam ſi ponantur ordinatim omnes numeri impares affecti charactere quadratorum, hoc modo, 1Q. 3Q. 5Q. 7Q. 9Q. & ita deinceps adijciendo quotlibet, ſoluta erit quæſtio indefinitè, & capi poterit quilibet numerus pro valore radicis. Cape verbi gratia 3, ergo 1Q erit 9 & quinque poſiti erūt 9. 27. 45. 63. 81. ſi enim accipias 45 & duos ipſo minores, efficietur quadratus 81. ſi capias 63 cum tribus ipſo minoribus, fiet quadratus 144. & ſic de aliis.

Geometricè res eſt facilior, quam vt in ea diutius immoremur.

Scholium.

Hinc ſolui poteſt ſequens problema: inuēnire quotlibēt numēros quorum differentia ſit cubus, & ſumma quadratus, & quilibet additus ſummæ omnium ipſo minorum faciat quadratum.
nam cum illorum omnium numerorum differentia ſit eadem, nempē 2Q, cumque ſoluta ſit quæſtio indefinitè, fit vt ſi æques 2Q alicui cubo, continget ſolutio problematis. Sit ille cubus 1C. Ergo 1R erit æqualis 2. & fient numeri quæſiti 4. 12. 20. 28. 36. vbi vides differentiam ſingulorum eſſe cubum 8.

BIBLIOTECA ... ROMA ... VITTORIO EMANUELE

FINIS.

FACVLTAS R.P. PROVINCIALIS

Societatis IESV.

EGo Nicolaus Roger Prouincialis Prouinciæ Companiæ Soc. IESV, iuxta priuilegium eidem Societati à Chriſtianiſſimis, Regibus Henrico III 10 Maij 1583. Henrico IV 20 Decemb. 1606. Ludouico XIII 14 Febr. 1611. & Ludouico XIV nunc regnante 23 Decembr. 1650. quo Bibliopolis omnibus prohibetur ne libros ab hominibus noſtræ Societatis compoſitos, abſque ſuperiorum eius permiſſione imprimant, Permitto Michaeli Soly Bibliopolæ vt ad annos ſeptem librum qui inſcribitur Diophantus Geometra, à P. Iacobo De Billy eiuſdem Societatis compoſitum & à tribus è noſtris reuiſum, imprimere ac liberè diuendere poſſit. Datum Muſſiponti 25 Maij 1658.

NICOLAVS ROGER.